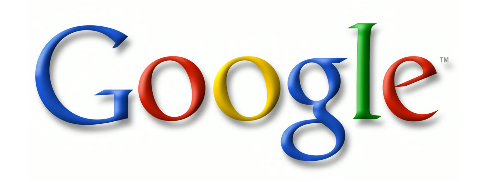
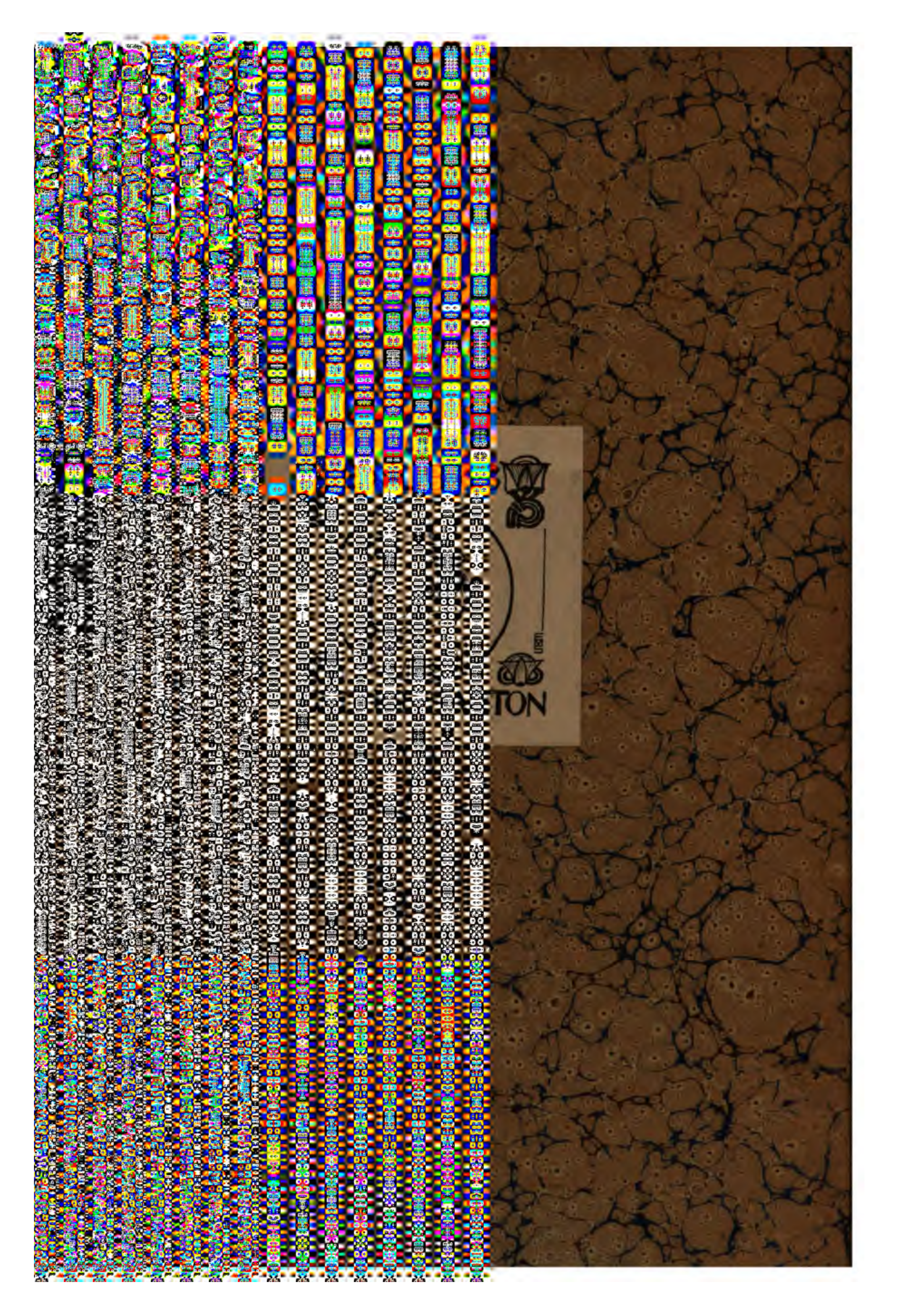
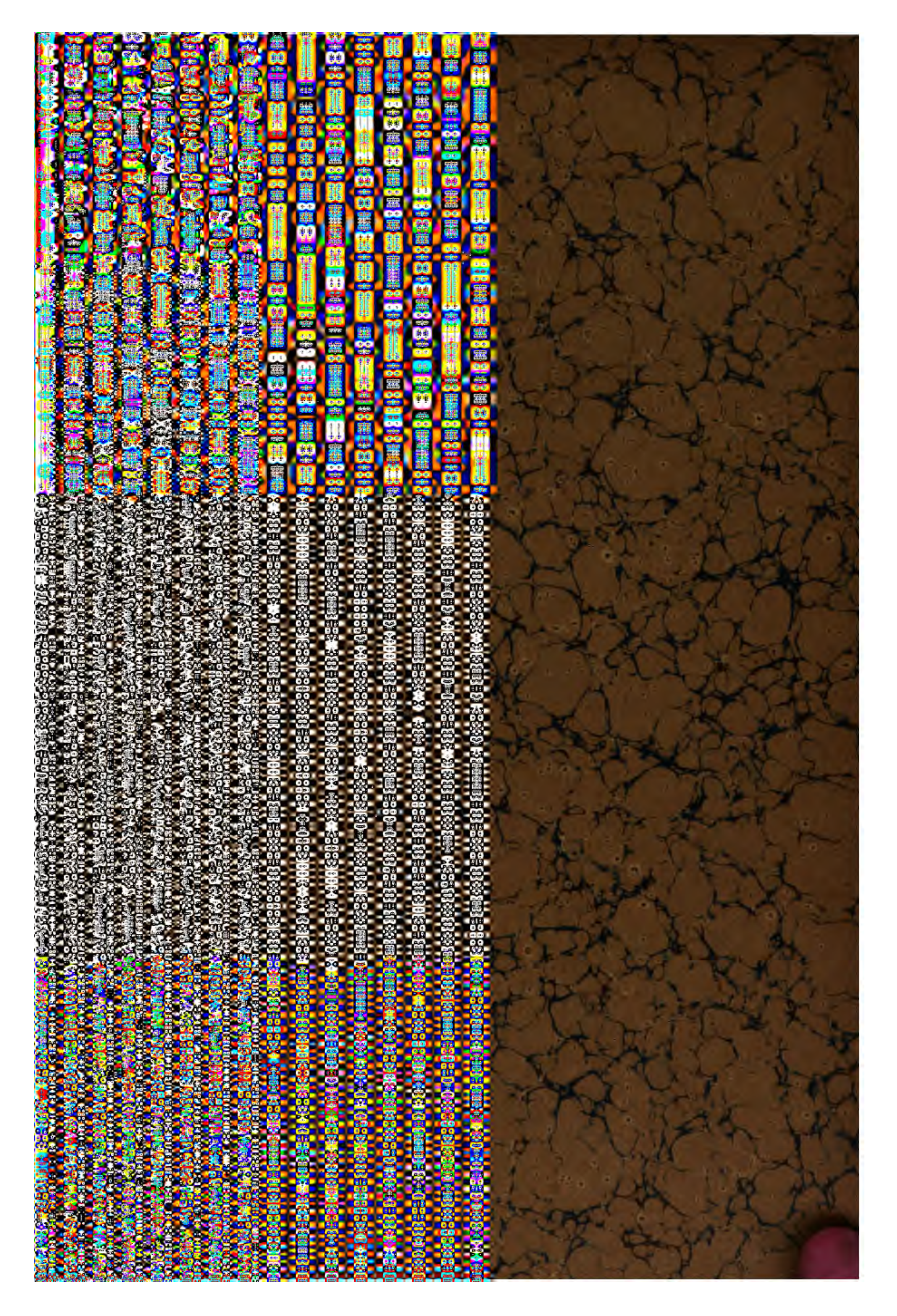

Google





RE

IQUES

ALL

(Cambridge)

et augmentée

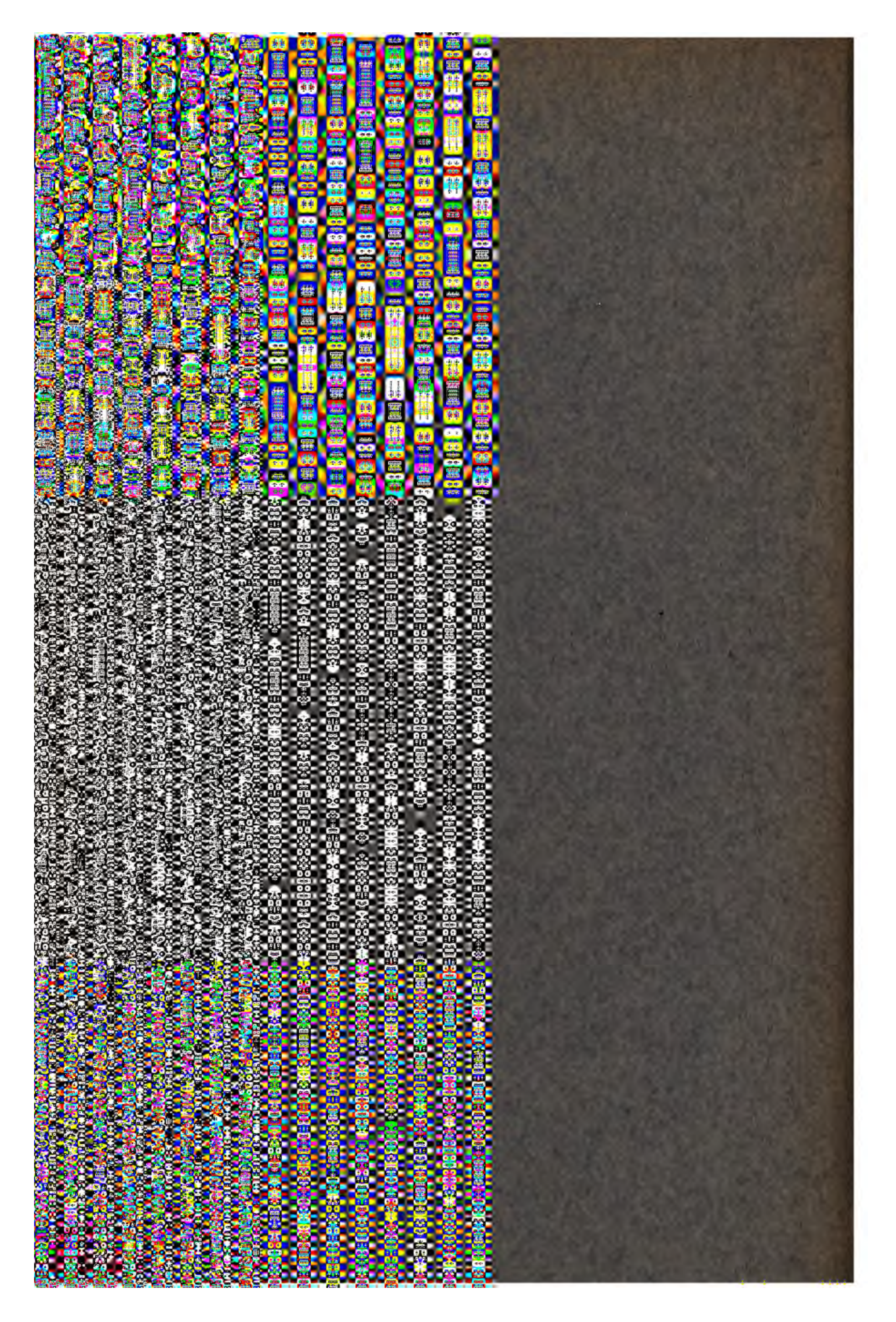
ion anglaise

D

ER

TIQUITÉ. — LES MA-
ET PENDANT LA
TIQUES MODERNES
NOTES COMPLÉMEN-

A. HERMANN
SUÈDE ET DE NORVÈGE
ONNE, 6



HISTOIRE

DES

MATHÉMATIQUES

HISTOIRE

DES

MATHÉMATIQUES

Gand, le 11 nov. '08
George Sarton

HISTOIRE

DES

MATHÉMATIQUES

PAR

W.-W. ROUSE BALL

Fellow and Tutor of Trinity College (Cambridge)

Édition française revue et augmentée

Traduite sur la troisième édition anglaise

PAR

L. FREUND

Lieutenant de vaisseau

TOME PREMIER

LES MATHÉMATIQUES DANS L'ANTIQUITÉ. — LES MATHÉMATIQUES AU MOYEN-AGE ET PENDANT LA RENAISSANCE. — LES MATHÉMATIQUES MODERNES DE DESCARTES A HUYGENS. — NOTES COMPLÉMENTAIRES.

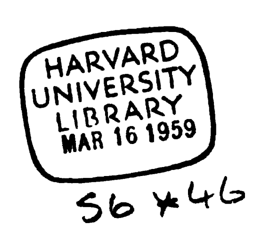
PARIS

LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE A. HERMANN

ÉDITEUR, LIBRAIRE DE S. M. LE ROI DE SUÈDE ET DE NORVÈGE

6, RUE DE LA SORBONNE, 6

1906


HARVARD
UNIVERSITY
LIBRARY
MAR 16 1959

PRÉFACE

Cet ouvrage a pour objet d'exposer le développement historique des Sciences Mathématiques, avec un aperçu de la vie et des découvertes des savants qui ont le plus contribué aux progrès de la science. Il peut servir d'introduction à un travail plus étendu, mais il a été composé pour donner un aperçu court et à la portée de tous, des principaux faits de l'histoire des Mathématiques, que beaucoup ne peuvent pas ou ne veulent pas étudier à fond, mais devraient cependant connaître.

La première édition reproduisait en substance quelques leçons que nous avions faites en 1888, avec l'intention de tracer de l'histoire antérieure au XIXe *siècle une esquisse accessible à quiconque possédait quelques éléments de mathématiques. Dans la seconde édition nous avons introduit beaucoup de matières nouvelles et remanié certaines parties. La nouvelle édition a été revue avec soin, mais ne présente pas de différences essentielles avec la deuxième édition.*

Pour se rendre compte de l'ordre que nous avons suivi dans notre exposition, il suffit de jeter un coup d'œil sur la table des matières.

Le chapitre premier contient un exposé succinct de nos connaissances actuelles sur l'état des Sciences Mathématiques chez les Egyptiens et les Phéniciens. C'est une introduction à l'histoire des Mathématiciens grecs.

Le reste de l'ouvrage est divisé en trois périodes : L'histoire des Mathématiques chez les Grecs ou sous l'influence grecque, chapitres II *à* VII *; les Mathématiques au Moyen âge et pendant la Renaissance, chapitres* VIII *à* XIII *; les Mathématiques dans les temps modernes, chapitres* XIV *à* XIX.

Nous nous sommes contenté de donner les faits principaux, passant fréquemment sous silence des noms, des travaux dont l'influence a été relativement moindre. Sans doute l'idée que l'on se fait ainsi des découvertes des mathématiciens dont nous citons les noms, peut être exagérée, par suite de l'omission des travaux des auteurs de moindre importance qui les ont précédés et qui leur ont préparé la route, mais c'est là un inconvénient qu'il est difficile d'éviter dans une exposition historique et nous avons fait notre possible pour l'atténuer en intercalant des remarques sur les progrès de la science aux différentes époques. Nous devons aussi faire observer, que d'une façon générale, nous n'avons mentionné les découvertes des Astronomes et des Physiciens qu'autant qu'un intérêt mathématique quelconque s'y rattachait.

Nous avons fait constamment usage de la notation moderne, le lecteur doit par conséquent se rappeler que, si nous ne changeons rien à la substance de la citation empruntée à tel ou tel écrivain, la démonstration est parfois traduite en un langage plus familier à nos lecteurs.

La plus grande partie de notre ouvrage a été empruntée aux ouvrages publiés antérieurement sur l'histoire des sciences mathématiques et à divers mémoires; en réalité, il ne peut en être autrement pour des travaux si nombreux et embrassant un si vaste champ d'investigations. Quand les autorités citées ne sont pas d'accord, nous n'avons généralement fait mention que de l'opinion paraissant présenter le plus de probabilité, et quand il s'agit d'une question importante nous croyons n'avoir jamais négligé d'indiquer les divergences d'opinion à son sujet.

Nous avons pensé qu'il était inutile de surcharger un exposé sommaire d'une masse de références détaillées ou de citer les autorités relatives à chaque fait particulier. Pour l'histoire antérieure à 1758, nous nous référons surtout à l'ouvrage si considérable de Cantor : Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik, 2e édition, Leipzig. B. G. Teubner, 1898-1903.

Mais nous avons en outre complété le texte par des notes donnant des références se rapportant à divers auteurs à qui nous avons fait des emprunts. Pour la période postérieure à 1758 il est nécessaire de consulter les mémoires originaux. Nous espérons

que nos notes fourniront les moyens d'étudier en détail l'histoire des mathématiques à une période quelconque, si le lecteur en éprouve le désir.

Nous devons des remerciements à nos amis et à nos correspondants qui ont appelé notre attention sur certains points des éditions antérieures et nous serons reconnaissant à tous nos lecteurs des additions ou corrections qu'ils voudront bien nous signaler.

W. W. ROUSE BALL.

Trinity College, Cambridge.

PRÉFACE DU TRADUCTEUR

L'ouvrage de Rouse Ball ne formait qu'un volume. Il nous a paru convenable de le compléter par des additions qui éclairent plusieurs points importants de l'histoire de la Science, et montrent la marche suivie par quelques savants illustres pour parvenir à leurs découvertes. Ces additions nous ont forcé à scinder en deux parties l'ouvrage de Rouse Ball. Le premier volume contient la traduction des quinze premiers chapitres, le deuxième qui débute à Newton contiendra la traduction des quatre derniers. Nous avons ainsi fait une scission factice dans l'ouvrage anglais pour donner une étendue à peu près égale aux deux volumes, les additions pour le deuxième volume étant plus considérables que pour le premier.

HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

CHAPITRE PREMIER

LES MATHÉMATIQUES CHEZ LES EGYPTIENS ET LES PHÉNICIENS

On ne peut remonter avec certitude dans l'histoire des mathématiques à aucune Ecole ou période antérieure à celle des Grecs Ioniens. Mais à dater de cette époque l'histoire peut se diviser en trois périodes présentant entre elles des distinctions suffisamment caractéristiques. La première période qui comprend l'histoire des mathématiques sous l'influence de la civilisation grecque est exposée dans les chapitres II à VII ; la seconde qui fait l'objet des chapitres VIII–XIII nous montre les mathématiques au Moyen-Age et pendant la Renaissance ; enfin, la troisième, ou période des temps modernes, est étudiée dans les chapitres XIV–XIX.

Bien que l'histoire des mathématiques ne commence qu'avec les Ecoles ioniennes, il est hors de doute que les philosophes grecs qui s'en occupèrent les premiers, furent guidés par les recherches antérieures des Egyptiens et des Phéniciens. Nos connaissances sur les notions mathématiques que pouvaient posséder ces peuples sont bien imparfaites et reposent en partie sur des conjectures, nous allons cependant les résumer brièvement ici. L'histoire basée sur des données certaines ne débute qu'au chapitre suivant.

Au sujet de cette partie de la science que nous pouvons qualifier de préhistorique nous ferons observer tout d'abord que si tous les

peuples primitifs qui ont laissé après eux des monuments avaient quelques notions sur la numération et la mécanique, et si la majorité d'entre eux possédait aussi les premiers éléments de l'arpentage, les règles qu'ils appliquaient étaient en général basées uniquement sur les résultats de l'observation et de l'expérience et, dans aucun cas, ne se déduisaient ou ne formaient partie intégrante d'une science quelconque. Dès lors, le fait que les diverses nations voisines de la Grèce ont atteint un très haut degré de civilisation ne prouve pas qu'elles aient étudié les mathématiques.

Les seuls peuples avec lesquels les Grecs de l'Asie-Mineure (et c'est avec ces derniers que notre histoire commence) eurent vraisemblablement des relations fréquentes, furent ceux qui habitaient la côte orientale de la Méditerranée, et la tradition grecque attribue uniformément le développement spécial de la géométrie aux Egyptiens et celui de la science des nombres, soit aux Egyptiens soit aux Phéniciens. Nous allons examiner successivement ces deux points.

En premier lieu occupons-nous de la science des *nombres*. Aussi loin que l'on peut remonter dans les connaissances des Phéniciens sur ce sujet, il est impossible d'émettre aucune hypothèse certaine. L'importance des transactions commerciales de Tyr et de Sidon eut pour effet de provoquer un développement considérable de l'arithmétique. On a trouvé à Babylone une table des valeurs numériques des carrés d'une série de nombres entiers consécutifs, ce qui semblerait indiquer que les propriétés des nombres furent étudiées. Suivant Strabon, les Tyriens s'intéressaient particulièrement à la science des nombres, à la navigation et à l'astronomie ; ils entretenaient, nous le savons, un commerce considérable avec leurs voisins et alliés les Chaldéens, et Böckh nous apprend qu'ils employaient régulièrement les poids et mesures en usage à Babylone. En fait, les Chaldéens, s'étaient certainement occupés d'arithmétique et de géométrie comme le montrent leurs calculs astronomiques, et quelle que fut l'étendue de leurs connaissances en arithmétique, il est à peu près certain que les Phéniciens les possédaient également, de même que, vraisemblablement, les connaissances de ces derniers, furent transmises aux Grecs. En résumé il semble probable que les premiers peuples de la Grèce firent de larges emprunts aux Phéniciens en ce qui con-

cerne l'arithmétique pratique ou l'art du calcul, et peut-être aussi, apprirent-ils par eux quelques propriétés des nombres. Il est bon de faire remarquer ici que Pythagore était phénicien ; et, suivant Hérodote, Thalès appartenait à la même race, mais ceci est plus douteux.

Mentionnons aussi que l'usage presque universel de l'abaque ou suan-pan permettait aux anciens d'effectuer aisément l'addition et la soustraction sans aucune connaissance d'arithmétique théorique. Ces instruments seront décrits plus loin dans le chapitre VII, il nous suffira de dire ici qu'ils donnaient un moyen concret de représenter un nombre dans le système décimal et qu'ils fournissaient les résultats d'une addition et d'une soustraction par un procédé purement mécanique. En y joignant un procédé permettant d'écrire le résultat, on avait tout ce qui était nécessaire pour les besoins de la pratique.

Nous sommes en mesure de parler avec plus de certitude de l'arithmétique des Egyptiens. On est parvenu à déchiffrer il y a environ trente ans un papyrus [1] hiératique faisant partie de la collection Rhind conservée au *British Museum*, et sa lecture a jeté une grande lumière sur leurs connaissances mathématiques. Le manuscrit a été écrit par un prêtre du nom de Ahmes à une époque qui, suivant les Egyptologistes remonterait à bien plus de mille ans avant J.-C. et l'on croit que c'est la copie corrigée d'un traité qui lui serait antérieur de plus d'un millier d'années. L'ouvrage est intitulé « Instructions pour connaître toutes les choses secrètes » et consiste en une collection de problèmes d'arithmétique et de géométrie ; les réponses sont données mais généralement sans l'indication des procédés au moyen desquels elles ont été obtenues. Il semble être un sommaire de règles et de questions familières aux prêtres.

La première partie traite de la réduction des fractions de la forme $\frac{2}{2n+1}$ en somme de fractions ayant toute l'unité pour numéra-

(1) Consulter *Ein mathemastisches Handbuch der alten Ægypter* par A. EISENLOHR, seconde édition, Leipzig, 1891 ; ainsi que CANTOR, chap. I, et « *A short History of Greek Mathematics* », par J. GOW, CAMBRIDGE, 1884, art. 12-14.

En dehors de ces autorités le papyrus a été discuté dans divers mémoires par L. RODET, A. FAVARO, V. BOBYNIN, et E. WEYR.

teur : par exemple Ahmes établit que $\frac{2}{29}$ est la somme de $\frac{1}{24}$, $\frac{1}{58}$, $\frac{1}{174}$ et $\frac{1}{232}$; que $\frac{2}{97}$ est la somme de $\frac{1}{56}$, $\frac{1}{679}$ et $\frac{1}{776}$.

Dans tous les exemples *n* est inférieur à 50. Il n'avait probablement aucune règle pour former les fractions composantes et les réponses données représentent les résultats réunis des expériences des auteurs qui le précédèrent ; il a cependant indiqué sa méthode dans un seul cas particulier car, après avoir avancé que $\frac{2}{3}$ est la somme de $\frac{1}{2}$ et de $\frac{1}{6}$ il ajoute que, par suite, les deux tiers d'un cinquième sont égaux à la somme de la moitié d'un cinquième et du sixième d'un cinquième, c'est-à-dire à $\frac{1}{10} + \frac{1}{30}$.

On peut expliquer qu'on ait attaché une telle importance aux fractions par ce fait que dans les temps anciens, leur application présentait de grandes difficultés. Les Egyptiens et les Grecs simplifiaient le problème en réduisant chaque fraction en une somme de plusieurs autres ayant toutes l'unité pour numérateur, de telle sorte qu'ils n'avaient à considérer que les divers dénominateurs : les fractions $\frac{2}{3}$ et $\frac{3}{4}$ faisaient seules exception à cette règle. Cette façon de procéder fut pratiquée chez les Grecs jusqu'au sixième siècle de notre ère. Les Romains de leur côté, conservaient généralement le dénominateur constant et égal à 12, et traduisaient (approximativement) chaque fraction en un certain nombre de douzièmes. Les Babyloniens firent la même chose en astronomie mais en employant soixante comme dénominateur constant, et c'est d'eux, avec les Grecs comme intermédiaires, que nous vient la division moderne du degré en soixante parties égales. Ainsi, soit d'une manière, soit d'une autre, on évitait la difficulté provenant du changement simultané du numérateur et du dénominateur.

Après avoir considéré les fractions, Ahmes continue par quelques exemples ayant trait aux opérations fondamentales de l'arithmétique. Pour la multiplication il semble avoir procédé par additions répétées. Ainsi dans un exemple numérique où il se propose de multiplier un certain nombre, soit *a*, par 13, il multiplie d'abord par 2, ce qui lui donne $2a$, puis il double le résultat et obtient ainsi $4a$, il double encore ce dernier résultat ce qui lui donne $8a$,

et enfin il additionne les trois nombres a, $4a$ et $8a$. La division était probablement aussi effectuée au moyen de soustractions successives, mais comme il donne rarement l'explication du procédé par lequel il est arrivé au résultat, on ne peut rien dire de certain à ce sujet. Après ces exemples, Ahmes expose la solution de quelques équations numériques simples. Il dit par exemple « inconnue [1], son septième, son tout, cela fait dix-neuf » ce qui signifie qu'il se propose de trouver un nombre tel qu'en y ajoutant son septième, on trouve dix-neuf comme somme, il donne comme réponse $16 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$, résultat exact.

La partie arithmétique du papyrus montre que l'auteur avait quelque idée du symbolisme algébrique. La quantité inconnue est toujours représentée par le symbole qui signifie un monceau, un tas ; l'addition est indiquée par une paire de jambes se déplaçant en avant, la soustraction par une paire de jambes se déplaçant en arrière ou encore par des flèches ; et l'égalité a pour signe $\lessdot$.

La dernière partie du livre contient divers problèmes de géométrie sur lesquels nous reviendrons plus loin. Il termine l'ouvrage par quelques questions arithmético-algébriques dont deux se rapportent aux progressions arithmétiques et semblent indiquer qu'il connaissait la manière de sommer ces séries.

Examinons en second lieu ce qui a trait à la *géométrie*. On suppose que cette science tire son origine des besoins de l'arpentage ; mais tandis qu'il est difficile de préciser quand l'étude des nombres et le calcul — dont une certaine connaissance est indispensable chez tout peuple civilisé — sont devenus ce qu'on peut appeler une science, il est facile, au contraire, d'établir une distinction entre les raisonnements abstraits de la géométrie et les règles pratiques de l'arpentage. Quelques méthodes d'arpentage doivent remonter à des temps très reculés, mais dans l'antiquité il était de tradition universelle que l'origine de la géométrie devait être cherchée en Egypte. Ce qui rend encore plus probable la supposition que cette science n'est pas originaire de la Grèce et a eu, comme point de départ, les nécessités de l'arpentage, est l'étymologie de son nom qui dérive de γῆ, terre, et de μετρέω, je mesure. Les géomètres grecs, autant qu'il nous est possible d'en juger par les ouvrages

(1) La quantité inconnue s'appelait *koutcha* ou *hau*.

qui nous restent, se sont toujours occupés de cette science au point de vue abstrait : ils cherchaient des théorèmes d'une exactitude absolue et (dans tous les cas, dans les temps historiques) ils auraient fait observer qu'en mesurant les quantités au moyen d'une unité qui pouvait être incommensurable avec quelques unes des grandeurs considérées, les résultats obtenus ne pouvaient être qu'une simple approximation. Le nom ne vient donc pas par conséquent de la façon dont ils opéraient dans la pratique. Il n'est pas invraisemblable cependant qu'il indique l'usage que faisaient de la géométrie les Egyptiens qui l'enseignèrent aux Grecs. Cette hypothèse concorde avec les traditions grecques qui semblent vraisemblables en elles-mêmes ; Hérodote raconte, en effet, que les inondations périodiques du Nil (qui emportaient les bornes limitant les terrains dans la vallée du fleuve et qui, en en modifiant le cours, augmentaient ou diminuaient la valeur vénale des terres avoisinantes) rendaient indispensable un système à peu près juste d'arpentage, et conduisirent, par suite, les prêtres à étudier systématiquement le sujet.

Nous n'avons aucune raison de croire que les Phéniciens ou les autres peuples voisins de l'Egypte se soient spécialement occupés de la géométrie. Un témoignage, de faible importance il est vrai, tendrait à prouver que l'attention des Juifs ne s'est pas beaucoup portée sur ce sujet : c'est l'erreur commise dans leurs livres sacrés (1) où l'on lit que la circonférence du cercle vaut trois fois son diamètre. Les Babyloniens (2) donnaient également à π la valeur 3.

En admettant donc que la connaissance de la géométrie eut été puisée par les Grecs chez les Egyptiens, nous devons rechercher l'étendue et la nature de cette science chez ce dernier peuple (3). Que certains résultats géométriques fussent connus à une date antérieure à l'ouvrage d'Ahmes ; cela nous semble évident si on admet (comme on a des raisons de le faire) que des siècles avant sa rédaction on employait la méthode suivante pour obtenir un angle droit en procédant à l'implantation sur le terrain de certaines construc-

(1) I. Les Rois, chap. VII, verset 23, et II. Les Chroniques, chap. IV, verset 2.

(2) Voir J. Oppert, Journal Asiatique, août 1872 et octobre 1874.

(3) Voir Eisenlohr ; Cantor, chap. II ; Gow, art, 75, 76 ; et *Die Geometrie der alten Ægypter*, par Weyr, *Wien*, 1884.

tions. Les Egyptiens étaient très exigeants en ce qui concerne l'orientation exacte de leurs temples et ils devaient par conséquent tracer soigneusement une ligne donnant la direction Nord-Sud, ainsi qu'une seconde ligne dans la direction Est-Ouest. Ils pouvaient obtenir la première en observant les points de l'horizon où une étoile se montrait et disparaissait et en déterminant la trace d'un plan à mi-chemin entre eux. Pour tracer la ligne Est-Ouest qui devait être perpendiculaire à la précédente on avait recours à certains praticiens exerçant la profession de « traceurs au cordeau ». Ces hommes employaient une corde ABCD divisée en B et C par des nœuds ou des marques spéciales de telle sorte que les longueurs AB, BC, CD étaient entre elles comme les trois nombres 3, 4, 5. La longueur BC une fois appliquée sur la ligne Nord-Sud, on fixait au moyen de chevilles P, Q les nœuds B et C. On tournait alors autour de la cheville P en tenant l'extrémité A de la corde BA (cette portion de la corde étant maintenue toujours tendue) ; on faisait la même chose avec le segment CD en tournant autour de la cheville Q.

On amenait ainsi en coïncidence les deux extrémités A et D et le point déterminé de cette manière sur le terrain était marqué par une troisième cheville R. Le résultat de cette opération était de former un triangle dont les côtés RP, PQ et QR étaient entre eux comme les nombres 3, 4, 5. L'angle en P de ce triangle étant droit, la ligne PR donnait la direction E-O. Les praticiens emploient encore constamment aujourd'hui une semblable méthode pour tracer un angle droit sur le terrain. La propriété employée peut se déduire comme cas particulier de la proposition 48 du livre I d'Euclide, et on a des raisons de penser que les Egyptiens étaient familiarisés avec les résultats de cette proposition et de la proposition 47 du même livre pour les triangles dont les côtés étaient entre eux dans le rapport mentionné ci-dessus. Il est à peu près certain qu'ils devaient également connaître l'exactitude de la dernière proposition pour les triangles rectangles isocèles, car le fait paraît évident si l'on considère un dallage constitué par des carreaux de cette forme. Mais bien que ce soit là des faits intéressants pour l'histoire des arts en Egypte, nous ne devons pas nous y arrêter plus longtemps pour montrer que la géométrie était alors étudiée comme une science. Notre réelle connaissance de la nature

de la géométrie égyptienne repose uniquement sur le papyrus de la collection Rhind.

Ahmes débute dans cette partie de son manuel en donnant quelques exemples numériques relatifs à la contenance des mesures pour les grains. Malheureusement nous ne savons pas quelle était la forme usuelle des mesures égyptiennes, mais là où il les définit par trois dimensions linéaires, telles que a, b, c, la réponse est toujours donnée comme s'il avait à former l'expression $a \times b \times \left(c + \frac{1}{2} c\right)$. Il s'occupe ensuite de la détermination des aires de certaines figures rectilignes, et si le texte a été convenablement interprété, quelques-uns des résultats obtenus sont erronés. Puis il continue en cherchant l'aire d'un champ circulaire de diamètre 12 — aucune unité de longueur n'étant spécifiée — et il donne comme résultat $\left(d - \frac{1}{9} d\right)^2$, d étant le diamètre du cercle. Cela revient à prendre 3,1604 pour la valeur de π, la valeur actuelle étant approximativement 3,1416. Enfin Ahmes donne quelques problèmes sur les pyramides. On fut longtemps sans pouvoir interpréter les résultats qu'il avait trouvés mais Cantor et Eisenlohr ont montré que le but que se proposait Ahmes était de trouver au moyen de données obtenues en mesurant les dimensions extérieures d'une pyramide, le rapport entre certaines autres dimensions qui ne pouvaient être mesurées directement : son procédé est équivalent à la détermination des rapports trigonométriques de certains angles. Les données et les résultats obtenus concordent exactement avec les dimensions de quelques-unes des pyramides existantes.

Il est à remarquer que tous les spécimens de géométrie égyptienne que nous possédons traitent seulement de quelques problèmes numériques particuliers et non de théorèmes généraux ; et même si un résultat est établi comme étant vrai dans tous les cas, cette généralisation n'est probablement que la conséquence d'une large induction. Nous verrons plus loin que la géométrie grecque fut déductive dès ses commencements. On a des raisons de penser que les progrès des Egyptiens en géométrie et en arithmétique furent faibles ou nuls après la date assignée à l'ouvrage de Ahmes, et bien que près de deux cents ans encore après Thalès, l'Egypte fut considérée par les Grecs comme une Ecole importante de mathé-

matiques, il semblerait que, presque depuis la fondation de l'Ecole Ionienne, ces derniers devancèrent leurs premiers maîtres.

Ajoutons que le livre d'Ahmes nous donne une idée des mathématiques en Egypte plus complète que celle que nous aurions pu nous former d'après les documents empruntés aux divers auteurs grecs et latins qui ont vécu des siècles après lui. Avant sa traduction on pensait généralement que ces documents exagéraient les connaissances que pouvaient posséder les Egyptiens, et sa découverte ne fait qu'augmenter la valeur qu'il faut attacher au témoignage de ces autorités. Nous ne connaissons rien relativement aux mathématiques appliquées (si même il s'en occupèrent) chez les Egyptiens et les Phéniciens. Les connaissances astronomiques des Egyptiens et des Chaldéens étaient, sans doute, importantes, bien qu'elles ne consistassent essentiellement qu'en résultats d'observations : on présente les Phéniciens comme s'étant bornés à étudier tout ce qui pouvait servir à la navigation. L'histoire de l'astronomie n'entre pas dans le cadre de cė livre.

Nous ne voulons pas terminer ce chapitre sans dire quelques mots des Chinois. A une certaine époque, en effet, on avait avancé que ce peuple avait, depuis près de trois mille ans, des connaissances étendues en arithmétique. géométrie, mécanique, optique et navigation, et quelques écrivains inclinaient à croire (attendu que rien, jusque là, n'était venu détruire cette hypothèse) que certaines parties de leur science s'étaient répandues à travers l'Asie vers l'Occident. Il est certain, qu'à une époque très reculée, les Chinois étaient en possession de quelques instruments géométriques ou plutôt servant à la construction, tels que la règle, l'équerre, le compas et le levier, et de quelques machines telle que le treuil ; ils connaissaient la propriété caractéristique de l'aiguille aimantée et savaient que les phénomènes astronomiques se reproduisent en cycles. Mais les minutieuses recherches de L. A. Sédillot [1] ont montré que les Chinois n'ont fait aucune tentative sérieuse pour

(1) Voir Boncompagni « *Bulletino di bibliographia e di storia delle Scienze matematiche e fisiche* » de mai 1868. Vol. I, p. 161-166 ou mieux à l'ouvrage original de Sédillot. Matériaux pour servir à l'histoire des sciences mathématiques et astronomiques chez les Grecs et les Orientaux. 2 vol. 1845-49.

Voir Cantor, chap. xxxi, pour les mathématiques chez les Chinois principalement à une date plus récente.

classifier ou développer les quelques règles d'arithmétique ou de géométrie qu'ils possédaient, ou pour expliquer les causes des phénomènes qu'ils avaient observés.

L'idée que les Chinois avaient fait considérablement progresser les mathématiques théoriques, est due, semble-t-il, à une méprise des missionnaires jésuites qui se rendirent en Chine dans le courant du seizième siècle. En premier lieu, ils commirent la faute de ne pas faire la distinction entre la science primitive des Chinois et les connaissances qu'ils leur reconnurent à leur arrivée ; ces dernières avaient été répandues par les ouvrages et l'enseignement des missionnaires Arabes ou Hindous qui étaient venus en Chine dans le courant du treizième siècle ou plus tard, et qui y introduisirent la connaissance de la trigonométrie sphérique. En second lieu, en constatant que l'un des plus importants ministères était connu sous le nom de « l'Administration des Mathématiques » ils supposèrent que ses attributions consistaient à favoriser et à diriger l'enseignement des mathématiques dans l'Empire. Ses fonctions étaient en réalité restreintes à la préparation d'une sorte d'almanach dont les dates et les prédictions servaient de règles à maintes affaires publiques et privées. Tous les exemplaires existants de ces almanachs sont défectueux et très incorrects.

Le seul théorème de géométrie dont on peut être certain que les Chinois connaissaient certains cas (à savoir les cas où les côtés sont entre eux comme les nombres 3, 4. 5 ou encore comme les nombres $1, 1, \sqrt{2}$) est que l'aire du carré construit sur l'hypothénuse d'un triangle rectangle est équivalente à la somme des aires des carrés construits sur les deux autres côtés. Ils ont pu aussi connaitre quelques autres théorèmes de géométrie pouvant se démontrer par la méthode quasi-expérimentale de la superposition. Dans leur arithmétique ils faisaient usage de la notation décimale mais leur savoir semble avoir été limité à l'art du calcul à l'aide du *suanpan* et au moyen d'exprimer les résultats par écrit. Dans tous les cas les connaissances des Chinois dans les temps anciens, sont encore supérieures à celles de beaucoup de leurs contemporains. Cette remarque vient à l'appui de cette constatation qu'une nation peut faire preuve d'une habileté remarquable dans les arts appliqués tout en ignorant les sciences sur lesquelles ces arts sont fondés.

On voit d'après l'aperçu qui précède que ce que nous savons des

connaissances mathématiques de ceux qui ont précédé les Grecs se réduit à peu de chose ; mais nous pouvons raisonnablement affirmer que les Grecs anciens avaient appris, l'usage de l'abaque pour les calculs pratiques, avaient des signes symboliques pour représenter les résultats obtenus et possédaient un bagage scientifique équivalent à celui que comporte le papyrus de Rhind. Il est probable que c'est là, en résumé, tout ce qu'ils ont emprunté aux autres races. Dans les six chapitres qui suivent, nous allons décrire le développement des mathématiques sous l'influence grecque.



PÉRIODE

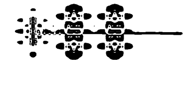
SOUS L'INFLUENCE
...ION GRECQUE

...seignement de Thalès, environ ... fin avec la prise d'Alexandrie ... rs 641 après Jésus-Christ. Le ... de est le développement de la géo-...

...mmencé le dernier chapitre en ... és mathématiques pouvait être ... celle des mathématiques sous ... ématiques au Moyen-Age et à ... athématiques pendant les temps

...ap. II, III, IV et V) se rapportent ... us l'influence grecque : il est ... l'Ecole Byzantine, puisque par ... thématiciens de la Grèce furent ... un dernier chapitre (chap. VII) ... furent définitivement remplacés

...rs des dates mentionnées dans ... vec certitude et ne doivent être



CHAPITRE II

LES ÉCOLES IONIENNE ET PYTHAGORICIENNE (1)

(D'ENVIRON — 600 A — 400)

Avec l'établissement des Ecoles Ionienne et Pythagoricienne nous abandonnons la période antique des recherches et les conjectures pour entrer dans le domaine éclairé de l'histoire. Cependant les matériaux dont nous disposons pour juger des connaissances de ces Ecoles quatre cents ans avant Jésus-Christ sont rares. Non seulement tous les traités de mathématiques datant de cette époque, à l'exception toutefois de quelques fragments, sont perdus, mais il ne nous reste aucune copie des histoires des mathématiques écrites respectivement vers — 325 par Eudème (qui était un élève d'Aristote) et Théophraste. Heureusement Proclus qui écrivit un commentaire des *Eléments* d'Euclide, connaissait l'histoire d'Eudème et a laissé un résumé de la partie de cet ouvrage ayant trait à la géométrie. Nous possédons aussi un fragment de l'ouvrage de Geminus « *Enarrationes Geometricæ* » écrit vers l'année — 50, sorte d'aperçu historique dans lequel les méthodes de démonstration employées par les premiers géomètres grecs sont comparées avec celles en usage à une époque moins reculée. En dehors de ces renseignements géné-

(1) L'histoire de ces Ecoles est traitée par CANTOR, chap. V-VIII ; par G. J. ALLMAN dans « *Greek geometry from Thales to Euclid* » Dublin, 1889 ; par J. Gow dans son ouvrage « *Greek Mathematics* », Cambridge, 1884 ; par C. A. BRETSCHNEIDER dans « *Die Geometrie und die Geometer vor Eukleides* », Leipzig 1870 ; et particulièrement par H. HANKEL dans son ouvrage posthume « *Geschichte der Mathematik* », Leipzig 1874. Voir aussi *Le Scienze esatte nell' antica Grecia*, Modène, 1893-1900 par le professeur G. LORIA.

[illegible] de quelques-uns des principaux [illegible] éparses dans divers auteurs, [illegible] et aux œuvres des autres. [illegible] examinées et discutées tout au [illegible] fait mention dans la note qui se [illegible]

[illegible] IONIENNE

[illegible] la plus ancienne école grecque [illegible] losophique, fut *Thalès* un des [illegible] vers — 640 et mort dans la [illegible] ments dont nous disposons pour [illegible] guère qu'en quelques anecdotes [illegible]

[illegible] son existence Thalès s'occupa, [illegible] d'affaires publiques, et, à en juger [illegible] t parvenues, il était alors aussi [illegible] aires et par les ressources de son [illegible] omme mathématicien.

[illegible] transporter du sel par des mulets, [illegible] n ruisseau dont l'eau fit fondre [illegible] ait. La bête ressentant la diminu- [illegible] npressa de se rouler de nouveau [illegible] tré. Pour mettre fin à ce manège [illegible] ges qui en se mouillant au mo- [illegible] u augmentèrent sensiblement de [illegible] e de recommencer.

[illegible], Thalès ayant prévu une récolte [illegible] lives, fit louer à son compte tous [illegible] caparement d'un genre spécial lui [illegible] our la location des appareils et [illegible] fice.

[illegible] pocryphes, mais il est certain que

[illegible] hap. I.

Thalès devait avoir une grande réputation aussi bien comme homme entendu dans les affaires que comme bon ingénieur puisqu'on le voit chargé de construire une levée pour détourner le cours d'une rivière et pour permettre l'établissement d'un gué.

Ce fut probablement comme marchand que Thalès vint pour la première fois en Egypte, mais il profita de ses loisirs durant son séjour dans cette contrée pour étudier l'astronomie et la géométrie. De retour à Milet dans la force de l'âge, il semble avoir abandonné alors les affaires et la vie publique pour se consacrer entièrement à l'étude de la philosophie et de la science — sujets qui étaient étroitement liés dans les Ecoles Ionienne et Pythagoricienne et peut être aussi dans les Ecoles Athéniennes —. Il demeura à Milet jusqu'à sa mort qui survint vers — 550.

Nous ne pouvons nous former aucune idée exacte de la façon dont Thalès présentait son enseignement de la Géométrie : on pense cependant, d'après Proclus, qu'il consistait en un certain nombre de propositions isolées ne présentant aucune suite logique, mais dont les démonstrations étaient déductives, de telle sorte que ses théorèmes ne se réduisaient pas à la simple énonciation d'une propriété déduite de la concordance d'un certain nombre d'exemples spéciaux, comme le faisaient probablement les géomètres Egyptiens. Le caractère déductif qu'il donna ainsi à la science constitue son principal mérite.

Voici les quelques propositions qu'on peut probablement lui attribuer :

1° Les angles à la base d'un triangle isocèle sont égaux (Euc. Livre I, prop. 5).

Proclus semble dire que ce théorème se démontrait en prenant un autre triangle isocèle exactement égal au premier que l'on appliquait, sur ce premier, après retournement ; c'était une sorte de démonstration expérimentale.

2° Si deux lignes droites se coupent, les angles opposés par le sommet sont égaux (Euc. I, 15).

Thalès peut avoir considéré cette proposition comme évidente, car Proclus ajoute qu'Euclide est le premier qui en ait donné une démonstration.

3° Un triangle est déterminé lorsque sa base et les angles à la base sont donnés (c. f. Euc. I, 26).

Selon toute apparence on se servait de ce problème pour fixer la position d'un vaisseau en mer, la base étant la hauteur d'une tour et les angles adjacents étant déterminés par l'observation directe.

4° Les côtés des triangles équiangles sont proportionnels (Euc. VI, 4 ou peut être mieux, VI. 2).

On prétend que Thalès fit une application de cette proposition en Egypte pour trouver la hauteur d'une pyramide.

Dans un dialogue de Plutarque, l'orateur s'adressant à Thalès s'exprime ainsi : « en plaçant votre bâton à l'extrémité de l'ombre de la pyramide vous formiez avec les rayons du soleil deux triangles, ce qui prouvait que la pyramide [1] était au bâton [2] comme l'ombre de la pyramide à l'ombre du bâton ».

On raconte que le roi Amasis qui était présent fut surpris de cette application de la science abstraite ; il en résulterait que les Egyptiens ne connaissaient pas ce théorème.

5° Tout diamètre divise un cercle en deux parties égales. Cet énoncé est peut-être de Thalès mais la propriété devait être connue comme un fait évident depuis les temps les plus reculés.

6° L'angle sous-tendu par le diamètre d'un cercle en un point quelconque de la circonférence est un angle droit (Euc. III, 31).

Cette proposition paraît avoir été regardée comme la plus remarquable de toute l'œuvre géométrique de Thalès et, d'après la tradition, il remercia les Dieux immortels de cette découverte en leur sacrifiant un bœuf. On suppose qu'il démontrait ce théorème en joignant le centre du cercle au sommet de l'angle droit, décomposant ainsi le grand triangle en deux triangles isocèles auxquels il appliquait la proposition 1, ci-dessus. Si la démonstration était réellement présentée ainsi, il devait savoir que la somme des angles d'un triangle rectangle vaut deux angles droits.

La forme des carreaux employés pour le dallage du sol des pièces peut avoir fourni une démonstration expérimentale du dernier résultat énoncé, à savoir que la somme des angles d'un triangle est égale à deux angles droits. Il n'y a là rien d'invraisemblable car nous savons, d'après Eudème, que les premiers géomètres démontraient la propriété générale séparément pour trois sortes de trian-

(1) La hauteur de la Pyramide.

(2) A la longueur du bâton.

gles. On peut assembler autour d'un point sur un plan, et sans qu'il reste de vide, six triangles équilatéraux ou six carreaux de cette forme, par suite la proposition est vraie pour le triangle équilatéral. On peut encore juxtaposer deux triangles rectangles égaux de façon à former un rectangle, c'est-à-dire une figure dont la somme des angles vaut quatre droits, donc la proposition s'applique aux triangles rectangles, et il faut noter que deux carreaux ayant cette forme donneraient une démonstration expérimentale de ce second cas. Il paraîtrait que cette preuve ne fut présentée tout d'abord que pour le cas des triangles rectangles isocèles, mais il est probable qu'on l'appliqua plus tard à un triangle rectangle quelconque. Enfin tout triangle peut être décomposé en une somme de deux triangles rectangles en abaissant une perpendiculaire du sommet de l'angle le plus grand sur le côté opposé, et par suite, la proposition est vraie d'une façon générale. La première démonstration est évidemment comprise dans la dernière, mais il n'y a rien d'invraisemblable à ce que les anciens géomètres grecs aient continué à enseigner la première proposition sous la forme énoncée plus haut.

Thalès écrivit un traité d'astronomie et, parmi ses contemporains, il était plus renommé comme astronome que comme géomètre. On raconte qu'il se promenait une nuit tellement absorbé dans la contemplation des étoiles qu'il ne fit pas attention à un fossé dans lequel il tomba ; sur ce, une vieille femme, qui était présente, de s'écrier : « comment pouvez-vous nous apprendre ce qui se passe dans le ciel quand vous ne voyez même pas ce qui se trouve à vos pieds ».

Cette anecdote a été souvent reproduite pour montrer combien les philosophes sont peu pratiques.

Sans entrer dans des détails sur les connaissances de Thalès en astronomie, nous pouvons dire qu'il pensait que la durée de l'année était d'environ 365 jours et non (comme on rapporte qu'elle avait été primitivement calculée) de douze mois de chacun trente jours. D'après la tradition, ses prédécesseurs intercalaient occasionnellement un mois pour conserver aux saisons leurs places réelles, et s'il en est ainsi, ils devaient penser que l'année comptait en moyenne plus de 360 jours.

Suivant des critiques récents, il pensait que la terre était un

plus probable qu'il connaissait
iqua les causes des éclipses du
oriété qu'il annonça une éclipse
à peu près à l'époque fixée : la
nt Jésus-Christ ou peut-être le
rist. Mais bien que cette prophé-
à son enseignement un prestige
mmer l'un des sept Sages de la
qu'il fit simplement usage pour
dressées par les Egyptiens ou
les éclipses solaires devaient se
urs.

ent *Anaximandre, Mamercus et*
nous ne savons pour ainsi dire
nu ; il naquit en — 611 et prit
de l'Ecole de Milet ; il mourut

aité de géométrie dans lequel il
vant la tradition, des propriétés
ent insisté sur les idées philoso-
de l'infini dans l'espace et dans
terrestres et célestes.

dre introduisit en Grèce l'usage
l'instrument consistait simple-
alement au milieu d'un terrain
me comme cadran solaire, il était
s cercles concentriques de telle
l'extrémité de l'ombre du style
a trouvé à Pompeï et à Tuscu-
nstruits. Il se serait servi, dit-on,
r sa méridienne (en marquant,
re projetées par le style le même
leil, et en traçant le plan bissec-
s l'observation des époques de
di était la plus grande et la plus
prenant alors la demi-somme
x deux solstices, il déterminait
rizon (qui lui donnait la latitude

du lieu d'observation), et en prenant la demi-différence des mêmes altitudes, il obtenait l'inclinaison de l'écliptique sur l'équateur. On a des raisons sérieuses de croire qu'il détermina effectivement la latitude de Sparte, mais quant à affirmer qu'il fit réellement les autres opérations astronomiques dont nous venons de parler, la question est plus douteuse.

Il est inutile de nous arrêter plus longtemps ici sur les successeurs de Thalès. L'Ecole qu'il avait fondée continua à prospérer jusqu'environ — 400, mais avec le temps, ses membres s'occupèrent de plus en plus de philosophie et négligèrent les mathématiques. Nous savons très peu de chose sur les mathématiciens qui en sortirent, mais ils semblent s'être particulièrement intéressés à l'astronomie. Ils contribuèrent fort peu au développement ultérieur des mathématiques en Grèce qui se produisit presqu'entièrement sous l'influence des Pythagoriciens ; non seulement ces derniers donnèrent une extension considérable à la science géométrique, mais encore ils créèrent la science des nombres.

Si Thalès fut le premier qui sut attirer l'attention générale sur la géométrie, c'est, suivant Proclus qui cite d'après Eudème, Pythagore qui « transforma l'étude de la géométrie dont il fit un enseignement libéral, car il remonta aux principes supérieurs et rechercha les problèmes abstraitement et par l'intelligence pure ».

C'est en conséquence sur Pythagore que nous allons maintenant porter notre attention.

L'ÉCOLE PYTHAGORICIENNE

Pythagore (1). — Pythagore naquit à Samos vers l'an — 569 de parents probablements tyriens, et mourut en — 500. Il a donc été contemporain de Thalès. Les renseignements que l'on possède

(1) Voir Cantor, chap. vi, vii ; Allman, chap. ii ; Hankel, pp. 92-111 ; Hoefer, *Histoire des mathématiques*, Paris, 4e édit. 1895, pp. 87-130 ; et diverses notes de P. Tannery.

Pour un récit de la vie de Pythagore comprenant les traditions pythagoriciennes, voir sa biographie par Jamblique dont il existe deux ou trois traductions anglaises.

[illegible] d'incertitude, mais l'exposé que [illegible]ns-nous, exact en substance. Il [illegible] Syros, et ensuite avec Anaxi-[illegible]dre à Thèbes. Il passa quelques [illegible]emphis. En quittant l'Egypte il [illegible]lit à Samos où il créa des cours [illegible]529 il émigra en Sicile avec sa [illegible] semblent lui avoir procuré ses [illegible]nsuite à Tarente, mais il partit [illegible] colonie dorienne dans le sud de [illegible] tarda pas à être encombrée par [illegible]urs de tous rangs et particulière-[illegible] supérieure, venaient l'écouter; [illegible]ne loi qui leur interdisait de se [illegible]nces et accouraient en foule pour [illegible] les plus attentives se trouvait [illegible]on hôte Milo, avec laquelle il se [illegible]roportion d'âge : elle écrivit une [illegible]eureusement est perdue.

[illegible] philosophe et un moraliste reli-[illegible]s il faisait précéder son enseigne-[illegible] l'étude des mathématiques qui [illegible] ceux qui suivaient ses leçons en [illegible] *mathématiciens*. En général, un [illegible]ut de trois ans et faire partie de la [illegible]n confiait les principales décou-[illegible]formant à l'usage moderne nous [illegible]s pour désigner seulement ceux [illegible]é.

[illegible] une confrérie dont les membres [illegible]mmun, les mêmes croyances phi-[illegible] même but et s'engageaient par [illegible]enseignement ou des secrets de [illegible]

[illegible], leur discipline sévère et leur [illegible] façon à développer chez eux le [illegible]ureté et l'obéissance. Ils se le-[illegible]nçaient par rappeler les événe-

ments de la journée précédente ; ils se traçaient ensuite un programme pour la journée qui s'ouvrait, et enfin en se retirant pour le repos du soir ils étaient tenus de comparer leurs actes avec le plan imposé.

L'un des symboles qu'ils employaient pour se reconnaître était le pentagramme appelé aussi quelquefois le triple triangle — τὸ τριπλοῦν τρίγωνον.

Le pentagramme qui est tout simplement un pentagone régulier étoilé était considéré comme symbolisant la santé, et les sommets étaient probablement désignés par les lettres du mot ὑγίεια, la diphtongue ει étant remplacée par un θ. Notons que la figure consiste en une simple ligne brisée à laquelle on attribuait une certaine importance mystique (1).

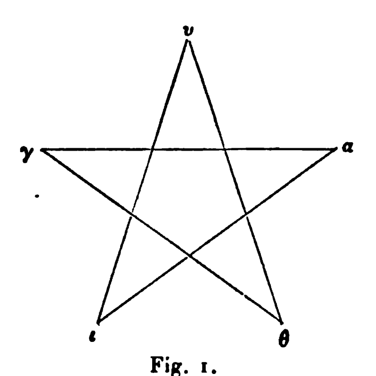


Fig. 1.

Jamblique, à qui nous devons la révélation de ce symbole, raconte qu'un Pythagoricien étant en voyage, tomba malade dans une auberge où il s'était arrêté pour passer la nuit ; il était pauvre et fatigué, mais l'aubergiste, homme compatissant, le soigna charitablement et fit tout ce qui dépendait de lui pour le ramener à la santé. Cependant, en dépit de ses soins, l'état du malade empirait. Comprenant qu'il allait mourir et ne pouvant payer à l'aubergiste ce qu'il lui devait, le Pythagoricien demanda alors une tablette sur laquelle il traça la fameuse étoile symbolique ; puis, la présentant à son hôte il le pria de la suspendre à l'extérieur de façon que tous les passants pussent la voir, en l'assurant qu'un jour ou l'autre sa charité serait récompensée. L'étudiant mourut, fut enterré convenablement et la tablette exposée comme il l'avait demandé.

Un long intervalle de temps s'était déjà écoulé lorsqu'un jour le symbole sacré attira l'attention d'un voyageur qui passait devant l'auberge ; mettant pied à terre il entra dans l'établissement et

(1) Au sujet de la théorie de ces figures on peut consulter nos « Récréations mathématiques » Paris. Hermann. 1899.

après avoir entendu le récit de l'hôtelier le récompensa généreusement.

Telle est l'anecdote de Jamblique et il faut reconnaître que si elle n'est pas vraie, elle est tout au moins intéressante.

La majeure partie de ceux qui suivaient les leçons de Pythagore se composait seulement « d'auditeurs » mais sa philosophie devait servir de guide à ses disciples dans leur existence, soit politique, soit sociale. En recommandant l'empire sur soi-même, en réclamant la direction des affaires pour les hommes les plus capables de l'Etat, l'obéissance absolue aux autorités légalement constituées, en faisant appel aux éternels principes des peines et des récompenses, il avait en vue une société totalement différente de celle de son époque constituée par le parti démocratique, et par suite, naturellement la plupart des membres de la confrérie appartenait à l'aristocratie.

L'association avait également des membres affiliés dans beaucoup de villes voisines et par son organisation spéciale et sa discipline rigoureuse elle possédait un grand pouvoir politique ; mais de même que toutes les sociétés secrètes, elle était un objet de suspicion pour tous ceux qui n'en faisaient pas partie.

Les Pythagoriciens furent tout puissants pendant un court intervalle de temps ; en — 501 une révolte populaire renversa le gouvernement et au milieu des émeutes qui accompagnèrent l'insurrection, la populace incendia la maison de Milo (où vivaient les étudiants) et mit à mort un grand nombre des membres les plus marquants de l'Ecole. Pythagore lui-même se réfugia à Tarente, puis de là à Métaponte où il fut tué en — 500 dans une autre révolte populaire.

Bien que privés de leur chef et brisés comme société politique, les Pythagoriciens semblent cependant s'être reconstitués à la fois comme société philosophique et mathématique avec Tarente comme centre de réunion. Ils continuèrent à prospérer pendant cent ou cent cinquante ans après la mort de leur fondateur, mais jusqu'à la fin, leur société demeura secrète et nous ignorons, par conséquent, les détails de leur histoire.

Pythagore lui-même, ne permettait pas l'usage des manuels ; le principe de l'Ecole était que non seulement toutes les connaissances devaient être considérées comme acquises en commun et dissimu-

lées aux étrangers, mais que, de plus, la gloire de toute découverte devait revenir à leur fondateur. Aussi Hippasus (vers — 470) fut, dit-on, noyé parce qu'il avait violé son serment en se vantant publiquement d'avoir ajouté le dodécaèdre au nombre des solides réguliers énumérés par Pythagore. Plus tard cependant, et lorsque les membres de la Société furent dispersés, cette règle du silence tomba en désuétude et des traités parurent qui contenaient la substance de leur enseignement et de leur doctrine. Le premier livre de ce genre fut composé vers — 370 par Philolaus et l'on prétend que Platon s'en procura une copie. Nous pouvons ajouter que dans la première partie du ve siècle avant Jésus-Christ, les Pythagoriciens étaient, par leur savoir, considérablement en avance sur leurs contemporains, mais vers la fin de cette période leurs découvertes les plus importantes et leurs doctrines se répandirent partout du monde extérieur, et Athènes devint le centre de l'activité intellectuelle.

Bien qu'il soit impossible de séparer nettement les découvertes revenant personnellement à Pythagore de celles plus récentes de son Ecole, nous savons, d'après Proclus, que c'est à lui que la géométrie doit ce caractère rigoureux de déduction qui la distingue encore et qu'il en fit le fondement d'une instruction libérale ; on a d'ailleurs des raisons de croire que c'est encore lui qui le premier sut disposer les propositions principales de la géométrie dans un ordre logique.

Suivant Aristoxène, l'Ecole se glorifiait d'avoir élevé l'enseignement de l'arithmétique au-dessus des besoins du commerce. Les Pythagoriciens se vantaient, en effet, de chercher à acquérir non la fortune, mais des connaissances nouvelles, ce qui, dans leur langage se traduisait par cette maxime « une figure et un pas en avant, non un chiffre pour gagner trois oboles ».

Pythagore était un réformateur moraliste et un philosophe, mais son système de morale et de philosophie était établi sur des bases mathématiques. En géométrie il connaissait probablement et enseignait ce que renferment en substance les deux premiers livres d'Euclide ; il devait également posséder quelques théorèmes isolés sur les grandeurs irrationnelles (ses successeurs trouvèrent plusieurs des propositions des 6e et 11e livres d'Euclide), mais on croit que beaucoup de ses démonstrations manquaient de rigueur, et en par-

[illegible] théorèmes étaient parfois admises [illegible] lement faire que des conjectures [illegible] qui pouvaient être basées sur ces [illegible]

[illegible] son enseignement portait sur [illegible] èmes relatifs respectivement aux [illegible] rts et proportions, aux facteurs [illegible] iques ; mais la plupart de ses re- [illegible] iculier, sur les nombres polygo- [illegible] raitées par des méthodes géomé- [illegible]

[illegible] ndispensable pour arriver à une [illegible] hagore pensait que, jusqu'à un [illegible] t la cause de la forme et il ensei- [illegible] ience des nombres renfermait le [illegible] ers.

[illegible] pinion en découvrant que la note [illegible] dépendait seulement (toutes les [illegible] les mêmes) de la longueur de la [illegible] longueurs fournissant une note, [illegible] entre elles comme les nombres [illegible] musicale. C'est peut-être ce qui [illegible] cupait une si grande place dans [illegible] sait également que les distances [illegible] nt représentées par des nombres [illegible] s corps célestes dans leur mouve- [illegible] ent des sons harmonieux, d'où la [illegible] s ». Si, comme on l'a avancé, il [illegible] ntales de la cristallographie, il [illegible] irmant ses vues d'une façon encore [illegible]

[illegible] mbres comme la base de sa philo- [illegible] es propriétés aux nombres et aux [illegible] ple, le nombre cinq symbolisait [illegible] t se trouver dans la pyramide ; un [illegible] trade qui représentait la matière [illegible] nents primaires : le feu, l'air, la [illegible] e tétrade comme le pentagramme

était un symbole sacré et les initiés faisaient ce serment ναὶ μὰ τὸν ἁμετέρᾳ ψυχᾷ παραδόντα τετρακτὺν πάγαν ἀεννάου φύσεως... (1).

Les Pythagoriciens commencèrent par diviser les sujets mathématiques dont ils s'occupaient en quatre sections : les nombres absolus ou l'arithmétique ; les nombres appliqués ou la musique ; les grandeurs à l'état de repos ou la géométrie, les grandeurs en mouvement ou l'astronomie.

Pendant longtemps ce « quadrivium » fut considéré comme constituant un cours d'étude nécessaire et suffisant pour une instruction libérale. Même dans le cas de la géométrie et de l'arithmétique (qui sont cependant basées sur des conclusions déduites d'une façon inconsciente et par tous les hommes) l'exposition faite par les Pythagoriciens était mélangée de philosophie, et il est hors de doute que leur enseignement des sciences astronomique, mécanique et musicale (qui incontestablement peuvent reposer uniquement sur les résultats d'observations consciencieuses et d'expériences) était entremêlé encore plus étroitement d'une métaphysique obscure. Nous ne nous occuperons pas plus longtemps des idées philosophiques de Pythagore, auxquelles nous n'aurions même pas fait allusion, si la tradition pythagoricienne de l'existence d'un lien entre la philosophie et les mathématiques, n'expliquait la malheureuse tendance des Grecs à fonder l'étude de la nature sur des conjectures philosophiques et non sur des observations expérimentales. Quant aux recherches pythagoriciennes sur les parties du « Quadrivium » concernant les applications nous savons peu de chose et nous nous limiterons ici à l'examen de leur enseignement géométrique et arithmétique.

En premier lieu, en ce qui concerne la géométrie, nous ne pouvons bien entendu reproduire l'ensemble de l'enseignement pythagoricien, mais il résulte des notes de Proclus sur Euclide et de quelques remarques éparses dans d'autres ouvrages qu'il possédait les propositions suivantes dont beaucoup ont rapport à la géométrie des aires.

1° Il débutait par un certain nombre de définitions qui, probablement, étaient plutôt un exposé reliant les idées mathématiques avec sa philosophie, qu'une explication des termes employés. On

(1) Oui, je le jure! par celui qui a donné à notre âme le tetractys, la source ou racine de l'éternelle nature.

a conservé celle du point qu'il présente comme une unité ayant une position.

2° Il démontrait que la somme des angles d'un triangle vaut deux angles droits (Euc. I, 32), et dans sa démonstration, qui nous est parvenue, il est fait mention des résultats de la proposition 13, du livre I, d'Euclide et de la première partie de la proposition 29 du même livre. La démonstration est en substance la même que celle qu'on lit dans Euclide et il est très vraisemblable que les démonstrations présentées par Euclide des deux dernières propositions que nous venons de mentionner sont également dues à Pythagore.

3° Pythagore a certainement démontré les propriétés des triangles rectangles faisant l'objet des propositions 47 et 48 du livre I d'Euclide. On sait que les démonstrations de ces propositions données dans les éléments d'Euclide sont dues réellement à ce grand géomètre et on a fait bien des tentatives pour essayer de reconstituer la démonstration du premier de ces théorèmes telle qu'elle a été présentée originairement par Pythagore. Elle peut fort probablement avoir été l'une des deux suivantes ([1]).

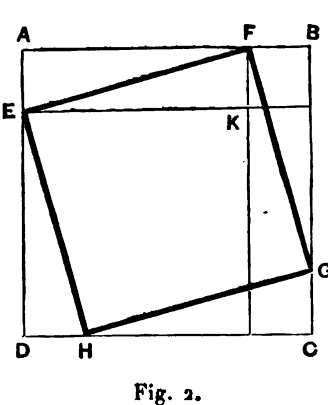


Fig. 2.

a) Tout carré ABCD peut être décomposé comme dans la proposition 4 du livre II d'Euclide, en deux carrés BK et DK et en deux rectangles égaux AK et CK. Ceci revient à dire que le carré ABCD est équivalent aux carrés construits sur FK et sur EK et à quatre fois le triangle AEF. Mais si l'on prend sur les côtés BC, CD et DA les points G, H, E tels que l'on ait :

$$BG = CH = DE = AF,$$

on démontre facilement que la figure EFGH est un carré et que

([1]) Une collection d'environ 30 démonstrations de la proposition 47 du livre I d'Euclide a été publiée dans *Der Pythagorische Lehrsatz* par Joh. Jos. Ign. Hoffmann, seconde édition. Mainz, 1821.

les triangles AEF, BFG, CGH et DHE sont égaux. Le carré ABCD est donc encore équivalent au carré construit sur EF et à quatre fois le triangle AEF.

Par suite le carré construit sur EF est équivalent à la somme des carrés construits sur EK et FK.

b) Soit ABC un triangle rectangle dont A est l'angle droit. Traçons la hauteur AD.

Les triangles ABC et DBA étant semblables, on a :

$$\frac{BC}{AB} = \frac{AB}{BD}.$$

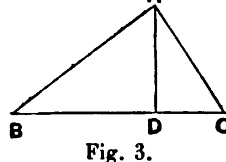


Fig. 3.

De même, les triangles semblables ABC, ADC donnent la proportion

$$\frac{BC}{AC} = \frac{AC}{DC}.$$

De ces deux proportions on déduit :

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = BC.\ BD + BC.\ DC = BC\ (BD + DC) = \overline{BC}^2.$$

Cette démonstration exige la connaissance des propositions II, 2 ; VI, 4 et VI, 17 d'Euclide, que Pythagore possédait.

4° On attribue également à Pythagore la découverte des théorèmes 44 et 45 du livre I des Eléments d'Euclide, et il aurait donné, dit-on, une solution du problème 14 du livre II des mêmes éléments. On raconte qu'en trouvant la construction nécessaire pour arriver à la solution de cette dernière question, il fit aux Dieux le sacrifice d'un bœuf, mais comme l'Ecole avait tout en commun, la libéralité n'est pas aussi grande qu'on pourrait le croire *à priori*. Les Pythagoriciens d'une époque plus moderne avaient connaissance de l'extension donnée dans Euclide à la prosition 25 du livre VI, et Allman pense que Pythagore lui-même ne l'ignorait pas, mais ceci doit être regardé comme douteux. Il faut remarquer que la proposition 14 du livre II d'Euclide fournit une solution géométrique de l'équation

$$x^2 = ab.$$

5° Pythagore montra que sur un plan la surface autour d'un

point pouvait être couverte par des triangles équilatéraux, des carrés ou des hexagones réguliers. Observations qui ont dû être faites partout où il était d'usage d'employer des carreaux de cette forme.

6° Les Pythagoriciens auraient également trouvé, dit-on, la quadrature du cercle qui était pour eux la plus parfaite de toutes les figures planes.

7° Ils connaissaient l'existence de cinq corps solides réguliers inscriptibles dans la sphère qu'ils considéraient comme le plus beau de tous les solides.

8° Il semblerait d'après leur phraséologie dans la science des nombres et d'après quelques autres remarques faites occasionnellement qu'ils étaient familiers avec les méthodes employées dans les 2e et 5e livres des Eléments d'Euclide et qu'ils avaient la notion des grandeurs irrationnelles. On a, en particulier, des raisons de croire que Pythagore démontra l'incommensurabilité du côté du carré avec sa diagonale et que ce fut cette découverte qui conduisit les Grecs à exclure de leur géométrie les conceptions du nombre et de la mesure. Nous y revindrons un peu plus loin.

Passons en second lieu à la théorie des nombres (1).

Nous avons déjà fait remarquer à ce sujet que les Pythagoriciens s'étaient principalement occupés : 1° des nombres polygonaux ; 2° des facteurs des nombres ; 3° des nombres en proportion, et 4° des séries numériques.

Pythagore commence par diviser les nombres en pairs et impairs ; ces derniers étant appelés *gnomons*. Un nombre impair tel que $2n+1$ était regardé comme la différence de deux carrés $(n+1)^2$ et n^2 ; et il montre que la somme des gnomons de 1 à $2n+1$ est égale à un nombre carré, à $(n+1)^2$, dont il appelle la racine carrée un *côté*. Le produit de deux nombres était un *plan*, et si le produit n'avait pas une racine carrée exacte on l'appelait un *oblong*. Le produit de trois nombres était connu sous le nom de *solide* ou de *cube* dans le cas d'égalité des trois nombres.

Toutes ces dénominations ont des rapports évidents avec la

(1) Voir l'appendice à *La Science Hellène* de P. Tannery. Paris 1897. *Sur l'Arithmétique pythagoricienne.*

géométrie, et une remarque d'Aristote confirme cette opinion que lorsqu'on dispose un gnomon autour d'un carré, la figure reste un carré bien que ses dimensions soient augmentées. Ainsi, dans la figure ci-contre, dans laquelle $n = 5$, le gnomon AKC (contenant 11 petits carrés) placé autour du carré AC (qui en contient 5^2) forme un nouveau carré HL (contenant 6^2 petits carrés). Il est possible que plusieurs des théorèmes numériques dus aux écrivains grecs aient été découverts et prouvés par une méthode semblable : l'abaque peut être utilisé pour beaucoup de ces démonstrations.

Les nombres $(2n^2 + 2n + 1)$, $(2n^2 + 2n)$ et $(2n + 1)$ jouissaient d'une importance spéciale comme représentant l'hypothénuse et les deux côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle : Cantor pense que Pythagore connaissait cette propriété avant la découverte de la proposition 47 du livre I d'Euclide. Les expressions

$$(m^2 + n^2),\ 2mn \quad \text{et} \quad (m^2 - n^2)$$

sont plus générales et on remarquera qu'on peut en déduire les résultats obtenus par Pythagore en faisant $m = n + 1$. A une époque plus récente Archytas et Platon donnèrent dans le même but des règles qui reviennent à faire $n = 1$.

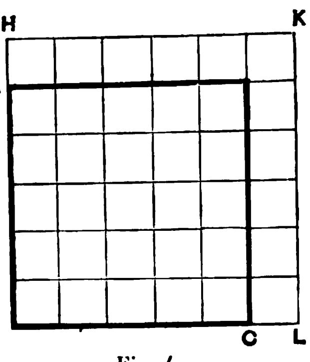


Fig. 4.

Diophante connaissait les expressions générales.

Après avoir posé ces préliminaires, les Pythagoriciens s'occupèrent des quatre problèmes spéciaux auxquels nous avons déjà fait allusion. Pythagore lui-même était familiarisé avec les nombres triangulaires ; les nombres polygonaux d'un ordre plus élevé furent étudiés postérieurement par les membres de l'Ecole.

Un nombre triangulaire représente le nombre total des jetons disposés par rangées sur un plan, la dernière ligne en contenant n et les rangées successives en remontant jusqu'à la première, un de moins que la précédente ; un pareil nombre est dès lors égal à la somme des termes de la série

$$\div\, n \,.\, n - 1 \,.\, n - 2 \,.\, n - 3 \,\ldots,\, 2 \,.\, 1$$

$$\ldots 3) + \ldots + 2 + 1 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

... correspondant à $n = 4$ est 10.
... age de Pythagore dans le pas-
... archand demande au philosophe
... agore lui répond : « Je vous
... and « Je sais déjà le faire ».
... vous donc? ». Le marchand
... hagore « Je vous arrête là, ce
... ix, un triangle parfait et notre

... ur ce que les Pythagoriciens ont
... es diviseurs des nombres. Ils
... comparant à la somme de leurs
... appelaient *abondants*, *parfaits*
... nt plus grands, égaux ou plus
... rs. Ces recherches ne conduisi-

... nes qu'ils étudièrent a trait aux
... étude se faisait probablement
... mme on le voit dans le 5e livre

... upèrent des suites de nombres
... ique, géométrique, harmonique
... ont bien connues; quatre nombres
... lorsqu'ils sont entre eux comme

$$\ldots \quad \frac{a+b}{2}, \quad b;$$

... 9 ... forment une progression musi-

... ment semble avoir été dirigé par
... Philolaus, Archippus et Lysis.
... rtre du maître, nous trouvons
... u maître de l'Ecole.

Archytas ([1]). — Archytas (vers — 400) un des citoyens les plus en renom de Tarente fut choisi sept fois pour être gouverneur de cette cité. Il jouissait parmi ses contemporains d'une très grande influence et eut l'occasion de l'utiliser pour sauver la vie de Platon menacée par Denys. Il était renommé pour sa sollicitude pour le bien être et l'instruction de ses esclaves et des enfants dans la Cité. Il périt dans un naufrage près de Tarente et son corps fut jeté par les flots sur le rivage. Aux yeux des plus rigides Pythagoriciens cette mort parut un châtiment mérité parce qu'il s'était écarté de la ligne de conduite qui leur avait été tracée par leur fondateur. Il comptait parmi ses élèves et amis plusieurs des chefs de l'Ecole athénienne, et l'on pense que beaucoup de leurs travaux furent dus à son inspiration.

Les premiers Pythagoriciens n'avaient fait aucune tentative pour appliquer leur connaissance à la mécanique, mais Archytas, prétend-on, s'occupa de cette science en se servant de considérations géométriques : on lui attribue l'invention de la poulie dont il exposa la théorie, la construction d'un oiseau volant et de quelques autres jouets mécaniques ingénieux. Il fit connaître divers appareils permettant de tracer mécaniquement les courbes et de résoudre les problèmes ; Platon critiquait leur usage estimant que la valeur de la géométrie, en tant qu'exercice intellectuel, en était amoindrie, et les derniers géomètres grecs se bornèrent à employer seulement deux instruments : la règle et le compas. Archytas était également versé en astronomie : il enseignait que la terre était une sphère effectuant une rotation autour de son axe en vingt-quatre heures et autour de laquelle se déplaçaient les corps célestes.

Archytas un des premiers, donna une solution du problème de la duplication du cube qui consistait à trouver le côté d'un cube d'un volume double de celui d'un cube donné. C'était l'un des plus fameux problèmes de l'antiquité ([2]).

([1]) Voir Allman, chap. iv. Un catalogue des travaux d'Archytas est donné par Fabricius dans la *Bibliotheca Græca*, Vol. I, p. 833 ; la plupart des fragments sur la philosophie ont été publiés par Thomas Gale dans ses *Opuscula Mythologia*, Cambridge, 1670 et par Thomas Taylor comme appendice à sa traduction de la *Vie de Pythagore* de Jamblique, Londres, 1818.

Voir aussi les références données par Cantor, Vol. I, p. 203.

([2]) Voir plus loin, pp. 39, 43, 44.

La construction d'Archytas revient à la suivante : sur le diamètre OA de la base d'un cylindre circulaire droit on décrit une demi-circonférence dont le plan est perpendiculaire à celui de la base et on fait tourner ce plan autour de la génératrice passant par le point O. Dans ce mouvement la surface décrite par la demi-circonférence coupe la surface cylindrique suivant une certaine courbe. Cette courbe est à son tour coupée par un cône droit ayant pour axe OA et dont le demi-angle au sommet est connu (60° par exemple) en un point P tel que la projection de OP sur la base du cylindre est au rayon du cylindre dans le rapport du côté du cube cherché au côté du cube donné. La démonstration d'Archytas est naturellement géométrique (1) ; contentons-nous de faire remarquer ici que son exposition montre qu'il connaissait les propriétés faisant l'objet des propositions 18 et 35 du livre III et 19 du livre XI des Eléments d'Euclide.

On peut constater analytiquement l'exactitude de cette construction : prenons OA comme axe des x, et la génératrice passant par O comme axe des z ; avec la notation usuelle en coordonnées polaires et en représentant par a le rayon du cylindre, nous avons pour l'équation de la surface décrite par la demi-circonférence, $r = 2a \sin \theta$, pour celle du cylindre $r \sin \theta = 2a \cos \varphi$, et pour celle du cône $\sin \theta \cos \varphi = \frac{1}{2}$. Ces trois surfaces se coupent en un point tel que $\sin^3 \theta = \frac{1}{2}$; par suite, si ρ est la projection de OP sur la base du cylindre, on a :

$$\rho^3 = (r \sin \theta)^3 = 2a^3.$$

C'est-à-dire que le volume du cube dont le côté est ρ est égal à deux fois le volume du cube de côté a.

Nous avons mentionné ce problème et donné la construction d'Archytas pour montrer jusqu'à quel point l'Ecole pythagoricienne avait poussé ses connaissances à cette époque.

Théodore. — A peu près à la même époque qu'Archytas vivait un autre Pythagoricien, *Théodore de Cyrène*, qui aurait, prétend-

(1) Elle est donnée par ALLMAN, pp. 111-113.

on, prouvé géométriquement que les nombres représentés par $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{14}$, $\sqrt{15}$ et $\sqrt{17}$ sont incommensurables avec l'unité.

Theætète fut un de ses élèves.

Comme autres Pythagoriciens célèbres de la même époque, on pourrait citer *Timée* de Locres et *Bryson* d'Héraclée. On croit que *Bryson* tenta de trouver l'aire du cercle en inscrivant et en circonscrivant à la circonférence des carrés, qui se transformaient en polygones dont les aires comprenaient celle du cercle ; mais il supposait, dit-on, qu'à un moment donné de l'opération la surface du cercle était la moyenne arithmétique entre les surfaces des polygones inscrit et circonscrit.

AUTRES ÉCOLES MATHÉMATIQUES GRECQUES DU Ve SIÈCLE AVANT JÉSUS-CHRIST

Ce serait une erreur de croire que Milet et Tarente fussent les seules villes où, dans le ve siècle, les Grecs aient créé des établissements scientifiques pour l'étude des mathématiques. Ces cités représentaient les principaux centres intellectuels, mais il existait peu de villes ou de colonies ayant quelque importance où on n'enseignât la géométrie et la philosophie. Parmi ces Ecoles secondaires nous pouvons mentionner celles de Chios, d'Elée et de Thrace.

Le philosophe le plus connu de l'Ecole de Chios fut *Ænopides* qui naquit vers — 500 et mourut vers — 430. Il se consacra principalement à l'astronomie, mais il avait étudié la géométrie en Egypte et on lui attribue les deux problèmes suivants :

D'un point extérieur à une droite abaisser une perpendiculaire sur cette droite ; (Euclide, livre I, prop. 12) ;

Construire en un point donné d'une droite donnée, un angle égal à un angle donné (Euclide, livre I, prop. 23).

Un autre centre important se trouvait à Elée en Italie. Il fut créé par *Xenophanes*. *Parménides*, *Zénon* et *Melissus* lui succédèrent. Les membres de l'*école d'Elée* furent célèbres par les difficultés qu'ils soulevèrent au sujet des questions se rapportant aux suites infinies : tel le paradoxe bien connu d'Achille et la Tortue.

Ce paradoxe fut émis par *Zénon* un des principaux membres de l'école, né en — 495 et mis à mort à Elée en — 435 à la suite d'un complot contre l'Etat; il était élevé de Parménides avec lequel il visita Athènes vers 455-450 avant J.-C.

Zénon prétendait qu'Achille, marchant dix fois plus vite qu'une tortue ayant sur lui une certaine avance — 1000 stades, par exemple — ne pourrait jamais la rattraper; car, disait-il, lorsque Achille aura parcouru les 1000 stades, la tortue aura encore sur lui 100 stades d'avance; pendant qu'il parcourra ces 100 stades, la tortue en fera 10 nouveauxet ainsi de suite. De sorte qu'Achille se rapprochera de plus en plus de la tortue mais ne pourra jamais l'atteindre. L'erreur du raisonnement est généralement mise en évidence par cet argument que le temps nécessaire pour atteindre la tortue peut être divisé en un nombre infini de parties qui vont en décroissant successivement et forment une progression géométrique dont la somme des termes donne un temps fini : à la fin de ce temps, Achille et la tortue sont de front. Zénon aurait probablement répliqué que cette argumentation reposait sur l'hypothèse que l'espace est divisible à l'infini ce qui faisait précisément l'objet de la discussion ; car lui-même avançait que les grandeurs ne sont pas susceptibles d'une division illimitée.

Ces paradoxes conduisirent les Grecs à n'employer les quantités infinitésimales qu'avec réserve et finalement les amenèrent à imaginer la méthode dite « *d'exhaustion* ».

Il y avait en Thrace un autre centre d'études important, l'*Ecole atomistique*. Elle fut fondée par *Leucippe* qui était élève de Zénon. *Démocrite* et *Epicure* lui succédèrent. Le mathématicien le plus célèbre de cette école fut *Démocrite* né à Abdera en — 460 et mort, croit-on, en — 370. Ses écrits sont relatifs à la fois à la philosophie, à la géométrie, aux quantités incommensurables et à la théorie des nombres. Ces divers ouvrages sont perdus.

On pourrait encore citer, pendant le v[e] siècle, plusieurs philosophes remarquables qui enseignèrent dans différentes villes mais il semble bien qu'ils se soient inspirés des écoles de Tarente et vers la fin de cette époque on peut considérer Athènes comme la capitale intellectuelle du monde grec. C'est aux écoles athéniennes que nous sommes redevables des grands progrès qu'ont fait, par la suite, les sciences mathématiques.

CHAPITRE III

LES ÉCOLES D'ATHÈNES ET DE CNIDE (1)

(VERS — 420 A — 300)

C'est vers la fin du cinquième siècle avant J.-C. qu'Athènes devint le principal centre des études mathématiques. Plusieurs causes contribuèrent à amener cet événement. Durant ce siècle, Athènes était devenue, par son commerce, et les contributions de ses alliés, la plus riche cité de la Grèce, et le génie de ses hommes d'Etat en avait fait le centre politique de la péninsule. Si le droit à la suprématie politique lui était contesté par certains Etats, son autorité intellectuelle était acceptée par tous. Il n'y avait pas une seule école philosophique qui ne fut représentée à Athènes par un ou plusieurs de ses principaux penseurs, et les idées de la nouvelle science si anciennement étudiée en Asie-Mineure et dans la Grande Grèce, étaient arrivées jusqu'aux Athéniens dans maintes occasions.

Anaxagore. — Parmi les philosophes les plus renommés qui résidaient à Athènes et qui ouvrirent, en quelque sorte, la voie à l'école Athénienne, nous pouvons citer *Anaxagore de Clazomène*

(1) L'histoire de ces Écoles est complètement étudiée dans l'ouvrage d'ALLMAN, *Greek Geometry from Thales to Euclid*, Dublin, 1889 ; et par J. Gow dans *Greek Mathematics*, Cambridge, 1884.

On la trouve aussi dans CANTOR, chap. IX, X et XI ; dans HANKEL, pp. 111-156 ; et dans C. A. BRETSCHNEIDER, *Die Geometrie und die Geometer vor Eukleides*, Leipzig, 1870.

Une sérieuse critique des références originales est due à S. P. TANNERY dans sa *Géométrie grecque*, Paris, 1887 et dans d'autres mémoires. Voir aussi *Le Scienze Esatte nell'Antica Grecia*, Modène, 1893-1900, par le Prof. G. LORIA.

[illegible] e de l'école Ionienne. Il naquit [illegible] paraît s'être établi vers — 440 [illegible] gnement de l'école Ionienne. [illegible] cole il s'intéressait beaucoup à [illegible] soleil était plus grand que le [illegible] quelques tentatives faites pour [illegible] siques attribués jusqu'alors à [illegible] irent poursuivre et condamner [illegible] ndant son séjour en prison, il [illegible] cercle.

[illegible] naxagore les sophistes peuvent [illegible] ppartenant à l'école d'Athènes ; [illegible] immédiatement et en prépa- [illegible] l est utile de leur consacrer [illegible] était une des conditions pour [illegible] nes, et à mesure que la richesse [illegible] loppèrent, un grand nombre de [illegible] pour enseigner, entre autres [illegible] rs d'entre eux dirigèrent égale- [illegible] vers la géométrie. On raconte [illegible] és de sophistes, Hippias d'Elée [illegible] ale de la géométrie, un autre, [illegible] d'astronomie et c'est de lui que [illegible]

[illegible] sophistes, *Hippias d'Elée* (vers [illegible] arithméticien distingué, mais il [illegible] teur de la courbe appelée *qua-* [illegible] trisection de l'angle ou plus [illegible] s un rapport donné quelconque. [illegible] e tourne uniformément autour [illegible] n OA pour arriver à la position [illegible] si, en même temps, une droite [illegible] niformément et parallèlement à [illegible] OA pour arriver à la position [illegible] n de ces deux droites sera la [illegible]

OR et MQ étant à un moment donné les positions correspondantes du rayon et de la droite perpendiculaire à OB, soit P leur point d'intersection qui est un point de la courbe.

On a

$$\frac{\text{angle AOP}}{\text{angle AOB}} = \frac{\text{OM}}{\text{OB}};$$

De même OR′ étant une autre position du rayon

$$\frac{\text{angle AOP}'}{\text{angle AOB}} = \frac{\text{OM}'}{\text{OB}}.$$

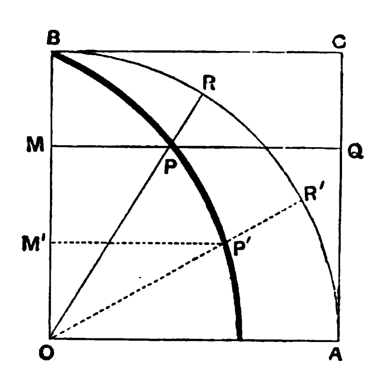


Fig. 5.

De ces deux relations on déduit

$$\frac{\text{angle AOP}}{\text{angle AOP}'} = \frac{\text{OM}}{\text{OM}'}$$

et enfin

$$\frac{\text{angle AOP}'}{\text{angle P}'\text{OP}} = \frac{\text{OM}'}{\text{M}'\text{M}}.$$

Dès lors, l'angle AOP étant donné, si l'on demande de le diviser dans un rapport donné, il suffira de diviser OM au point M′ dans le rapport donné et de tracer la droite M′P′ perpendiculaire sur OM. La droite OP′ joignant le sommet O au point P′ divisera l'angle AOP dans le rapport donné.

En prenant OA comme ligne origine et posant

$$\text{OP} = r, \quad \text{angle AOP} = \theta \quad \text{et} \quad \text{OA} = a,$$

nous avons :

$$\frac{\theta}{\frac{1}{2}\pi} = \frac{r \sin \theta}{a}$$

et l'équation de la courbe est

$$\pi r = 2a\theta \operatorname{cosec} \theta.$$

Hippias imagina un instrument pour tracer mécaniquement la courbe, mais les constructions géométriques dans lesquelles intervenaient d'autres instruments de mathématiques que la règle et le

compas ayant fait l'objet des critiques de Platon furent écartées par la plupart des géomètres qui suivirent.

Antiphon. — Le second sophiste que nous avons déjà mentionné fut Antiphon (vers — 420). Il fut un des très rares écrivains de l'antiquité qui essayèrent de trouver l'aire du cercle en le considérant comme la limite vers laquelle tend un polygone régulier inscrit dont le nombre des côtés augmente indéfiniment. Il commençait par inscrire le triangle équilatéral (ou le carré, suivant d'autres auteurs), puis sur chaque côté pris comme base et dans le plus petit des deux segments déterminés, il inscrivait un triangle isocèle, et ainsi de suite indéfiniment. Cette façon d'aborder le problème de la quadrature est identique au fond à celle dont il a été question plus haut à propos de Bryson d'Héraclée.

Il est hors de doute, qu'indépendamment d'Athènes, il existait en Grèce d'autres cités qui produisirent des œuvres semblables et également méritoires bien qu'il n'en existe plus trace aujourd'hui. Nous avons mentionné les recherches de ces trois savants, d'abord pour donner une idée du genre de travaux dont on s'occupait à cette époque un peu partout en Grèce, mais principalement parce qu'ils furent les prédécesseurs immédiats des créateurs de l'école athénienne.

L'histoire de cette école commence avec l'enseignement d'Hippocrate vers — 420. Fondée sur des bases durables par les travaux de Platon et d'Eudoxe, elle poursuivit parallèlement avec l'école voisine de Cnide le développement des premières découvertes de ces trois géomètres, jusqu'à ce que la création (environ — 300) de l'Université d'Alexandrie eut attiré vers ce nouveau centre la plupart des hommes éminents de la Grèce.

Eudoxe qui figurait parmi les mathématiciens les plus distingués d'Athènes est considéré comme le fondateur de l'école de Cnide. Les liens qui l'unirent à l'école d'Athènes sont tellement étroits, qu'il est impossible de séparer l'histoire de ces deux écoles. Hippocrate, Platon et Theœtète appartenaient, suppose-t-on, à l'école d'Athènes, tandis qu'Eudoxe, Ménœchme et Aristée auraient été de l'école de Cnide. Il y eut toujours des relations constantes entre ces deux centres dont les plus anciens membres avaient été instruits soit par Archytas, soit par son élève Théodore de Cyrène ; on peut

donc, sans inconvénients, les étudier simultanément. Avant d'examiner en détail les œuvres des géomètres de ces écoles, faisons remarquer qu'ils se sont spécialement occupés de trois problèmes [1], à savoir :

1° La duplication du cube, c'est-à-dire la détermination du côté d'un cube de volume double de celui d'un cube donné ;

2° La trisection de l'angle, et 3° la quadrature du cercle, c'est-à-dire la détermination d'un carré de surface égale à celle d'un cercle donné.

Les deux premières questions (considérées analytiquement) exigent la résolution d'une équation du 3ᵉ degré, et, puisque toute construction ne faisant usage que de cercles (dont les équations sont de $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$) ou de lignes droites (dont les équations sont de la forme $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$) ne peut être ramenée à la résolution d'une équation cubique, les problèmes sont insolubles si nous nous restreignons à l'emploi des cercles et des droites, c'est-à-dire si nous ne voulons faire intervenir que la géométrie euclidienne. Mais ces deux questions peuvent être résolues de bien des manières si l'on fait usage des sections coniques.

Le troisième problème revient à trouver un rectangle dont les côtés seraient respectivement égaux au rayon et au demi-périmètre du cercle considéré. Depuis longtemps on savait que ces deux lignes sont incommensurables, mais c'est depuis peu que Lindemann est arrivé à démontrer que leur rapport ne peut être la racine d'une équation algébrique rationnelle : il en résulte que ce problème n'est pas susceptible d'une solution par la géométrie euclidienne. Les Athéniens et les Cnidiens devaient donc échouer dans leurs tentatives pour arriver à résoudre ces trois problèmes ; mais leurs recherches conduisirent à la découverte de plusieurs théorèmes et procédés nouveaux.

Indépendamment des essais de solutions de ces problèmes, les derniers disciples de l'école platonicienne s'occupèrent de réunir et de coordonner d'une façon systématique tous les théorèmes de géométrie qui étaient alors connus. Les collections ainsi composées comprenaient la série des propositions qui figurent dans les

[1] Au sujet de ces problèmes, de leurs solutions et des renseignements pouvant servir à leur histoire, consultez mes *Mathematical Recreations and Problems*, Londres, 3ᵉ édit., 1896, chap. VIII, traduit en français par Ritz Patrick.

livres I à IX, et XI et XII des *Eléments* d'Euclide avec quelques-uns des théorèmes les plus élémentaires sur les sections coniques.

Hippocrate. — *Hippocrate de Chios* (qu'il importe de ne pas confondre avec son contemporain, Hippocrate de Cos, célèbre médecin) fut un des plus grands géomètres grecs. Il naquit à Chios environ 470 avant J.-C. et commença par exercer le commerce. Les uns prétendent qu'il fut dépouillé par les collecteurs de la douane athénienne, qui résidaient dans la Chersonèse, les autres qu'un de ses vaisseaux fut capturé par des pirates athéniens dans le voisinage de Byzance : Quoi qu'il en soit, il vint à Athènes vers — 430 pour essayer de recouvrer ses biens en faisant appel à la justice. Un étranger n'était pas fait pour réussir dans une pareille entreprise et les Athéniens semblent s'être tout simplement amusés de la simplicité dont il avait fait preuve, d'abord en se laissant dépouiller, et ensuite en manifestant l'espoir de recouvrer sa fortune. Tout en revendiquant ses droits il fréquentait les cours des divers philosophes et finalement (selon toute probabilité pour gagner sa vie) il ouvrit une école de géométrie. Il paraît avoir été très au courant de la philosophie pythagoricienne, bien qu'on n'ait pas de preuve suffisante de son affiliation à cette Ecole.

Il composa le premier traité élémentaire de géométrie, traité dont Euclide s'est probablement inspiré pour ses *Eléments*, de sorte qu'on peut dire de lui qu'il esquissa le plan qui sert encore de base à l'enseignement de la géométrie dans les écoles d'Angleterre. On suppose que l'usage des lettres pour désigner les figures fut imaginé par lui ou introduit de son temps, car il se sert d'expressions telles que « le point sur lequel se trouve la lettre A » et « la ligne sur laquelle AB est marqué ». Cantor pense cependant que les Pythagoriciens avaient déjà antérieurement l'habitude de désigner les cinq sommets de l'étoile pentagramme par les lettres du mot υγιθα (1), et bien que ce ne soit là qu'un simple cas particulier, il est possible qu'ils aient employé ce procédé d'une façon générale. Les géomètres de l'Inde n'employaient jamais de lettres pour se guider dans la description de leurs figures.

Hippocrate désignait aussi le carré construit sur une ligne par le

(1) Voir ci-dessus, p. 21.

mot δύναμις, et donnait ainsi la signification technique du mot *puissance* dont on se sert encore. On a des raisons de croire que l'usage de ce mot nous vient des Pythagoriciens qui énonçaient, dit-on, les conclusions de la proposition 47 du livre I d'Euclide sous cette forme : « la puissance totale des côtés d'un triangle rectangle est la même que celle de l'hypoténuse. »

Hippocrate se servait de la méthode de « réduction » consistant à ramener successivement un problème à un autre, de sorte que le dernier une fois établi, la proposition principale s'en déduisait nécessairement ; la méthode de démonstration par « *la réduction à l'absurde* » peut être considérée comme un cas particulier de la précédente. Il est hors de doute que le principe de la méthode avait déjà été employé d'une façon accidentelle, mais il eut le mérite de la signaler à l'attention comme un mode de démonstration légitime et susceptible de nombreuses applications. On peut dire de lui qu'il créa la géométrie du cercle. Il découvrit que les segments égaux d'un cercle contiennent des angles égaux ; que l'angle sous-tendu par une corde dans un cercle est plus grand, égal ou plus petit qu'un angle droit suivant que le segment du cercle dans lequel il est inscrit est plus petit, égal ou plus grand qu'un demi-cercle (Eucl. prop. 31 du livre III), et probablement plusieurs autres propositions contenues dans le troisième livre d'Euclide. Il est également vraisemblable que les deux propositions suivantes lui sont dues :

les cercles sont entre eux comme les carrés de leurs diamètres (Euclide, prop. 2, livre XII) ;

les segments semblables sont entre eux comme les carrés de leurs cordes.

La démonstration que l'on trouve dans Euclide de la première de ces propositions est attribuée à Hippocrate.

Cependant ses plus célèbres découvertes furent relatives à la quadrature du cercle et à la duplication du cube et grâce à son influence ces problèmes jouèrent un rôle prépondérant dans l'histoire de l'Ecole Athénienne.

Les propositions suivantes montreront suffisamment comment il abordait le problème de la quadrature.

a) Il commençait par évaluer l'aire de la lunule déterminée par l'arc d'un quadrant et la demi-circonférence décrite sur la corde

Voici comment il raisonnait : soit
tèle inscrit dans le demi-cercle
AC comme diamètres décrivons
).

vre I d'Euclide

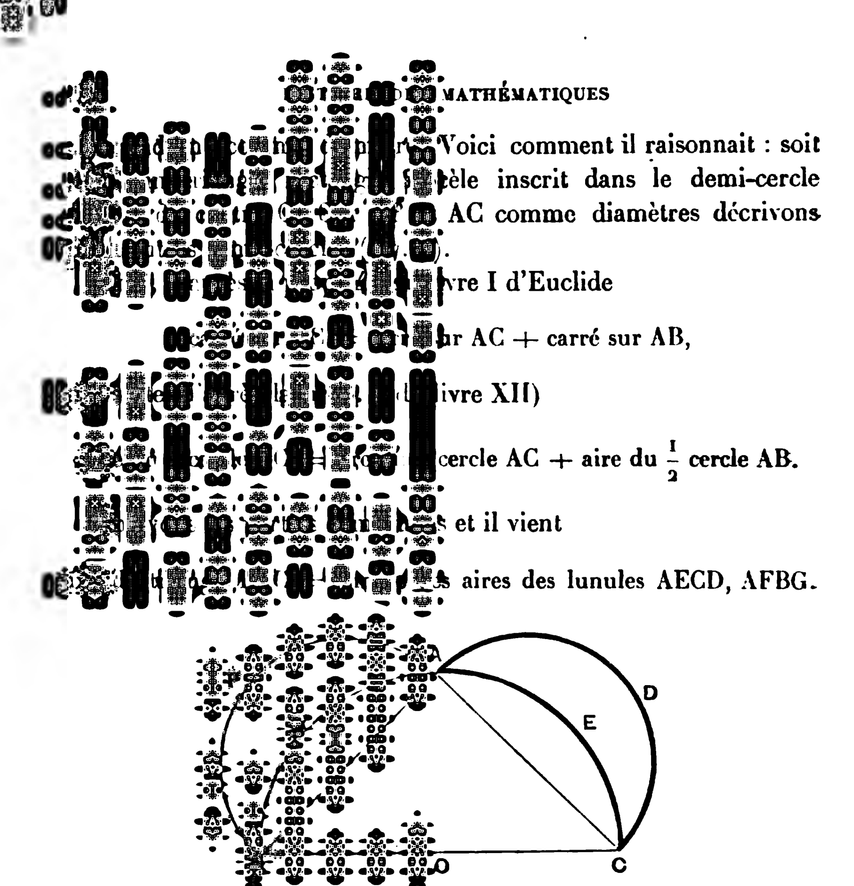
r AC + carré sur AB,

livre XII)

cercle AC + aire du $\frac{1}{2}$ cercle AB.

s et il vient

s aires des lunules AECD, AFBG.



. 6.

CD est équivalente à la moitié de

mi-hexagone régulier ABCD dans
rivait des demi-cercles sur OA,

is chacune des droites OA, AB.

construits sur OA, AB, BC et CD.

me des aires des $\frac{1}{2}$ cercles décrits
, BC et CD.

Enlevons la partie commune et il vient :

$$\text{aire du trapèze ABCD} = 3 \text{ lunules AEBF} + \frac{1}{2} \text{ cercle sur OA.}$$

Si donc on connaissait l'aire de la lunule AEBF, on pourrait déduire de cette relation l'aire du demi-cercle décrit sur OA comme diamètre.

D'après Simplicius, Hippocrate supposait que l'aire de cette lunule était la même que celle de la lunule déterminée précédemment. Il aurait alors commis une erreur, puisque dans le dernier cas la lunule est formée par un arc égal au sixième de la circonférence et par la demi-circonférence décrite sur la corde du premier arc comme diamètre ; mais il semble plus probable que Simplicius n'a pas exactement compris le texte d'Hippocrate.

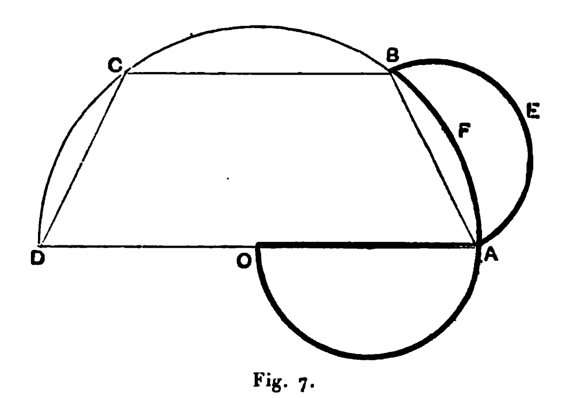


Fig. 7.

Hippocrate énonça également divers autres théorèmes relatifs aux lunules (ils ont été réunis par Bretschneider et par Allman). Ce sont là, croyons-nous, les exemples les plus anciens d'aires limitées par des courbes qui aient été déterminées géométriquement.

Hippocrate s'est également occupé du problème de la duplication du cube dont nous avons déjà parlé.

Cette question était connue dans l'antiquité sous le nom de problème déliaque parce que, d'après la légende, les Déliens auraient consulté Platon à son sujet. Philoponus raconte, en effet, qu'en — 430, les Athéniens éprouvés par la peste, consultèrent l'Oracle de Delphes pour savoir comment ils pourraient arrêter le fléau.

Apollon leur répondit qu'ils devaient doubler l'autel qui lui était consacré, dont la forme était cubique. Au premier abord rien ne parut plus simple : suivant les uns, ils construisirent un nouvel autel dont l'arête était double de celle de l'ancien (d'où il résultait un cube huit fois plus grand et non double) ; suivant les autres, ils placèrent à côté de l'autel existant un second cube ayant exactement les mêmes dimensions. Quoi qu'il en soit, et toujours d'après la légende, la divinité se montrant encore plus courroucée et le fléau augmentant d'intensité, une nouvelle députation lui fut envoyée. L'oracle leur répondit qu'il était inutile d'essayer de tromper les Dieux et que le nouvel autel devait être un cube parfait de volume double du premier. Soupçonnant que cette réponse cachait quelque chose de mystérieux, les Athéniens eurent recours à Platon qui les renvoya aux géomètres et principalement à Euclide qui s'était spécialement occupé du problème. L'introduction des noms de Platon et d'Euclide est un anachronisme évident.

Eratosthène donne un récit à peu près semblable mais avec le roi Minos comme auteur du problème.

Hippocrate ramenait le problème de la duplication du cube à la détermination de deux moyennes proportionnelles entre une ligne droite, a, et son double $2a$.

En désignant ces moyennes par x et y, nous avons

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$$

d'où il résulte

$$x^3 = 2a^3.$$

C'est sous cette forme que le problème est généralement présenté aujourd'hui. Hippocrate ne réussit pas à trouver la construction de ces moyennes.

Platon. — Un autre philosophe de l'école athénienne dont nous devons parler ici est *Platon*. Il naquit à Athènes vers — 429 et fut, comme on sait, pendant huit ans élève de Socrate ; l'on doit en grande partie à ses dialogues la connaissance de l'enseignement donné par ce philosophe. Après la mort de son maître en — 399, Platon quitta Athènes, et se trouvant à la tête d'une fortune considérable, il passa plusieurs années à voyager. Ce fut pendant cette pé-

riode qu'il s'adonna aux mathématiques. Il visita l'Egypte avec Eudoxe et Strabon. On raconte que, de son temps, on montrait encore à Héliopolis le logement qu'ils occupèrent. De là Platon se rendit à Cyrène où il étudia sous la direction de Théodore. Il passa ensuite en Italie où il se lia avec Archytas alors à la tête de l'école pythagoricienne ainsi qu'avec Eurytas, Tétaponte et Timée de Locres.

De retour à Athènes vers l'an — 380 il fonda une école dans un gymnase suburbain auquel on donna le nom d'Académie. Il mourut en — 348.

De même que Pythagore, Platon était surtout philosophe, et l'on pourrait peut-être regarder sa philosophie comme basée sur l'enseignement pythagoricien plutôt que sur celui de Socrate. Quoiqu'il en soit, elle était, comme la philosophie pythagoricienne, dominée par cette idée que le secret de l'univers se trouvait dans le nombre et dans la forme, suivant Eudème « il saisissait toutes les occasions de faire ressortir les relations remarquables existant entre les mathématiques et la philosophie. » On s'accorde à reconnaître que contrairement à plusieurs philosophes plus modernes, il considérait l'étude de la géométrie, ou tout au moins d'une science exacte, comme le préliminaire indispensable de l'étude de la philosophie. On lisait cette inscription au-dessus de l'entrée de son école « que nul n'entre ici s'il n'est géomètre. »

Le prestige de Platon comme l'un des maîtres de l'école mathématique athénienne tient plutôt à l'influence extraordinaire qu'il a exercée sur ses contemporains et ses successeurs qu'à ses découvertes personnelles. Ainsi l'objection qu'il avait présentée relativement à l'emploi, pour le tracé des courbes, d'instruments autres que la règle et le compas, fut immédiatement acceptée comme un dogme qui devait être respecté dans tous les problèmes de ce genre. C'est probablement à Platon que l'on doit l'habitude prise par les géomètres qui vinrent après lui de commencer l'exposition de leur sujet par une suite de définitions, de postulats et d'axiomes soigneusement coordonnés. Il classa également d'une façon systématique les méthodes qui pouvaient être employées pour traiter les questions de mathématiques, et, en particulier, attira l'attention sur l'importance de l'analyse. Dans le mode de démonstration par l'analyse on commence par supposer résolu le problème ou démontré le théorème à établir et de cette supposition on déduit certain

résultat : si la conséquence déduite est fausse, le théorème n'est pas exact ou le problème n'est pas susceptible d'une solution : si, au contraire, le résultat obtenu est reconnu vrai, et si l'on peut revenir sur ses pas, on obtient (en reprenant la marche inverse) une preuve synthétique ; mais si l'on ne peut remonter de la déduction à l'hypothèse faite, aucune conclusion ne peut être formulée.

On trouve de nombreux exemples de cette méthode dans tous les ouvrages de géométrie.

Si la classification des méthodes inductives donnée par Mill dans son ouvrage sur la logique avait été universellement admise et si chaque nouvelle découverte scientifique avait été justifiée par une référence aux règles qu'il expose, il aurait, pensons-nous, occupé, par rapport à la science moderne, une place à peu près identique à celle que prit Platon parmi les mathématiciens de son temps.

Nous donnons ci-après le seul théorème qui subsiste et que la tradition attribue à Platon.

Si deux triangles rectangles ABC, ABD ont un côté de l'angle droit AB commun, les deux autres côtés BC, AD parallèles et leurs hypoténuses BD, AC se coupant en P à angle droit, on a

$$\frac{PC}{PB} = \frac{PB}{PA} = \frac{PA}{PD}.$$

Ce théorème était employé pour la duplication du cube, car si l'on pouvait obtenir deux pareils triangles tels que $PD = 2PC$, le problème serait résolu.

Il est facile de construire un instrument permettant de former ces deux triangles.

Eudoxe (1). — Nous savons très peu de chose sur *Eudoxe*, le troisième grand mathématicien de l'école athénienne et le fondateur de l'école de Cyzique. Il naquit à Cnide en — 408. Comme Platon il se rendit à Tarente où il étudia sous la direction d'Archytas alors à la tête de l'école Pythagoricienne. Il voyagea dans la suite avec Platon en Egypte et s'établit alors à Cyzique où il fonda

(1) Les travaux d'Eudoxe ont été étudiés avec beaucoup de détails par H. Künssberg de Dinkelsbühl en 1888 et 1890. Voir aussi les références mentionnées ci-dessus à la page 35.

l'école de ce nom. Finalement il se rendit à Athènes avec ses disciples. Là, il semble avoir pris une certaine part aux affaires publiques et avoir pratiqué la médecine ; mais l'hostilité de Platon et sa propre impopularité comme étranger rendirent sa situation intenable et il retourna à Cyzique ou Cnide peu de temps avant sa mort qui survint en — 355 lors d'un voyage en Egypte.

Ses œuvres mathématiques semblent remarquables. Il découvrit presque tout ce que nous savons du cinquième livre d'Euclide, et ses démonstrations sont à peu près les mêmes que celles d'Euclide.

Il fit connaître quelques propositions sur ce qu'on appelait « la section d'or ». Le problème consistant à couper une ligne AB dans la section d'or, c'est-à-dire, à la diviser au point H en moyenne et extrême raison (autrement dit de telle sorte que $\frac{AB}{AH} = \frac{AH}{HB}$) problème résolu dans Euclide (prop. 11, livre II) et probablement connu des Pythagoriciens à une date antérieure.

A H B

Fig. 8.

Si nous représentons la longueur AB par l et les segments AH, HB par a et b, les théorèmes démontrés par Eudoxe se traduisent par les identités algébriques suivantes :

(1) $\left(a + \frac{1}{2} l\right)^2 = 5 \left(\frac{1}{2} l\right)^2$. [Euclide, prop. 1 du livre XIII].

(2) Réciproquement, si l'égalité (1) est vraie et si nous faisons AH $= a$, la droite AB se trouve divisée en H en une section d'or. [Euclide, prop. 2 du livre XIII].

(3) $\left(b + \frac{1}{2} a\right)^2 = 5 \left(\frac{1}{2} a\right)^2$. [Euclide, prop. 3 du livre XIII].

(4) $l^2 + b^2 = 3a^2$. [Euclide, prop. 4 du livre XIII].

(5) $\frac{l + a}{l} = \frac{l}{a}$, ce qui donne une autre section d'or [Euclide, prop. 5 du livre XIII].

Ces propositions ont été successivement énoncées par Euclide, au commencement de son XIIIe livre, mais elles auraient pu tout

aussi bien être placées à la fin du second livre. Toutes sont algébriquement évidentes, puisque

$$l = a + b \quad \text{et} \quad a^2 = b.l.$$

Eudoxe créa plus tard la méthode « d'exhaustion » qui repose sur cette proposition que « si à la plus grande de deux grandeurs inégales, on enlève plus que sa moitié, et à ce qui reste encore, plus que sa moitié, et ainsi de suite, on finira par obtenir un reste moindre que la plus petite des deux grandeurs proposées ». Euclide avait classé cette proposition comme la première du X[e] livre de ses *Eléments*, mais dans la plupart des éditions scolaires modernes, elle est placée au commencement du XII[e] livre. A l'aide de ce théorème, les géomètres anciens pouvaient éviter l'emploi des infiniments petits : la méthode est rigoureuse mais d'une application pénible. On en trouve un bon exemple dans la démonstration de la proposition 2 du livre XII d'Euclide, à savoir que : le carré du rayon d'un cercle est au carré du rayon d'un autre cercle comme l'aire du premier cercle est à une aire qui n'étant, ni plus petite, ni plus grande que celle du second cercle, représente nécessairement celle de ce second cercle.

La démonstration qu'en donne Euclide est (suivant l'usage) complétée par une *réduction à l'absurde*.

Eudoxe utilisait ce principe pour démontrer que le volume d'une pyramide (ou d'un cône) est le tiers de celui d'un prisme (ou d'un cylindre) de même base et de même hauteur (Euclide, prop. 7 et 10 du livre XII). On pense aussi qu'il s'en servait pour établir que les volumes de deux sphères sont entre eux comme les cubes de leurs rayons. Quelques écrivains estiment que c'est à lui, et non à Hippocrate, qu'on doit attribuer la proposition 2 du livre XII d'Euclide.

Eudoxe considéra également certaines courbes autres que le cercle.

Eudoxe imagina un système planétaire et écrivit un traité d'astronome pratique dans lequel, adoptant une hypothèse déjà mise en avant par Philolaüs, il supposait un certain nombre de sphères mobiles auxquelles le soleil, la lune et les étoiles étaient fixés et qui, par leur rotation, produisaient les effets observés. Son système

supposait vingt-sept sphères en tout. A mesure que les observations devinrent plus exactes, les astronomes qui acceptèrent son système durent continuellement imaginer de nouvelles sphères pour faire concorder les faits avec la théorie.

L'ouvrage sur l'astronomie écrit par Aratus vers — 300 et qui subsiste encore est basé sur celui d'Eudoxe.

Platon et Eudoxe étaient contemporains.

Ménœchme. — Parmi tous les mathématiciens dont nous venons de donner les noms, nous ferons spécialement mention de *Ménœchme* qui naquit vers — 375 et mourut vers — 325. Il fut, comme nous venons de le dire, élève d'Eudoxe et lui succéda probablement à la tête de l'Ecole de Cyzique. Ménœchme jouissait d'une grande réputation comme professeur de géométrie et fut un des précepteurs d'Alexandre le Grand. A la demande de son élève le priant un jour de présenter ses démonstrations d'une manière simple, il fit cette réponse bien connue que, si dans un pays il existait diverses voies privées, et même des voies royales, il n'existait qu'une seule route pour parvenir à la connaissance de la géométrie, route qui devait être suivie par tout le monde. Ménœchme étudia le premier les sections coniques qui furent pendant longtemps appelées la *triade ménœchmienne*. Il les divisait en trois classes et recherchait leurs propriétés, non pas en faisant différentes sections planes dans un même cône, mais en supposant un plan fixe et en lui faisant couper des cônes différents. Il fit voir que la section d'un cône droit par un plan perpendiculaire à une génératrice est une ellipse si l'angle au sommet est aigu, une parabole s'il est droit, et enfin une hyperbole si cet angle est obtus. Il donna une construction mécanique de ces courbes.

Il montra également comment ces courbes pouvaient être utilisées de deux manières pour la solution du problème de la duplication du cube.

Dans la première de ses méthodes, il fait remarquer que deux paraboles ayant un sommet commun, leurs axes rectangulaires et telles que le paramètre de l'une soit double de celle de l'autre, se coupent en un second point dont l'abscisse (ou l'ordonnée) donne une solution du problème : car (en employant l'analyse), si les équations des paraboles sont $y^2 = 2ax$ et $x^2 = ay$, elles se cou-

pent en un point dont l'abscisse est donnée par l'équation $x^3 = 2a^3$.

Il est probable que cette méthode lui fut suggérée par la forme sous laquelle Hippocrate avait présenté le problème : déterminer x et y de telle sorte que l'on ait :

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a},$$

d'où l'on déduit

$$x^2 = ay \qquad \text{et} \qquad y^2 = 2ax.$$

Voici la seconde solution de Ménœchme : On décrit une parabole de paramètre $\frac{l}{2}$, puis une hyperbole équilatère ayant $4l$ pour longueur de son axe réel, et pour asymptotes la tangente au sommet et l'axe de la première. L'ordonnée et l'abscisse du point d'intersection de ces courbes sont les moyennes proportionnelles entre l et $2l$.

L'analyse le prouve immédiatement, car les équations de ces courbes sont

$$x^2 = ly \qquad \text{et} \qquad xy = 2l^2.$$

Elles se coupent en un point déterminé par les équations

$$x^3 = 2l^3 \qquad \text{et} \qquad y^3 = 4l^3,$$

dès lors

$$\frac{l}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2l}.$$

Aristé et Theætète. — Parmi les autres membres de ces Ecoles, *Aristé* et *Theætète* dont les ouvrages sont complètement perdus furent des mathématiciens en renom. Nous savons qu'Aristé écrivit sur les cinq solides réguliers et que Theætète développa la théorie des grandeurs incommensurables. Le seul théorème que nous puissions sûrement attribuer au dernier, est celui qui fait l'objet de la proposition neuf du dixième livre d'Euclide, et dont voici l'énoncé :

Les carrés construits sur deux lignes commensurables ont entre eux le même rapport que le carré d'un nombre au carré d'un autre nombre (et réciproquement) ; les carrés construits sur deux longueurs incommensurables ont entre eux un rapport qui ne peut

être exprimé par celui du carré d'un nombre au carré d'un autre nombre (et réciproquement).

Ce théorème comprend les résultats donnés par Théodore ([1]).

Les contemporains ou les successeurs de ces mathématiciens écrivirent quelques nouveaux traités sur les *Éléments* de la Géométrie et sur les sections coniques ; ils firent connaître quelques problèmes relatifs à la recherche des lieux et poursuivirent efficacement le travail commencé par Platon en systématisant les connaissances déjà acquises.

Aristote. — Notre histoire de l'École Athénienne ne serait pas complète si nous passions sous silence Aristote qui naquit à Stagire, en Macédoine, en — 384, et mourut à Chalcis, en Eubée, en — 322. Les sciences naturelles avaient pour lui un attrait tout particulier ; il s'intéressait cependant aux mathématiques et à la mécanique. Un petit ouvrage, contenant quelques questions de mécanique et qu'on lui attribue quelquefois, offre un certain intérêt parce qu'il montre que les principes de la mécanique commençaient déjà à attirer l'attention, et parce qu'il contient le plus ancien exemple connu de l'emploi des lettres pour représenter les grandeurs.

On y trouve une preuve dynamique de la règle du parallélogramme des forces et ce passage remarquable « si α est une force appliquée à une masse β, γ la distance dont cette masse est déplacée et δ le temps du déplacement, on peut dire que α déplacera une masse $\frac{\beta}{2}$ de la distance 2γ dans le temps δ, ou de la distance γ dans le temps $\frac{\delta}{2}$. »

Mais l'auteur continue ainsi « il ne s'ensuit pas que $\frac{1}{2\alpha}$ déplacera β d'une distance $\frac{\gamma}{2}$ dans le temps δ, attendu que la force $\frac{\alpha}{2}$ peut n'être pas du tout en mesure de déplacer β. Ainsi 100 hommes pourront remorquer un vaisseau sur une longueur de 100 mètres, mais il ne s'ensuit pas qu'un seul homme pourra le déplacer d'un mètre. » La première partie de ce raisonnement est correcte, car elle revient

([1]) Voir plus haut, p. 32.



…onnelle au *momentum* (1), mais …re discutée.

… : « ce que l'on gagne en puis- …u » et que par conséquent deux …r (sans poids) sont inversement …; c'est ce qui explique, dit-il, … les dents avec une pince qu'avec

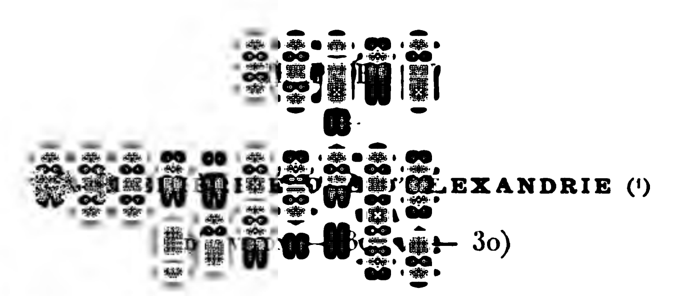
… laisse sans réponse, se trouvent …rojectile s'arrêtera-t-il toujours? … grandes roues sont-elles plus … des petites roues?

…ontient des erreurs graves, et ne …utant d'intérêt qu'on pourrait le …ous venons de faire.

…irent pas suffisamment que les …vaient être établis que sur l'obser-

(1) … …leterre désigne le produit de la masse …est-à-dire, la *quantité de mouvement*.





…EXANDRIE (1)

(… 30)

… première fois un centre … d'aujourd'hui. Admirable- … re, des bibliothèques, des … s les appareils, toutes les … entées, elle devint rapide- … ple grec et conserva son … de dix siècles. Elle eut la … ndant le premier siècle de … hématiciens de l'antiquité … Ils tracèrent la voie qui … rent s'affranchir de toute … nce une ère nouvelle dans … époque et jusqu'à la des- … 641 après Jésus-Christ, … ttache plus ou moins à

… par Cantor, chap. xii-xxiii, … ambridge, 1884.
… par E. H. F. Nesselmann, dans … 1842 ; on peut consulter aussi … *Algebra der litteralen Glei-*

… sont étudiés dans l'ouvrage *Die* … Zeuthen, Copenhague, 1886. … été soumis à une minutieuse … mémoires sont réunis dans sa

La ville et l'Université d'Alexandrie ont été créées dans les circonstances suivantes. Alexandre le Grand monta en — 336 sur le trône de Macédoine à l'âge de vingt ans et, en — 332, il avait conquis ou soumis la Grèce, l'Asie-Mineure et l'Egypte. S'inspirant du plan qu'il s'était tracé chaque fois qu'il trouvait qu'une position avantageuse avait été laissée inoccupée, il fonda une nouvelle cité sur la Méditerranée non loin d'une des bouches du Nil; lui-même en traça le plan, et y envoya des détachements de Grecs d'Egyptiens et de Juifs qui en prirent possession. Il voulait en faire la plus belle ville du monde, et en confia la construction à Dinocrates, l'architecte du Temple de Diane à Ephèse.

A la mort d'Alexandre en — 323, son empire fut divisé, et l'Egypte revint à Ptolémée qui choisit Alexandrie comme capitale de son Royaume. Une courte période de troubles suivit, mais aussitôt que Ptolémée fut établi sur le trône, environ 306 avant Jésus-Christ, il s'efforça, autant qu'il en avait le pouvoir, d'attirer dans la nouvelle cité les savants de tous les pays. Il fit commencer aussitôt la construction des bâtiments universitaires sur un terrain attenant à son propre Palais. L'Université fut prête à ouvrir ses portes environ 300 avant Jésus-Christ, et Ptolémée désirant recruter le personnel enseignant parmi les savants les plus éminents, les fit venir d'Athènes, qui était alors le centre intellectuel le plus renommé. La grande bibliothèque, qui formait la construction centrale, fut confiée aux soins de Demetrius Phalereus, athénien de distinction, et elle prit un tel développement qu'elle possédait quarante ans après sa construction (en y comprenant l'annexe égyptienne) environ 600.000 manuscrits. La direction de l'Enseignement mathématique fut donnée à Euclide, classé ainsi le premier parmi les mathématiciens de l'Ecole d'Alexandrie.

Depuis la fondation de cette nouvelle Ecole, les documents sur lesquels est basée notre histoire deviennent plus nombreux et plus certains. Plusieurs des œuvres des mathématiciens d'Alexandrie nous sont parvenues, et nous possédons en outre un traité inappréciable de Pappus, dont il est parlé plus loin, dans lequel leurs écrits les plus connus sont désignés, discutés et critiqués. Mais, observation curieuse, si nous avons des renseignements importants sur les matières que l'on enseignait, nous en avons beaucoup moins sur les maîtres; leur vie nous est peu connue et il règne une cer-

taine incertitude sur la date exacte de leur naissance et de leur mort.

LE IIIe SIÈCLE AVANT JÉSUS-CHRIST

Euclide (1). — Ce siècle a produit trois des plus grands mathématiciens de l'antiquité : Euclide, Archimède et Apollonius.

Euclide est le plus ancien. Nous ne connaissons presque rien de sa vie, si ce n'est qu'il était grec et qu'il naquit environ 330 avant Jésus-Christ ; il mourut vers — 275. Il connaissait la géométrie platonicienne, mais ne semble pas avoir connu les écrits d'Aristote, probablement parce qu'il avait étudié à Athènes. A Alexandrie il eut un immense succès. Il imposa à un tel point sa propre individualité à l'enseignement de l'Université nouvelle, que, pour ses successeurs et même pour ses contemporains, le nom d'Euclide désignait (comme cela a lieu de nos jours), non l'homme lui-même, mais le ou les ouvrages qu'il avait écrits. Quelques-uns des écrivains du moyen-âge ont été jusqu'à nier l'existence d'Euclide et ont expliqué avec toute l'ingéniosité des linguistes que ce nom était simplement la corruption de ὕκλι, clef, et δὶς, géométrie. Il est à présumer que le premier mot serait un dérivé de κλείς, mais nous ne pouvons expliquer la signification donnée au mot δὶς que par cette conjecture, que le nombre deux symbolisant la ligne d'après les Pythagoriciens ; il est possible qu'un de ses disciples ait pensé qu'il pouvait être choisi pour spécifier la géométrie.

D'après les rares notices sur Euclide, qui nous sont parvenues, nous voyons que le fameux propos cité plus haut comme réponse faite à Alexandre, peut lui être attribué aussi bien qu'à Me-

(1) Outre Cantor, chap. xii et xiii et Gow, pp. 72-86, 195-221, voir l'article *Euclides*, par A. de Morgan, dans le *Dictionary of Greek and Roman Biography*, de Smith, Londres, 1849 ; l'article sur *Irrational Quantity*, par A. de Morgan, dans le *Penny Cyclopaedia*, Londres, 1839 ; et *Litterargeschichtliche studien über Euklid*, par J. L. Heiberg, Leipzig, 1882.

La plus récente édition complète de toutes les œuvres d'Euclide est celle de J. L. Heiberg et H. Menge, Leipzig, 1883-1887. Une traduction anglaise des 13 livres des *Éléments* a été publiée par J. Williamson, en 2 volumes. Oxford, 1781 et Londres, 1788, mais dont les notes ne doivent pas toujours être acceptées sans réserve ; il existe une autre traduction, par Isaac Barrow, Londres et Cambridge, 1660.

nœchme; mais c'est là une de ces observations épigrammatiques que l'on met dans la bouche de bien des grands hommes. On dit aussi qu'Euclide insistait sur cette idée que les connaissances devaient être acquises pour elles-mêmes, et non pour le profit qu'on pouvait en retirer, et Stobacus (qui cependant ne peut être considéré comme une autorité indiscutable) nous raconte que, lorsqu'un débutant dans l'étude de la Géométrie posait cette question : « mais que gagnerai-je en apprenant toutes ces matières? » Euclide commandait à son esclave de donner au jeune homme quelques pièces de monnaie « puisque, disait-il, il doit retirer profit de ce qu'il apprend ». D'après la tradition il était d'une douceur et d'une modestie remarquables.

Euclide a composé plusieurs ouvrages, mais sa réputation repose principalement sur ses *Eléments*. Ce traité contient une exposition systématique des principales propositions de la Géométrie élémentaire (à l'exclusion des sections coniques) et de la théorie des nombres. Il fut aussitôt adopté par les Grecs, comme le livre classique type, pour l'étude des éléments de mathématiques pures.

Le texte moderne ([1]) a été établi d'après une édition préparée par Théon, le père d'Hypatie, qui professa à Alexandrie vers 380 après Jésus-Christ. On possède à la bibliothèque du Vatican la copie d'un texte plus ancien et on a, de plus, des extraits de l'ouvrage et des citations données par de nombreux auteurs à des époques diverses. Il résulte de l'examen de ces documents que, dans les éditions qui suivirent, les définitions, les axiomes et les postulats ont été remaniés et légèrement altérés, mais que les propositions elles-mêmes sont telles qu'Euclide les a présentées.

Quant au corps même du traité, ce qui concerne la géométrie est en grande partie une compilation des ouvrages des écrivains antérieurs. Ainsi les livres I et II sont probablement dus à Pythagore; le livre III revient à Hippocrate, le livre V à Eudoxe et l'ensemble des livres IV, VI, XI et XII aux derniers Pythagoriciens ou aux écoles Athéniennes. Mais, toutes les matières ont été re-

([1]) La plupart des traités modernes en Angleterre sont composés d'après l'édition de Simson parue en 1758.

Robert Simson qui naquit en 1687 et mourut en 1768 était professeur de mathématiques à l'Université de Glasgow, il laissa plusieurs ouvrages de valeur sur la géométrie ancienne.

prises, des déductions faciles à saisir omises (par exemple cette proposition : les perpendiculaires abaissées de chaque sommet d'un triangle sur le côté opposé se rencontrent en un même point, a été supprimée) et dans certains cas, de nouvelles démonstrations présentées. La partie consacrée à la théorie des nombres semble avoir été empruntée aux ouvrages d'Eudoxe et de Pythagore, à l'exception de ce livre X, qui a trait aux grandeurs irrationnelles. Cette partie peut avoir été tirée du livre perdu de Theætète, mais il est probable qu'elle contient beaucoup de propositions nouvelles, car Proclus nous apprend qu'Euclide, en arrangeant les propositions d'Eudoxe complétait la plupart de celles de Theætète.

Euclide procède toujours d'une manière uniforme : énoncé, exposition, construction, preuve et conclusion. On lui doit également le caractère synthétique de l'ouvrage, chaque démonstration ayant la forme d'un raisonnement suivi, logiquement correct, mais sans aucun guide relativement à la méthode suivie pour l'obtenir.

Les défauts des *Eléments* d'Euclide, en tant que livre classique de géométrie, ont été souvent signalés. Voici les plus importants :

1° Les définitions et axiomes contiennent beaucoup de suppositions qui ne sont pas évidentes, et il en est ainsi, en particulier, de l'axiome dit des parallèles [1];

2° Il n'explique pas, comment il est arrivé à donner aux démonstrations la forme qu'elles ont, c'est-à-dire qu'il présente une preuve synthétique sans donner l'analyse qui lui a permis de l'obtenir ;

3° Aucun essai de généralisation d'un résultat obtenu n'est tenté, par exemple, l'idée de l'angle n'est jamais développée de façon à comprendre le cas où il est égal ou plus grand que deux angles droits.

La seconde partie de la proposition 33 du livre VI, suivant le texte moderne, paraît être une exception, mais elle est due à Théon et non à Euclide ;

4° Le principe de la superposition comme méthode de démonstration pourrait avantageusement être employé plus fréquemment ;

5° La classification des propositions laisse à désirer ;

6° L'ouvrage est long et prolixe sans nécessité.

[1] Il résulte des recherches de Lobatschewsky et de Riemann qu'il ne peut être démontré.

D'un autre côté, dans l'ouvrage d'Euclide, les propositions sont disposées, de façon à former une chaîne de raisonnements géométriques partant de quelques suppositions presque évidentes, pour arriver graduellement et sans peine à des résultats très complexes. Les démonstrations sont rigoureuses, souvent élégantes, et ne présentent pas trop de difficulté aux débutants. Enfin presque toutes les propriétés métriques élémentaires de l'espace (par opposition aux propriétés graphiques) ont été étudiées. Le fait que pendant deux mille ans cet ouvrage a été universellement admis comme *Livre classique* est la meilleure preuve qu'il remplit bien le but auquel il était destiné.

Depuis quelques années, plusieurs tentatives, restreintes il est vrai, ont été faites pour détrôner Euclide dans les écoles d'Angleterre, mais la majorité du personnel enseignant paraît encore le regarder comme le meilleur traité qui ait été publié pour l'enseignement de la géométrie; cependant Euclide a généralement été abandonné sur le Continent comme livre d'enseignement.

A ces arguments en faveur d'Euclide, il faut ajouter que quelques-uns des plus grands mathématiciens des temps modernes, tels que Descartes, Pascal, Newton et Lagrange ont insisté pour son maintien comme livre classique : Lagrange disait, que celui qui n'avait pas étudié la géométrie dans Euclide, était comme une personne qui voudrait apprendre le latin et le grec d'après les ouvrages modernes écrits dans ces langues. Disons aussi, qu'il y aurait un immense avantage à avoir un seul livre classique universellement en usage pour un sujet tel que la géométrie. Les conditions peu satisfaisantes dans lesquelles se fait l'enseignement de la géométrie des coniques, est un exemple typique de l'inconvénient qui résulte de l'emploi de livres classiques différents. Quelques-unes des objections présentées contre Euclide ne s'appliquent pas à certaines éditions récentes de ses œuvres.

Nous ne pensons pas que toutes les objections énumérées plus haut puissent raisonnablement s'adresser à Euclide lui-même. Il publia une collection de problèmes généralement connus sous le nom de Δεδομένα ou *Data*. Ce recueil contient quatre-vingt quinze exemples d'un genre de déduction qui se reproduit fréquemment en analyse. Nous citerons le suivant comme exemple : si l'une des données du problème considéré est que l'angle d'un certain triangle

de la figure est constant, il est légitime d'en conclure que le rapport de l'aire du rectangle déterminé par les côtés qui comprennent l'angle à l'aire du triangle est constant (prop. 66). Pappus rapporte que l'ouvrage avait été fait pour ceux « qui désirent apprendre à résoudre les problèmes. » Il constituait en fait une série graduée d'exercices d'analyse géométrique et il peut être considéré comme répondant à la seconde objection formulée.

Euclide composa également un ouvrage intitulé περὶ Διαιρέσεων ou *De Divisionibus* que nous ne connaissons que par une traduction arabe peut-être imparfaite. C'est une collection de trente-six problèmes sur la division des surfaces en parties ayant entre elles un rapport donné. Il est vraisemblable que cet ouvrage faisait partie d'une série plus complète comprenant probablement les *sophismes* et les *porismes*; en lui-même, il montre qu'Euclide reconnaissait parfaitement l'importance des exercices et des applications.

Mentionnons ici une hypothèse mise en avant par De Morgan qui est peut-être, de tous les critiques modernes d'Euclide, le plus subtil. Il admet comme vraisemblable que les éléments furent écrits vers la fin de la vie du grand géomètre, et que leur forme actuelle n'est qu'une première ébauche de l'ouvrage qu'il se proposait de composer et que sa mort ne lui permit pas de remanier, à l'exception du livre X. Si cette opinion est fondée, il est bien probable que la révision d'Euclide n'aurait pas donné lieu à la cinquième objection formulée plus haut.

La partie des éléments consacrée à la géométrie est tellement connue que nous pourrions presque nous dispenser d'en parler [1].

Les quatre premiers livres et le livre VI traitent de la géométrie plane; la théorie des proportions (entre grandeurs de toute nature) est faite dans le livre V et les livres XI et XII ont pour objet la géométrie dans l'espace.

(1) Euclide supposait que ses lecteurs connaissaient l'usage de la règle et du compas.

Lorenzo Mascheroni (qui naquit à Castagneta, le 14 mai 1750 et mourut à Paris, le 30 juillet 1800) entreprit d'arriver aux résultats donnés par Euclide en n'employant dans ses constructions que le compas seul. Le traité de Mascheroni sur la *Géométrie du compas*, qui fut publié à Pavie, en 1795, est un tour de force si curieux qu'il vaut la peine d'être mentionné. Mascheroni fut d'abord professeur à Bergame, puis à Pavie, il laissa de nombreux ouvrages d'importance secondaire.

En admettant l'hypothèse que les éléments représentent la première ébauche d'un ouvrage qu'Euclide se proposait d'écrire, il est possible que le livre XIII constitue une sorte d'appendice contenant quelques propositions additionnelles qui auraient été ultérieurement intercalées dans l'un ou l'autre des premiers livres. Ainsi, comme nous l'avons déjà fait remarquer plus haut, les cinq premières propositions relatives à une droite coupée « en section d'or » auraient pu être introduites dans le second livre. Les sept propositions qui suivent ont trait aux relations entre certaines lignes incommensurables dans les figures planes (telles que celles qui existent entre le rayon d'un cercle et les côtés du triangle, du pentagone, de l'hexagone et du décagone réguliers inscrits) et sont résolues en appliquant les méthodes du livre X et comme applications de ces méthodes. Les six dernières propositions sont consacrées aux cinq solides réguliers. Bretschneider pense que le livre XIII est un sommaire d'une partie de l'ouvrage perdu d'Aristé, mais les applications des méthodes du dixième livre sont fort probablement dues à Theætète.

Les livres VII, VIII, IX et X des *Eléments* sont réservés à la théorie des nombres. Les opérations élémentaires du calcul ou λογιστική étaient enseignées aux enfants. Platon les considérait comme enfantines, et les mathématiciens grecs ne s'en occupèrent jamais beaucoup; on ne les regardait pas comme faisant partie d'un cours de mathématiques. Nous ne savons pas comment on enseignait ces premières notions, mais il est certain que l'abaque devait jouer un grand rôle. L'étude scientifique des nombres était appelée ἀριθμητική, ou « science des nombres. » Elle avait spécialement pour objet les rapports, les proportions et la théorie des nombres.

En discutant l'ordre adopté par Euclide, nous ne devons pas perdre de vue que ses auditeurs étaient déjà initiés à l'art du calcul. Nous décrivons plus loin [1] le système de numération en usage chez les Grecs, mais il était si peu commode qu'il rendait l'étude de la théorie des nombres bien plus difficile que celle de la géométrie; c'est pourquoi Euclide commençait son cours de mathématiques par la géométrie plane. Il faut observer en même temps que

(1) Voir plus loin, chap. VII.

les résultats obtenus dans le second livre, bien que géométriques par la forme, sont susceptibles d'être exprimés dans le langage algébrique, et le fait que les nombres pouvaient ainsi être représentés par des lignes, avait été probablement constaté à une époque antérieure. Cette méthode graphique, consistant à représenter les nombres par des lignes, possédait l'avantage évident de fournir des démonstrations applicables à tous les nombres, rationnels ou irrationnels. Il faut noter que parmi les propositions du second livre, on trouve des démonstrations géométriques, des propriétés distributives et commutatives de la multiplication, et des solutions géométriques des équations.

$$a(a - x) = x^2,$$

c'est-à-dire

$$x^2 + ax - a^2 = 0 \qquad \text{(Euc. prop. 11, livre II)}$$

et

$$x^2 - ab = 0 \qquad \text{(Euc. prop. 14, livre II).}$$

La solution de la première de ces équations est donnée sous la forme

$$\sqrt{a^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2} - \frac{1}{2}a.$$

Les solutions des équations

$$ax^2 - bx + c = 0 \qquad ax^2 + bx - c = 0$$

sont données également dans Euclide (livre VI, prop. 28 et 29).

Le cas de $a = 1$ peut se déduire des identités établies dans les propositions 5 et 6 du livre II, mais il est douteux que le fait ait été constaté par Euclide.

Les résultats obtenus dans le cinquième livre consacré à la théorie des proportions, s'appliquent à toutes les grandeurs et, par suite, sont vrais pour les nombres aussi bien que pour les grandeurs géométriques. Dans l'opinion de beaucoup d'auteurs, c'est la manière la plus satisfaisante de traiter la théorie des proportions et Euclide l'a prise pour base de sa théorie des nombres.

On croit que cette théorie des proportions est due à Eudoxe ; l'exposition du même sujet faite dans le livre VII est moins élégante : elle reproduit probablement la méthode Pythagoricienne.

Cette double étude des proportions confirme l'opinion qu'Euclide mourut avant d'avoir eu le temps de retoucher son ouvrage.

Dans les livres VII, VIII et IX, Euclide étudie la théorie des nombres rationnels. Le septième livre débute par quelques définitions basées sur la notation pythagoricienne. Dans les propositions 1 à 3 il montre que, si en appliquant le procédé usuel pour trouver la plus grande commune mesure de deux nombres, le dernier diviseur est l'unité, les deux nombres sont premiers entre eux ; il déduit de là la règle pour trouver leur plus grand commun diviseur. Les propositions 4 à 22 comprennent la théorie des fractions qui repose sur celle des proportions ; entre autres résultats il démontre que $ab = ba$ (proposition 16). Dans les propositions 23 à 34, il s'occupe des nombres premiers et énonce beaucoup de propositions que l'on retrouve encore dans les livres classiques modernes. Dans les propositions de 35 à 41, il donne la théorie du plus petit multiple commun de plusieurs nombres et quelques problèmes divers.

Le huitième livre est principalement consacré aux nombres en proportion continue, c'est-à-dire en progression géométrique ; les cas où l'un des nombres (ou plusieurs) est un produit, un carré, ou un cube, sont spécialement étudiés.

Dans le neuvième livre, Euclide poursuit son étude sur les progressions géométriques, et dans la proposition 35 il énonce la règle pour sommer une série de n termes, bien que la démonstration ne soit donnée que pour le cas où $n = 4$. Il développe aussi la théorie des nombres premiers, montre que leur nombre est illimité (proposition 20) et examine les propriétés des nombres pairs et impairs, il termine en établissant que tout nombre de la forme $2^{n-1}(2^n - 1)$, lorsque $2^n - 1$ représente un nombre premier, est « parfait » (proposition 36).

Dans le dixième livre, Euclide traite des grandeurs irrationnelles, et comme les Grecs ne possédaient aucun symbole pour représenter les quantités incommensurables, il a dû adopter un mode de représentation géométrique. Les propositions 1 à 21 roulent en général sur les grandeurs incommensurables. Le reste du livre, c'est-à-dire les propositions de 22 à 117, est consacré à la discussion de chacune des variétés possibles de lignes pouvant être représentées par l'expression $\sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$ dans laquelle a et b désignent

des lignes incommensurables. Il en existe vingt-cinq espèces, et le fait qu'Euclide a pu les découvrir et les classer toutes est, suivant l'opinion d'une autorité aussi compétente que celle de Nesselmann, la preuve la plus remarquable de son talent. Il semble tout d'abord presque impossible qu'il ait pu obtenir un pareil résultat sans le secours de l'Algèbre, mais il est à peu près certain qu'il y est arrivé réellement par un raisonnement abstrait. La théorie des grandeurs incommensurables ne reçut depuis lors aucun développement jusqu'à Léonard et Cardan, c'est-à-dire pendant un intervalle de plus de mille ans.

Dans la dernière proposition du dixième livre (prop. 117), Euclide établit que la diagonale d'un carré est incommensurable avec le côté du carré. Sa démonstration est si courte et si simple que nous pouvons la donner ici.

S'il était possible que le côté d'un carré fut commensurable avec sa diagonale, le rapport de ces deux lignes pourrait être représenté par $\frac{a}{b}$, a et b étant des nombres entiers. On peut toujours supposer ce rapport réduit à sa plus simple expression et les nombres a et b n'ayant alors d'autre diviseur commun que l'unité, sont premiers entre eux. D'après la proposition 47 du livre I, $b^2 = 2a^2$, par suite b^2 est un nombre pair et il en est de même de b. Mais puisque a est premier avec b, ce nombre a doit être impair.

Or b pouvant se mettre sous la forme $2n$, on a, en remplaçant b^2 par $4n^2$ dans l'égalité précédente

$$2a^2 = 4n^2 \quad \text{ou} \quad a^2 = 2n^2.$$

Dès lors a^2 et, par suite, a, sont des nombres pairs.

Ainsi, le même nombre a devrait être à la fois pair et impair, ce qui est absurde. Donc le côté et la diagonale du carré ne peuvent être des longueurs commensurables entre elles.

Hankel pense que cette démonstration est due à Pythagore, et qu'elle fut insérée dans les *Eléments* à cause de son intérêt historique.

La même proposition se trouve démontrée d'une autre façon dans le livre X (proposition 9).

En dehors des *Eléments* et des deux collections d'exercices mentionnées ci-dessus (que l'on possède encore), Euclide écrivit les ouvrages suivants sur la géométrie :

Un traité élémentaire sur *les sections coniques*, en quatre livres ;

Un ouvrage sur *les surfaces courbes* (probablement et principalement le cône et le cylindre) ;

Une collection de *Sophismes géométriques* qui devaient être proposés comme exercices pour faire découvrir les erreurs ;

Et un traité sur les *Porismes* en trois livres. Tous ces ouvrages sont perdus, mais l'ouvrage sur les Porismes a été discuté si longuement par Pappus que quelques savants ont pensé qu'il serait peut-être possible de le reconstituer. En particulier, Chasles publia, en 1860, une restitution des *Porismes*. On y trouve les conceptions de la division harmonique et des propriétés projectives, c'est-à-dire les fondements de la géométrie moderne, que Chasles et d'autres écrivains de son siècle ont si largement développés. Le recueil est remarquable et ingénieux ; personne, bien entendu, ne peut prouver qu'il n'est pas la reproduction exacte de l'ouvrage écrit par Euclide, mais les explications de Pappus au sujet des *Porismes* ne nous sont parvenues que mutilées et De Morgan avoue franchement avoir trouvé ces fragments inintelligibles ; c'est là une opinion partagée, croyons-nous, par beaucoup de ceux qui les ont étudiés.

Euclide écrivit un Traité sur l'*Optique* qu'il exposa géométriquement. L'ouvrage contient 61 propositions reposant sur 12 hypothèses ; il débute par cette supposition : que les objets sont rendus visibles parce qu'ils sont frappés par des rayons lumineux émis par l'œil, en ligne droite « attendu que, si la lumière nous venait de l'objet, nous ne pourrions faire autrement que d'apercevoir une aiguille sur le sol, bien que le contraire arrive souvent. » Quelques-uns des plus anciens auteurs lui attribuent également un ouvrage appelé *Catoptrique*, mais cela est douteux, car le texte est incorrect. Ce livre contient 31 propositions relatives à la réflexion sur les miroirs plans, convexes et concaves. La partie géométrique de ces deux ouvrages est traitée d'après la méthode Euclidienne.

On attribue à Euclide une ingénieuse démonstration [1] du principe du levier, mais son authenticité est douteuse.

Il écrivit aussi les *Phænomena*, traité d'astronomie géométrique

[1] Elle est donnée (d'après l'arabe) par F. Wœpcke, dans le *Journal Asiatique*, série 4, vol. XVIII, octobre 1851, pp. 225-232.

qui contient des renseignements sur un livre d'Autolycus [1] et sur une géométrie sphérique dont l'auteur est inconnu. Pappus avance encore qu'Euclide composa un livre sur les éléments de la musique, mais ceci peut se rapporter à l'ouvrage *Sectio Canonis* qui est en effet d'Euclide et traite des intervalles musicaux.

Ajoutons à tous ces renseignements sur les écrits d'Euclide ce petit problème que l'on trouve dans l'Anthologie Palatine et que la tradition lui attribue.

« Un mulet et un âne chargés de blé se rendaient au marché. Le mulet dit à l'âne — Si tu me donnes une mesure je porterai alors deux fois autant que toi, mais si je t'en passe une, nos charges se trouveront égales — dis-moi d'après cela, savant géomètre, quelles étaient leurs charges. » On ne peut affirmer que cette question soit d'Euclide. Il n'y a toutefois à cela aucune impossibilité. Il faut remarquer qu'Euclide raisonnait seulement sur les grandeurs sans s'occuper de leurs valeurs numériques, mais il semble d'après les ouvrages d'Aristarque et d'Archimède qu'il n'en était pas ainsi pour tous les géomètres grecs de cette époque.

Comme l'un des ouvrages du premier a été conservé, il va nous fournir un nouveau spécimen des mathématiques grecques de cette période.

Aristarque. — *Aristarque* de Samos, né en — 310 et mort en — 250, était plutôt un astronome qu'un mathématicien. Il prétendait que le soleil est le centre de l'Univers et que la terre tourne autour du soleil. Cette conception, malgré la simplicité avec laquelle elle permettait d'expliquer les divers phénomènes astronomiques, n'eut aucun succès auprès de ses contemporains. Mais ses propositions sur la mesure des dimensions du soleil et de la lune et de leur distance à la terre étaient vraies en principe et les résultats de ses calculs furent généralement acceptés (par Archimède, par exemple, dans les Ψαμμίτης [4] que nous mentionnons plus loin).

(1) Autolycus vivait à Pitane en Eolide et florissait vers — 330. Ses deux ouvrages sur l'*Astronomie* contenant 43 propositions sont les plus anciens traités de mathématiques grecs existants.

La bibliothèque d'Oxford en possède un manuscrit. Une traduction latine a été éditée par F. Hultsch. Leipzig, 1885.

(2) Περὶ μεγέθων καὶ ἀποστημάτων Ἡλίου καὶ Σελήνης, édité par F. Nizze. Stralsund, 1856.

Des traductions latines furent publiées, par F. Commandin, en 1572 et par

Ces propositions sont au nombre de dix-neuf, nous exposerons la septième pour donner un exemple de la façon dont les Grecs tournaient la difficulté quand il s'agissait de trouver la valeur numérique des quantités qu'ils ne pouvaient mesurer.

Aristarque observa la distance angulaire entre la lune et le soleil au moment de la quadrature; il trouva pour valeur de l'angle $\frac{29}{30}$ d'un angle droit : la valeur exacte est d'environ 89°21'. Il démontra ensuite que la distance du soleil à la terre est plus grande que 18 fois, mais moindre que 20 fois la distance de la lune à la terre.

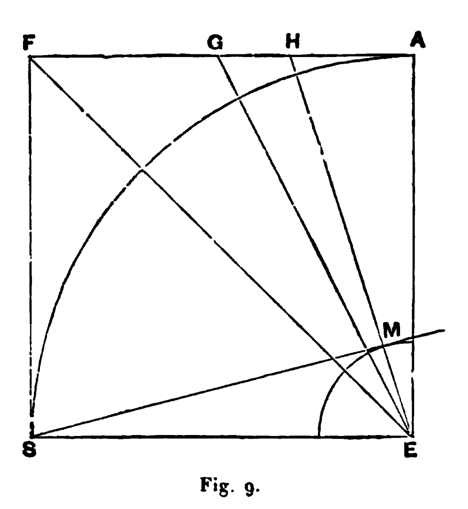


Fig. 9.

Soient S le soleil, E la terre et M la lune au moment de la quadrature, c'est-à-dire lorsque la partie éclairée visible est exactement un demi-cercle. L'angle formé par les droites MS et ME est alors un angle droit. De E comme centre avec les rayons ES et EM, décrivons des arcs de cercle comme l'indique notre figure. Traçons EA perpendiculaire sur ES, EF bissectrice de l'Angle AES et EG bissectrice de l'angle AEF. Soit H le point où la droite EM prolongée coupe AF. Par hypothèse, l'angle AEM vaut $\frac{1}{30}$ de droit (*fig.* 9).

J. Wallis, en 1688 ; et une traduction française, par F. d'Urban, a été éditée en 1810 et 1823.

Nous avons alors

$$\frac{\text{angle AEG}}{\text{angle AEH}} = \frac{\frac{1}{4}\text{ de droit}}{\frac{1}{30}\text{ de droit}} = \frac{15}{2},$$

Par suite

$$(\alpha) \qquad \frac{AG}{AH} = \frac{\text{tang. AEG}}{\text{tang. AEH}} > \frac{15}{2}.$$

On a encore

$$\frac{\overline{FG}^2}{\overline{AG}^2} = \frac{\overline{EF}^2}{\overline{EA}^2} = \frac{2}{1}.$$

Par conséquent

$$\frac{\overline{FG}^2}{\overline{AG}^2} > \frac{49}{25}.$$

$$(\beta) \qquad \frac{FG}{AG} > \frac{7}{5}, \qquad \frac{AF}{AG} > \frac{12}{5}, \qquad \frac{AE}{AG} > \frac{12}{5}.$$

Comparant les inégalités (α) et (β), on en déduit

$$\frac{AE}{AH} > \frac{18}{1};$$

et comme les triangles EMS, EAH sont semblables

$$\frac{ES}{EM} > \frac{18}{1}.$$

Nous laissons au lecteur, que cela peut intéresser, le soin de résoudre la seconde partie du problème. Par une méthode semblable, Aristarque trouva les rapports entre les rayons du soleil, de la terre et de la lune.

Nous avons très peu de renseignements sur *Conon* et *Dosithée*, les successeurs immédiats d'Euclide et sur leurs contemporains *Zeuxippe* et *Nicoteles* qui, très vraisemblablement, professèrent aussi à Alexandrie; nous savons cependant qu'Archimède qui, probablement suivit les cours de cette université peu de temps après la mort d'Euclide, avait une haute opinion de leur savoir et correspondait avec les trois premiers. Leurs travaux et leur renommée ont été complètement éclipsés par Archimède, dont le génie mathématique n'a été surpassé que par celui de Newton.

Archimède (1). — *Archimède*, qui était probablement allié à la famille royale de Syracuse, naquit dans cette ville en — 287 et mourut en — 212. Il se rendit à Alexandrie où il suivit les cours de Conon, revint en Sicile et y passa le reste de sa vie. Il ne prit aucune part aux affaires publiques. Génie incomparable dans les arts mécaniques, il savait surmonter toutes les difficultés, jamais on ne fit en vain appel à ses lumières.

Comme Platon, Archimède mettait la science pure au-dessus des applications qu'on en pouvait faire. Il n'en fit pas moins un grand nombre d'inventions utiles. Beaucoup de nos lecteurs savent sans doute comment il parvint à découvrir la fraude de l'orfèvre et connaissent l'emploi qu'il fit des miroirs ardents pour brûler les vaisseaux romains qui bloquaient Syracuse.

Un fait moins connu est le suivant : le roi Hiéron ayant fait construire un navire, et ne pouvant à cause de sa grandeur le lancer hors de la cale de construction, eut recours à Archimède. Ce dernier réussit à surmonter la difficulté au moyen d'un appareil composé d'un système de moufles actionné par une vis sans fin ; mais nous ne savons pas exactement comment la machine fonctionnait. On prétend que c'est en recevant à cette occasion les félicitations d'Hiéron, qu'Archimède fit cette réflexion bien connue qu'il pourrait soulever la terre s'il avait un point d'appui fixe.

La plupart des mathématiciens connaissent une autre de ses inventions : la vis d'Archimède. C'est un tube ouvert à ses deux extrémités et recourbé en forme de spirale comme un tire bouchon. Si l'une des extrémités du tube est plongée dans l'eau, et si l'axe de l'instrument est suffisamment incliné sur la verticale, en imprimant à l'appareil un mouvement de rotation autour de l'axe, l'eau s'élève et sort par l'autre extrémité. Pour que l'instrument fonctionne l'inclinaison de l'axe sur la verticale doit être plus grande que celle de la tangente à l'hélice de la vis. Cet appareil était utilisé en Egypte pour assécher les champs après les inondations du Nil ; il était également fréquemment employé pour enlever l'eau de la cale des navires.

(1) Outre Cantor, chap. xiv, xv et Gow, pp. 221-244, voir *Quæstiones Archimedeæ*, par J. L. Heiberg. Copenhague, 1879 ; et Marie, vol. I, pp. 81-134. La plus récente et la meilleure édition des œuvres d'Archimède qui nous sont parvenus est celle de J. L. Heiberg, en 3 volumes. Leipzig, 1880-1881.

Le récit de l'incendie des vaisseaux romains provoqué par Archimède, en concentrant sur eux au moyen de miroirs concaves, la chaleur solaire n'a été propagé que quelques siècles après sa mort, et est généralement considéré comme apocryphe, mais il n'est pas aussi invraisemblable que l'on pourrait communément le croire. Le miroir d'Archimède était constitué par un hexagone entouré de plusieurs autres miroirs polygonaux de chacun vingt-quatre côtés, et en 1747, Buffon [1] réussit en n'employant qu'un seul miroir fait sur le même plan et composé de 168 petits miroirs, à enflammer du bois à une distance de 140 pieds. Si on observe que ces expériences ont été faites à Paris, il ne paraît pas invraisemblable qu'Archimède ait pu incendier une flotte romaine en Sicile pendant l'été en utilisant plusieurs miroirs.

L'opération n'aurait même pas présenté de grandes difficultés sur des navires mouillés tout près de la ville. Il n'est peut-être pas sans intérêt de mentionner qu'une invention du même genre aurait été utilisée en 514 après J.-C., lors de la défense de Constantinople ; le fait est rapporté par des écrivains qui étaient présents, ou qui tenaient leurs informations de ceux qui assistèrent au siège. Quoi qu'il en soit de cette histoire des miroirs, il n'en est pas moins certain qu'Archimède imagina les catapultes qui eurent pour effet de tenir fort longtemps en échec les Romains qui assiégeaient Syracuse. Ces engins étaient construits de telle sorte que l'on pouvait, à volonté, en diminuer ou en augmenter la portée et qu'il était possible d'envoyer des projectiles à travers le vide des créneaux, sans exposer ceux qui s'en servaient aux coups de l'ennemi. Leur utilité fut si bien constatée que les Romains transformèrent le siège en blocus, et la prise de la ville (— 212) fut retardée de trois ans.

Archimède fut tué pendant le pillage qui suivit, malgré l'ordre de Marcellus, de respecter sa vie et sa maison. On raconte qu'un soldat interrompit ses méditations pendant qu'il étudiait une figure géométrique tracée sur du sable. Archimède l'ayant invité à s'écarter pour ne pas effacer son dessin, le soldat furieux de s'entendre donner des ordres, et ignorant quel était le vieillard qui lui parlait,

(1) Voir *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences*, pour 1747. Paris 1752, pp. 82-101.



[illegible] un autre récit plus vraisembla-
[illegible]ée à la vue des instruments en
[illegible] prirent pour de l'or.
[illegible]de un superbe tombeau. Pour
[illegible]imé de son vivant, on grava
[illegible]ans un cylindre; cette figure
[illegible] volume d'une sphère est égal
[illegible]droit circonscrit et sa surface
[illegible]rand cercle. Cicéron [1] donne
[illegible]ouronnées de succès, faites en
[illegible]

[illegible]çon concise les œuvres ou les
[illegible]parce qu'il a écrit sur presque
[illegible]s de son époque, en partie par
[illegible]te de monographies séparées.
[illegible] à produire des traités métho-
[illegible]tous les étudiants ayant acquis
[illegible] écrivait un grand nombre de
[illegible] surtout aux mathématiciens les
[illegible]ous ses ouvrages, celui qui de
[illegible]est son traité sur la mécanique
[illegible]accord avec ses contemporains,
[illegible] à ses découvertes en géométrie
[illegible]abolique et sphérique, et sur la
[illegible] plus tard que ses nombreuses
[illegible]urtout l'admiration.
[illegible]vrages qui nous restent d'Ar-
[illegible] *a*) un sur la *mesure du cercle;*
[illegible]*abole* et *c*) le troisième *sur les*
[illegible]

[illegible]trois propositions :
[illegible]t voir que la surface du cercle
[illegible]ngle rectangle, dont les côtés
[illegible]ayon *a* et à la circonférence du
[illegible], que l'aire du cercle a pour
[illegible] *a*).

[1] [illegible] v. 23.

Dans la seconde, il montre que le rapport $\frac{\pi a^2}{(2a)^2}$ diffère très peu de $\frac{11}{14}$; et ensuite, dans la troisième, que π est plus petit que $3\frac{1}{7}$ et plus grand que $3\frac{10}{71}$. Ces théorèmes sont, bien entendu, démontrés géométriquement.

Pour établir les deux dernières propositions, il inscrit et circonscrit au cercle des polygones réguliers de 96 côtés, calcule leurs périmètres et en admettant que la circonférence du cercle est comprise entre les deux, il obtient le résultat

$$\frac{6336}{2017\frac{1}{4}} < \pi < \frac{14688}{4673\frac{1}{2}}$$

dont il déduit les limites indiquées ci-dessus.

Il semblerait d'après sa démonstration qu'il était en possession d'une méthode (inconnue aujourd'hui) pour extraire approximativement les racines carrées des nombres. La table qu'il a formée pour les valeurs numériques des cordes d'un cercle est une table des sinus naturels, et peut avoir suggéré les recherches faites ultérieurement sur ces lignes par Hipparque et Ptolémée.

b) La *quadrature de la Parabole* contient vingt quatre propositions. Archimède commence son ouvrage, qu'il envoya à Dosithée, en établissant quelques propriétés des coniques (prop. de 1 à 5). Il énonce ensuite d'une façon exacte, l'aire d'un segment parabolique déterminé par une corde quelconque et donne une démonstration, qui repose sur la détermination préliminaire, au moyen de la mécanique, du rapport de deux aires s'équilibrant lorsqu'elles sont suspendues aux extrémités des bras d'un levier (prop. 6 à 17), et enfin il donne une démonstration géométrique du même résultat (prop. 18-24). Cette dernière est, bien entendu, basée sur la méthode d'exhaustion, mais pour être plus bref, nous allons, en la reproduisant, employer la méthode des limites.

Considérons le segment de parabole limité par la corde PQ. Traçons le diamètre VM correspondant à cette corde. D'après une proposition démontrée précédemment, V est de tous les points de l'arc parabolique le plus éloigné de la corde PQ.

Représentons par Δ la surface du triangle PVQ, et dans les seg-

ments limités par PV et VQ inscrivons des triangles en opérant de la même manière que pour le triangle VPQ.

Chacun de ces triangles étant équivalent à $\frac{1}{8}\Delta$ (ceci résulte d'une proposition antérieure), leur somme vaut $\frac{1}{4}\Delta$.

De même, dans les quatre segments déterminés par la dernière construction, inscrivons des triangles; la somme de leurs aires sera $\frac{1}{16}\Delta$.

En opérant ainsi, on arrive à cette conclusion que le segment parabolique considéré est équivalent à la limite vers laquelle tend la somme (*fig.* 10)

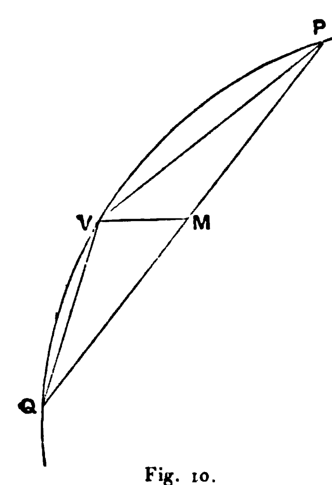


Fig. 10.

$$\Delta + \frac{\Delta}{4} + \frac{\Delta}{16} + \ldots\ldots + \frac{\Delta}{4^n} + \ldots$$

lorsque n est infiniment grand.

Le problème se réduit par suite à trouver la somme d'une suite de termes en progression géométrique décroissante.

Archimède procédait comme il suit :

Considérons une suite de grandeurs A, B, C, D, ..., J, K telles que chacune d'elles soit le quart de celle qui la précède immédiatement. Prenons les quantités b, c, d, ..., k respectivement égales à

$$\frac{1}{3}B,\ \frac{1}{3}C,\ \frac{1}{3}D,\ \ldots,\ \frac{1}{3}K.$$

On a alors

$$B + b = \frac{1}{3}A,\quad C + c = \frac{1}{3}B,\quad \ldots\ldots,\quad K + k = \frac{1}{3}J,$$

et, par suite

$$(B + C + \ldots + K) + (b + c + \ldots + k) = \frac{1}{3}(A + B + C + \ldots + J).$$

Mais, par hypothèse

$$(b + c + \ldots + j + k) = \frac{1}{3}(B + C + \ldots + J) + \frac{1}{3}K.$$

Par conséquent

$$(B + C + \ldots + K) + \frac{1}{3}K = \frac{1}{3}A,$$

et

$$A + B + C + \ldots + K = \frac{4}{3}A - \frac{1}{3}K.$$

C'est-à-dire que la somme de ces grandeurs surpasse du tiers de la plus petite. quatre fois le tiers de la plus grande. Si maintenant nous revenons au problème de la parabole et si nous supposons que la grandeur A représente Δ, les grandeurs B, C, D... représenteront respectivement $\frac{\Delta}{4}$, $\frac{\Delta}{16}$, ..., et à la limite K est infiniment petit.

Par conséquent l'aire du segment de parabole est équivalent aux $\frac{4}{3}$ de celle du triangle PVQ ou aux $\frac{2}{3}$ du rectangle ayant pour base PQ et pour hauteur la distance du point V à PQ.

Nous pouvons ajouter que dans les 5° et 6° propositions de son livre sur les conoïdes et les sphéroïdes, Archimède détermine l'aire d'une ellipse.

c) Son traité *des spirales* contient vingt-huit propositions sur les propriétés de la courbe connue aujourd'hui sous le nom de spirale d'Archimède. Il avait été adressé à Dosithée à Alexandrie accompagné d'une lettre, de laquelle il ressortirait qu'Archimède avait antérieurement communiqué le résumé de ses résultats à Conon qui mourut avant de les avoir démontrés.

Il définit la spirale en disant que l'angle vectoriel et le rayon vecteur croissent tous les deux d'une façon uniforme, il en résulte que l'équation de cette courbe est

$$r = C\theta.$$

Archimède découvrit la plupart de ses propriétés et détermina l'aire comprise entre la courbe et deux rayons vecteurs. Il arrivait à ce résultat en remarquant, en employant le langage du calcul infi-

nitésimal, qu'un élément d'aire est

$$> \frac{1}{2} r^2 d\theta \quad \text{et} \quad < \frac{1}{2} (r + dr)^2 d\theta.$$

Pour effectuer la somme des aires élémentaires, il donne deux lemmes au moyen desquels il effectue (géométriquement) la sommation des séries

$$a^2 + (2a)^2 + (3a)^2 + \dots + (na)^2 \quad \text{(proposition 10)}$$

et

$$a + 2a + 3a + \dots + na \quad (\quad \text{»} \quad 11).$$

d) Comme suite à cet ouvrage, Archimède écrivit un petit traité sur *les méthodes géométriques*, et divers mémoires sur *les lignes parallèles, les triangles, les propriétés des triangles rectangles. les data*, sur l'*heptagone inscrit dans un cercle* et sur *les systèmes de cercles se touchant mutuellement*. Il est possible qu'il en ait composé d'autres. Tous ces ouvrages sont aujourd'hui perdus, mais il est probable que des fragments de quatre des propositions du dernier mémoire mentionné ont été reproduits dans une traduction latine d'un manuscrit arabe intitulé « *lemmes d'Archimède* ».

II) Sur la *Géométrie à trois dimensions*, les œuvres d'Archimède qui nous restent sont au nombre de deux, savoir *a*) *De la sphère et du Cylindre* et *b*) *Des Conoïdes et des Sphéroïdes*.

a) Le traité *de la sphère et du cylindre* contient soixante propositions classées en deux livres. Archimède l'envoya comme tant d'autres de ses ouvrages, à Dosithée, à Alexandrie ; mais il semble avoir voulu, dans la circonstance, jouer un mauvais tour à ses amis, car il présenta à dessein d'un façon inexacte, quelques-uns des résultats obtenus « afin de déconcerter ces soi-disants géomètres qui prétendent avoir tout trouvé sans jamais en présenter les preuves, et quelquefois proclament qu'ils ont fait une découverte, quand cette découverte est impossible. » Il regardait cet ouvrage comme son chef-d'œuvre. Il est trop étendu pour que nous songions à en donner une analyse, mais nous remarquerons, qu'il contient les expressions de la surface et du volume, de la pyramide, du cône et de la sphère en même temps que des figures engendrées par la révolution des polygones réguliers inscrits dans le cercle en tournant autour d'un diamètre. Il contient plusieurs autres proposi-

tions sur les aires et les volumes parmi lesquelles la plus intéressante est, peut-être, la proposition 10 du second livre. « De tous les segments sphériques d'égale surface, l'hémisphère a le plus grand volume. » Dans la seconde proposition du second livre, il énonce ce théorème remarquable, qu'une ligne de longueur a ne peut être divisée de telle sorte que l'on ait $\frac{a-x}{b} = \frac{4a^2}{9x^2}$ (b étant une longueur donnée) que si b est plus petit que $\frac{a}{3}$; ce qui revient à dire que l'équation cubique $x^3 - ax^2 + \frac{4}{9}a^2b = 0$ ne peut avoir une racine réelle et positive que si a est plus grand que $3b$. Il démontrait cette proposition pour compléter la solution de ce problème : diviser une sphère donnée par un plan, de façon que les volumes des segments déterminés soient dans un rapport donné.

On trouve une équation cubique très simple dans l'arithmétique de Diophante, mais sauf cette seule exception aucune équation de cette forme ne se présente plus dans l'histoire des mathématiques en Europe pendant plus de mille ans.

b) *Des conoïdes et des sphéroïdes.* — Ce petit traité (envoyé à Dosithée, à Alexandrie) renferme quarante propositions concernant principalement la recherche des volumes des corps engendrés par la révolution des sections coniques autour de leur axe.

c) Archimède écrivit aussi un traité sur certains *polyèdres semi-réguliers*, c'est-à-dire sur les solides formés par des polygones réguliers d'espèces différentes. Cet ouvrage est perdu.

III) Sur l'*Arithmétique*, Archimède composa deux mémoires. L'un (qu'il adressa à Zeuxippe) traitait des principes de la numération et n'existe plus. L'autre (adressé à Gelon) qu'il intitula Ψαμμίτης (l'*Arénaire*) et dans lequel il examinait une objection qui avait été élevée contre son premier mémoire.

L'objet du premier opuscule avait été de suggérer un système convenable, permettant de représenter les nombres si grands qu'ils soient, système dont quelques philosophes de Syracuse avaient mis en doute la possibilité. Le peuple, disait Archimède, s'imagine que les grains de sable du rivage de la Sicile représentent un nombre que le calcul ne saurait représenter; il affirme que ce nombre peut être évalué, et bien plus, il se propose de montrer la puissance de sa méthode en formant un nombre supérieur à celui des grains de

sable qui pourraient remplir l'univers, c'est-à-dire une sphère dont le centre serait la terre, et le rayon la distance du soleil à la terre. Il commence en faisant observer qu'avec la nomenclature grecque ordinaire, on ne pouvait écrire les nombres que de 1 à 10^8 : ils sont ainsi exprimés avec ce que l'on pourrait appeler, dit-il, les unités du premier ordre. Si on considère 10^8 comme une unité du second ordre, un nombre quelconque entre 10^8 et 10^{16} pourra être considéré comme composé d'unités du second ordre avec un certain nombre d'unités du premier ordre. Si 10^{16} est une unité du troisième ordre, on pourra exprimer un nombre quelconque jusqu'à 10^{24} et ainsi de suite. En supposant qu'une sphère dont le rayon vaut la quatre-vingtième partie de la largeur du doigt soit remplie par 10 000 grains de sable et que le diamètre de l'univers ne dépasse pas 10^{10} stades, il trouvait que le nombre des grains de sable nécessaires pour remplir l'univers est plus petit que 10^{63}.

Ce système de numération avait probablement été mis en avant comme une simple curiosité scientifique. Le système de numération grecque, tels que nous le connaissons, n'avait été introduit que récemment, très vraisemblablement à Alexandrie, et était suffisant pour toutes les applications ; Archimède l'employait dans tous ses écrits. D'un autre côté, on a prétendu qu'Archimède et Apollonius avaient pour leurs propres recherches, une notation symbolique basée sur le système décimal, et il est possible que ce fut celle dont nous venons de donner une idée. Les unités proposées par Archimède formaient une progression géométrique dont la raison est 10^8. Incidemment, il ajoute qu'il est utile de se rappeler que le produit du m^e terme d'une progression géométrique dont le premier terme est 1, par le n^e terme, est égal au $(m+n)^{me}$ terme de la suite, c'est-à-dire que l'on a : $p^m \times p^n = p^{m+n}$.

A ces deux écrits sur l'arithmétique, nous pouvons ajouter le problème suivant resté célèbre qu'il avait proposé aux mathématiciens d'Alexandrie : Le Soleil avait un troupeau de taureaux et de vaches, et tous ces animaux étaient blancs, gris, bruns ou de couleur pie. Le nombre des taureaux pies était plus petit que celui des taureaux blancs et la différence était égale aux $\frac{5}{6}$ du nombre des taureaux gris ; il était également plus petit que le nombre des taureaux gris et la différence était égale aux $\frac{9}{20}$ du nombre des tau-

reaux blancs, enfin, il était encore moindre que le nombre des taureaux bruns et la différence était égale aux $\frac{13}{42}$ du nombre des taureaux blancs. Le nombre des vaches blanches était égal aux $\frac{7}{12}$ du nombre des animaux gris (taureaux et vaches), le nombre des vaches grises était les $\frac{9}{20}$ du nombre des animaux bruns, le nombre des vaches brunes était les $\frac{11}{30}$ du nombre des animaux de couleur pie, enfin le nombre des vaches pies était les $\frac{13}{42}$ du nombre des animaux blancs. Archimède demandait la composition du troupeau.

Le problème est indéterminé, mais la solution en nombres entiers les plus petits possibles est :

Taureaux blancs.	10 366 482	Vaches blanches.	7 206 360
» gris .	7 460 514	» grises. .	4 893 246
» bruns.	7 358 060	» brunes .	3 515 820
» pies .	4 149 387	» pies . .	5 439 213

Dans la solution classique attribuée à Archimède, ces nombres sont multipliés par 80.

D'après Nesselmann, ce problème aurait été attribué par erreur à Archimède. Il diffère certainement de ceux que l'on trouve dans ceux de ses ouvrages qui subsistent, mais comme ce sont les anciens qui lui en ont attribué la paternité, on le croit généralement authentique. Il est possible cependant que l'énoncé nous soit parvenu légèrement modifié ; il est en vers, et un copiste plus moderne a ajouté cette condition additionnelle que la somme des taureaux blancs et gris doit être un carré parfait, et la somme des taureaux pies et bruns un nombre triangulaire.

Il n'est peut-être pas inutile de noter que dans l'énoncé, les fractions sont représentées par des sommes de fractions ayant toutes pour numérateur l'unité, ainsi Archimède écrivait $\frac{1}{7}+\frac{1}{6}$ au lieu de $\frac{13}{42}$, comme dans le papyrus d'Ahmès.

IV) Sur la *mécanique* on possède encore deux ouvrages d'Archimède : (*a*) sa *mécanique* et (*c*) son *hydrostatique*.

a) La *mécanique* est un traité de statique dans lequel il est fait spécialement mention de l'équilibre des lames planes et des pro-

[illegible] ; il contient vingt cinq proposi-
[illegible] mière partie du livre I, la plupart
[illegible] entre de gravité sont démontrées
[illegible] vre I (prop. 9 — 15) et le livre II
[illegible] ion des centres de gravité d'une
[illegible] es que les parallélogrammes, les
[illegible] paraboliques.

[illegible] un traité sur les *leviers* et peut-
[illegible] sées de son temps.

[illegible] savons d'après Pappus qu'il conte-
[illegible] e dont on peut déplacer un poids
[illegible] née. C'est probablement dans cet
[illegible] la théorie d'une certaine poulie
[illegible] me de trois ou plus de trois pou-
[illegible] et qui fut utilisé dans quelques
[illegible] sait ([1]) qu'il s'était vanté de pou-
[illegible] un point fixe, et un commentateur
[illegible] il ajoutait que l'opération s'effec-
[illegible] composée.

[illegible] *flottants* contient dix-neuf propo-
[illegible] ne la première tentative faite pour
[illegible] raisonnements mathématiques.
[illegible] l'évènement qui le détermina à
[illegible] et. Hiéron, roi de Syracuse avait
[illegible] quantité d'or, pour lui faire une
[illegible] erminé et livré, la couronne pesait
[illegible] nne foi de l'ouvrier fut suspectée ;
[illegible] prié une certaine quantité d'or à
[illegible] ds égal d'argent. On consulta en
[illegible] rès, se trouvant un jour dans un
[illegible] remarqua que son corps était sou-
[illegible] se faisait d'autant plus sentir qu'il
[illegible] dans l'eau. Saisissant toute la
[illegible] lança dehors dans l'état où il se
[illegible] re en s'écriant εὕρηκα, εὕρηκα, « j'ai

[illegible]

Peu de temps après (pour suivre un récit plus récent), il constata par des expériences directes que lorsqu'il pesait dans l'eau des poids, trouvés primitivement égaux, d'or et d'argent, l'égalité de poids ne subsistait plus : le poids de chaque masse métallique paraissait diminuer du poids de l'eau qu'elle déplaçait, et comme la masse d'argent était plus volumineuse que celle de l'or, son poids était plus diminué. En équilibrant par suite dans la balance, la couronne par un certain poids d'or, et en plongeant le tout dans l'eau, le plateau chargé d'or devait l'emporter sur celui portant la couronne si cette dernière contenait de l'argent. La tradition rapporte qu'il constata que l'orfèvre avait effectivement commis une fraude.

Archimède commence son ouvrage en prouvant que la surface d'un fluide en équilibre doit être sphérique, le centre de la sphère étant celui de la terre. Il démontre ensuite que la pression d'un fluide sur un corps, complètement ou partiellement immergé, est égale au poids du liquide déplacé. De là il déduit la position d'équilibre d'un corps flottant et il en donne des applications aux segments sphériques et aux paraboloïdes de révolution. Quelques-uns des derniers problèmes traités renferment des raisonnements géométriques d'une nature très complexe.

Le problème suivant est un beau spécimen des questions qu'il étudiait :

Un solide, ayant la forme d'un paraboloïde de révolution de hauteur h et de paramètre $2a$, flotte sur l'eau avec son sommet immergé et sa base complètement hors de l'eau. Si l'équilibre est possible quand l'axe n'est pas vertical, la densité du corps doit être moindre que $\frac{(h - 3a)^2}{h^2}$ (livre XI, proposition 4).

Quand on songe qu'Archimède ne connaissait ni la trigonométrie ni la géométrie analytique, la solution du problème que nous venons d'énoncer montre la puissance de son génie.

La théorie du levier, telle qu'Archimède l'avait établie, subsista en mécanique jusqu'en 1586, époque où Stevin publia son traité de statique, et l'hydrostatique demeura stationnaire jusqu'à ce que Stevin, dans le même ouvrage, eût étudié les lois qui régissent la pression des liquides. Il faut aussi remarquer que les recherches mécaniques d'Archimède se rattachaient toutes à la statique. On peut ajouter que, bien que les Grecs aient tenté d'aborder quelques

questions sur la dynamique, ils ne furent pas très heureux dans leurs essais ; quelques-unes de leurs remarques dénotent de la subtilité, mais ils ne comprirent pas suffisamment que les faits fondamentaux, sur lesquels il était possible d'établir une théorie, ne pouvaient être que la conséquence d'observations et d'expériences soigneusement conduites. Rien de pareil ne fut fait avant Galilée et Newton.

V) Les citations faites occasionnellement dans les ouvrages d'Archimède, et diverses remarques que l'on trouve dans d'autres écrivains, prouvent qu'Archimède s'occupa beaucoup d'*observations astronomiques*. Il écrivit un livre perdu aujourd'hui Περὶ σφαιροποιΐας, sur la Construction d'une sphère céleste, et il construisit une sphère stellaire et une planétaire. Après la prise de Syracuse, Marcellus emporta ces appareils à Rome, où on les conserva comme curiosités pendant deux ou trois cents ans au moins.

Cette simple énumération des œuvres d'Archimède montre jusqu'à quel point cet homme était prodigieux dans ses conceptions. On aura encore une plus haute idée de son génie si l'on tient compte de ce fait, que les seuls principes qu'il a utilisés, outre ceux contenus dans les *Eléments d'Euclide* et dans les *Sections coniques* sont les deux remarques suivantes :

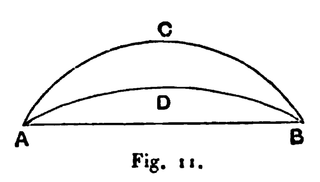


Fig. 11.

De toutes les lignes telles que ACB, ADB (*fig.* 11), joignant deux points A et B, la ligne droite est la plus courte, et de deux lignes courbes limitées aux mêmes points, telles que ACB, ADB, la ligne extérieure est plus grande que la ligne intérieure. Il avait également posé deux principes identiques pour l'espace à trois dimensions. Dans l'antiquité et au Moyen-Age, Archimède était considéré comme le premier des mathématiciens, mais le plus beau tribut payé à sa renommée est peut-être dans ce fait, que les écrivains qui ont fait ressortir le plus hautement le mérite de ses ouvrages et son génie, sont ceux qui étaient eux-mêmes les hommes les plus distingués de leur génération.

Apollonius (1). — Le troisième grand mathématicien de ce

(1) Comme addition à l'ouvrage de Zeuthen et aux autres autorités mentionnées dans la note au bas de la page 51, voir *Litterargeschichtliche Studien über*

siècle fut *Apollonius de Perga*, célèbre surtout pour avoir composé un Traité sur les sections coniques, contenant, non seulement tout ce qui était connu avant lui, mais des développements considérables qui lui sont personnels. Cet ouvrage fut aussitôt accepté comme livre classique par excellence et remplaça complètement les traités sur le même sujet de Menechme, Aristé et Euclide, dont l'usage avait été général jusqu'à ce moment.

Nous savons peu de chose sur Apollonius né vers — 260 et mort vers — 200. Il étudia pendant plusieurs années à Alexandrie où il fit probablement des cours ; Pappus le représente comme « vaniteux, jaloux de la réputation des autres, et disposé à saisir toutes les occasions qui se présentaient de les déprécier ». Chose curieuse, tandis que nous ne savons presque rien de sa vie, ni de celle de son contemporain Eratosthène, les surnoms dont on les avait qualifiés, et qui étaient respectivement *épsilon* et *bêta*, nous sont parvenus. Le Dr Grow a émis cette idée que les salles de conférences à Alexandrie étaient numérotées et qu'ils avaient pris l'habitude de se placer toujours dans celles portant les numéros 5 et 2.

Apollonius passa quelques années à Pergame, en Pamphilie, où une Université venait d'être créée sur le modèle de celle d'Alexandrie. C'est là qu'il rencontra Eudème et Attalus, à qui par la suite, il envoya, avec une note explicative, chacun des livres de son ouvrage sur les coniques, au fur et à mesure qu'il les terminait. Il retourna à Alexandrie où il demeura jusqu'à sa mort, qui survint presque en même temps que celle d'Archimède.

Dans son grand ouvrage sur les *Sections coniques*, il étudia d'une façon si complète les propriétés de ces courbes que ses successeurs n'eurent que fort peu de chose à ajouter ; mais ses démonstrations sont longues et confuses, et nous croyons que la plupart de nos lecteurs se contenteront d'une courte analyse de son ouvrage, dont les démonstrations sont d'ailleurs rigoureuses.

Le Dr Zeuthen pense que beaucoup des propriétés énoncées ont été obtenues tout d'abord par l'emploi de coordonnées et que les

Euklid, par J. L. Heiberg. Leipzig, 1882. Une collection des ouvrages existants d'Apollonius, a été éditée par J. L. Heiberg, Leipzig, 1890, 1893, et une autre par E. Halley. Oxford 1706 et 1710 ; une édition des Coniques a été donnée par T. L. Heath. Cambridge, 1896.

démonstrations furent ensuite transformées, pour être présentées d'après les méthodes de la géométrie usuelle. S'il en est ainsi, il faut admettre que les auteurs classiques de l'époque possédaient certaines notions de géométrie analytique — la notion des coordonnées orthogonales et obliques, suivant Zeuthen, et l'usage de transformations reposant sur une notation abrégée — et que ces connaissances, particulières à une certaine Ecole, ont été perdues par la suite. Ce n'est là qu'une simple conjecture, ne s'appuyant sur aucun témoignage direct, mais qui a été acceptée par quelques écrivains, comme pouvant expliquer l'étendue de l'ouvrage et sa disposition.

Le traité, contenant environ quatre cents propositions, était divisé en huit livres; nous avons le texte grec des quatre premiers, et nous possédons des copies des commentaires faits sur l'ensemble de l'ouvrage par Pappus et Eutocius. Nous avons en outre deux manuscrits d'une traduction arabe des sept premiers livres (les seuls existant à cette époque) qui parut dans le neuvième siècle; le huitième livre est perdu.

Dans la lettre à Eudème qui accompagne l'envoi de son premier livre, Apollonius lui dit qu'il entreprend son ouvrage à la requête de Naucratès, géomètre qui avait séjourné avec lui à Alexandrie, et que, bien qu'il en eût déjà donné un premier aperçu à quelques-uns de ses amis, il avait préféré le retoucher soigneusement avant de l'envoyer à Pergame. Dans la note accompagnant le livre suivant, il demande à Eudème de le communiquer, après lecture, à d'autres géomètres, et en particulier à Philonide, que l'auteur avait rencontré à Ephèse.

Les quatre premiers livres ont trait à la partie élémentaire du sujet, et les trois premiers sont inspirés de l'ouvrage antérieur d'Euclide (qui est lui-même basé sur les traités plus anciens de Menechme et d'Aristé). Héracléide prétend que beaucoup des questions, que l'on trouve dans ces livres, ont été empruntées à un ouvrage non publié d'Archimède, mais l'examen critique fait par Heiberg a montré que cette assertion ne peut être admise.

Apollonius commence par définir le cône à base circulaire, puis il en étudie les différentes sections planes et montre qu'elles donnent lieu à trois espèces de courbes, qu'il appelle *ellipse*, *parabole* et *hyperbole*.

Il démontre cette proposition : A, A′ étant les sommets d'une conique et P un point quelconque de la courbe, si on abaisse de P la perpendiculaire PM sur AA′, le rapport $\frac{\overline{MP}^2}{AM.MA'}$ (avec la notation usuelle) est constant dans l'ellipse et l'hyperbole, et le rapport $\frac{\overline{MP}^2}{AM}$ est constant dans la parabole (*fig.* 12).

Cette proposition donne les propriétés caractéristiques sur lesquelles presque tout le restant de l'ouvrage est basé. Il fait voir ensuite, que si A est le sommet, $\frac{l}{2}$ le paramètre, AM, MP l'abscisse et l'ordonnée d'un point quelconque d'une conique, $\overline{MP}^2$ est inférieur, égal ou supérieur au produit l.AM suivant que la conique est une ellipse, une parabole ou une hyperbole.

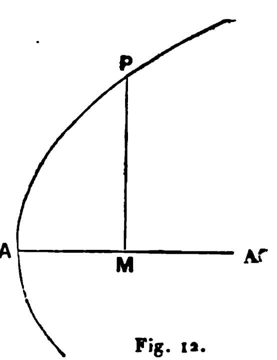


Fig. 12.

C'est de là que viennent les noms donnés à ces courbes et sous lesquels on les désigne encore de nos jours.

Apollonius n'avait aucune notion de la directrice et ignorait que la parabole eût un foyer, mais si l'on fait exception des propositions relatives à ces notions, ses trois premiers livres contiennent la plupart des théorèmes que l'on trouve dans les ouvrages classiques modernes. Dans le quatrième livre il développe la théorie des lignes coupées harmoniquement et s'occupe de l'intersection des systèmes de coniques. Le début de son cinquième livre est consacré à la théorie des maxima et des minima, qu'il applique à la détermination du centre de courbure en un point quelconque de la courbe, et à celle du développement de la courbe ; il détermine aussi le nombre de normales que l'on peut mener d'un point à une conique.

Dans le sixième livre il s'occupe des coniques semblables. Les septième et huitième livres étaient consacrés à la discussion des propriétés des diamètres conjugués et Halley dans son édition de 1710 a reconstitué par conjectures ce dernier livre.

Les explications prolixes et pénibles de l'ouvrage font que sa lecture ne présente de nos jours aucun attrait à beaucoup de lecteurs, mais la disposition est logique et les raisonnements sont irréprochables, et c'est à juste titre qu'il a été considéré comme le

fleuron de la géométrie grecque. C'est cet ouvrage qui a fait la réputation d'Apollonius et qui l'a fait surnommer « le grand géomètre ».

Outre ce volumineux traité, il écrivit beaucoup d'autres ouvrages d'importance moindre ; ils sont, bien entendu, en langue grecque, mais désignés généralement par leurs titres latins. Nous énumérons plus loin quelques-uns d'entre eux.

Il traita également, dans un ouvrage spécial, le problème suivant : « étant données, dans un même plan, deux lignes droites Aa, Bb passant par les points fixes A et B, mener par un point O pris en dehors de ces droites, une nouvelle droite Oab coupant les premières en a et b, de telle sorte que le rapport de Aa à Bb soit connu. » Apollonius réduisait la question à soixante dix-sept cas différents et donnait pour chaque cas, avec l'aide des coniques, une solution appropriée ; ce travail fut publié (traduit d'une copie arabe) par E. Halley, en 1706. Il écrivit également un traité *De Sectione Spatii* (reconstitué par Halley en 1706), sur le même problème ; mais en y introduisant la condition que le produit Aa. Bb devait être connu. Il en composa encore un autre intitulé *De Sectione Determinata* (reconstitué par R. Simson en 1749), sur des questions telles que la suivante : trouver sur une droite donnée AB, un point P tel que le rapport de $\overline{PA}^2$ à PB soit connu. Un autre de ses écrits *De Tactionibus* (rétabli par Viète en 1600) traite de la construction d'un cercle tangent à trois cercles donnés. Son travail *De Inclinationibus* (reconstitué en 1607 par M. Ghetaldi) a pour objet le problème qui consiste à tracer une droite telle que le segment déterminé par deux droites données ou par les circonférences de deux cercles donnés ait une longueur connue.

Il composa aussi un traité en trois livres sur les lieux plans *De Locis planis* (reconstitué par Fermat en 1637 et par R. Simson en 1746), et un autre sur les *solides réguliers*. Enfin il écrivit un traité sur les *incommensurables non classés* qui était un commentaire du Xe livre d'Euclide. On pense que dans un ou plusieurs des ouvrages perdus il fit usage de la méthode des projections coniques.

Outre ces ouvrages sur la géométrie, il écrivit sur *les méthodes de calcul arithmétiques* ; tout ce que nous savons de cet ouvrage tient à quelques remarques de Pappus. Friedlein pense que ce n'était autre chose qu'une sorte de barême ou comptes-faits. Il

paraît cependant plus probable qu'Apollonius avait eu l'idée d'un système de numération analogue à celui proposé par Archimède, mais en procédant par tétrades au lieu d'octades.

Faisons remarquer ici que dans la notation moderne on opère par hexades, un million $= 10^6$, un billion× $= 10^{12}$, un trillion $=$ $= 10^{18}$ etc. Il n'y a rien d'impossible à ce qu'Apollonius ait fait également observer que l'emploi d'un système décimal de notation, ne comprenant que neuf symboles, faciliterait les multiplications numériques.

Apollonius était versé en astronomie et il écrivit sur les *stations et les rétrogradations des planètes* un ouvrage dont se servit Ptolémée pour composer l'*Almageste*. Il fit aussi un traité sur la théorie et l'emploi de la vis en mécanique.

La liste de tous ses travaux est fort longue. Il est à supposer cependant que beaucoup n'étaient que des opuscules relatifs à des questions spéciales.

Comme tant de ses prédécesseurs, il donna lui aussi une construction pour trouver deux moyennes proportionnelles entre deux droites données, et, par suite, pour effectuer la duplication du cube. La voici brièvement exposée :

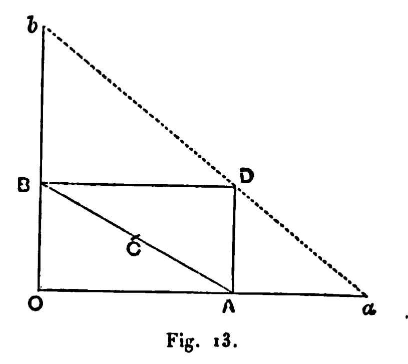


Fig. 13.

Soient OA et OB (*fig.* 13), les deux lignes données ; construisons le rectangle OADB dont elles forment les deux côtés adjacents et prenons le milieu C de la diagonale AB. Si de ce point C comme centre et avec une ouverture de compas convenablement choisie, nous traçons une circonférence de cercle coupant les droites OA et OB prolongées aux points a et b tels que les trois points a, D, b soient en ligne droite, le problème se trouve résolu.

On a, en effet, dans ce cas,

$$Oa \times Aa + \overline{CA}^2 = \overline{Ca}^2,$$

De même

$$Ob \times Bb + \overline{CB}^2 = \overline{Cb}^2,$$

Par suite

$$Oa \times Aa = Ob \times Bb,$$

× en France, [illegible] $10^6 . 10^3 = 10^9$.

ou

$$\frac{Oa}{Ob} = \frac{Bb}{Aa}.$$

Mais les triangles semblables donnent

$$\frac{BD}{Bb} = \frac{Oa}{Ob} = \frac{Aa}{AD},$$

par conséquent

$$\frac{OA}{Bb} = \frac{Bb}{Aa} = \frac{Aa}{OB},$$

c'est-à-dire que B*b* et A*a* sont les deux moyennes proportionnelles entre OA et OB.

Le tracé du cercle de centre C et de rayon C*a* = C*b* ne peut s'effectuer par les procédés de la géométrie euclidienne, mais Apollonius fit connaître un moyen mécanique pour le faire. Cette construction est citée par plusieurs écrivains arabes.

Dans un des plus brillants passages de son *Aperçu historique*. Chasles fait remarquer qu'il y a entre les travaux d'Archimède et d'Apollonius, les deux géomètres les plus remarquables de l'époque, un contraste dont l'effet se fait sentir sur toute l'histoire de la géométrie. Archimède, en abordant le problème de la quadrature des surfaces limitées par des courbes, établissait les principes de la géométrie de la mesure qui donna, tout naturellement, naissance au calcul infinitésimal; et, en fait, la méthode d'exhaustion, telle que l'employait Archimède, ne différait pas essentiellement de la méthode des limites de Newton. Apollonius, de son côté, en étudiant les propriétés des sections coniques au moyen des transversales, en faisant intervenir le rapport des distances linéaires et la perspective, établissait les fondements de la géométrie de la forme et de la position.

Eratosthène (¹). — Parmi les contemporains d'Archimède et d'Apollonius, nous pouvons mentionner *Eratosthène*. Né à Cyrène en — 275, il étudia à Alexandrie — peut-être en même temps

(¹) Les œuvres d'ERATOSTHÈNE existent seulement en fragments, dont une collection a été publiée par G. BERNHARDY, à Berlin en 1822; quelques fragments additionnels furent imprimés à Leipzig en 1872, par F. HILLER.

qu'Archimède dont il était un ami personnel — et à Athènes ; encore jeune on lui confia la direction de la bibliothèque de l'université d'Alexandrie, poste qu'il occupa probablement jusqu'à sa mort. Il fut l'admirable Crichton [1] de son époque, remarquable par son entraînement athlétique et par ses connaissances littéraires et scientifiques ; il était en même temps quelque peu poète. Il perdit la vue par suite d'une ophtalmie qui, à cette époque comme de nos jours, était le fléau de la vallée du Nil et, ne pouvant se faire à l'idée de vivre sans pouvoir lire, il se donna la mort en — 194.

Ses connaissances portaient principalement sur l'Astronomie et la géodésie ; il construisit divers instruments astronomiques qui furent employés à l'Université pendant plusieurs siècles. Il imagina le Calendrier (connu actuellement sous le nom de Calendrier Julien) dans lequel chaque quatrième année comptait 366 jours, et il détermina l'obliquité de l'écliptique qu'il trouva de $23^\circ 51' 20''$.

Il détermina la longueur du degré sur la surface du globe terrestre et la trouva égale à 127 135 mètres, soit environ 16 kilomètres de trop ; il calcula ensuite la longueur de la circonférence de la terre qu'il trouva de 252 000 stades, ce qui revient à dire que le rayon est d'environ 7400 kilomètres. Le principe sur lequel il s'appuyait dans cette détermination est exact.

On possède deux spécimens des œuvres d'Eratosthène en mathématiques : l'un est la description d'un instrument pour effectuer la duplication du cube, le second est la règle qu'il donne pour former une table des nombres premiers. Le premier se trouve dans plusieurs ouvrages. Quant au second, connu sous le nom de « crible d'Eratosthène », voici en quoi il consiste : on commence par écrire la série des nombres entiers à partir de l'unité ; on barre tous les nombres de 2 en 2 à partir de 2 comme étant des multiples de 2 ; puis tous les nombres de 3 en 3, à partir de 3, comme étant multiples de 3 ; cela fait, le premier nombre non barré est 5, tous les nombres de 5 en 5, à partir de 5, étant multiples de 5, sont à effa-

[1] CHRICHTON (JAMES) communément appelé l'*Admirable Crichton*, né probablement dans le château de Cluny en Écosse en 1560, mort à Mantoue en 1583. A l'âge de 17 ans, il avait parcouru tout le cercle des connaissances humaines, parlait et écrivait 10 langues, possédait à fond le dessin, la peinture, l'équitation, l'escrime, dansait et chantait à ravir, jouait de divers instruments de musique. Il était de plus, doué d'une beauté physique et d'une force musculaire extraordinaires.

cer. Et on continue ainsi jusqu'à la limite que l'on s'est assignée. On a calculé que pour obtenir, par cette méthode, tous les nombres premiers de 1 à 1 000 000, il faudrait un travail d'environ 300 heures.

Les essais à faire, pour s'assurer qu'un nombre est ou n'est pas premier peuvent cependant être réduits en observant que si un nombre est décomposé en un produit de deux facteurs, l'un d'eux doit être plus petit et l'autre plus grand que sa racine carrée, à moins que ce nombre ne soit le carré d'un nombre premier, auquel cas les deux facteurs sont égaux. Il résulte de là que tout nombre composé doit être divisible par un nombre premier qui ne peut surpasser sa racine carrée.

LE SECOND SIÈCLE AVANT JÉSUS-CHRIST

Le troisième siècle avant J.-C. qui s'ouvre avec Euclide et prend fin à la mort d'Apollonius est la période la plus brillante de l'histoire de la science grecque. Mais les grands mathématiciens de ce siècle étaient des géomètres, et sous leur influence, l'attention se porta presque uniquement sur cette branche des mathématiques. Avec les méthodes qu'ils employèrent et dans lesquelles leurs successeurs se renfermèrent par tradition, il n'était guère possible de faire progresser la science : ajouter quelques détails à un travail déjà complet dans ses parties essentielles était tout ce que l'on pouvait faire. Ce n'est qu'après un intervalle d'environ 1 800 ans que le génie d'un Descarte, découvrant une nouvelle voie, recula les bornes de la géométrie ancienne; c'est pourquoi nous passerons rapidement sur les nombreux auteurs qui suivirent Apollonius, en nous contentant d'en faire une rapide mention. On pourrait même avancer sans erreur que, durant la période de mille ans qui suivit, Pappus fut le seul géomètre de grand talent et que, pendant cette longue période, les seuls autres mathématiciens, dans le sens exact du mot, d'un génie exceptionnel, furent Hipparque et Ptolémée à qui l'on doit les fondements de la trigonométrie, et Diophante qui fut le créateur de l'algèbre.

Dans le second siècle avant J.-C., vers — 180, nous trouvons les noms de trois mathématiciens : Hypsiclès, Nicomède et Dioclès, qui étaient renommés de leur temps.

Hypsiclès. — Le premier d'entre eux, Hypsiclès, ajouta aux Eléments d'Euclide un XIVe livre dans lequel les solides réguliers étaient étudiés. Dans un autre petit ouvrage, intitulé « *Ascensions* », nous trouvons pour la première fois chez les mathématiciens grecs, un angle droit divisé en 90 degrés comme chez les Babyloniens. Il est possible qu'Eratosthène eût déjà estimé les angles d'après le nombre de degrés qu'ils contiennent, mais ce n'est qu'une simple conjecture.

Nicomède. — Nicomède inventa la courbe connue sous le nom de *conchoïde* ou courbe en forme de coquille.

Si d'un point fixe S on mène une droite coupant en Q une autre droite donnée et si on porte sur SQ et à partir de Q, une longueur constante QP $= d$, le lieu engendré par le point P, lorsque la position du point Q varie sur la première droite, est la conchoïde.

Son équation peut se mettre sous la forme

$$r = a \sec \theta \pm d.$$

Il est facile, avec cette courbe, d'opérer la trisection d'un angle ou la duplication du cube, et elle fut, sans nul doute, imaginée dans ce but.

Dioclès. — *Dioclès* est l'inventeur de la courbe connue sous le nom de cissoïde ou courbe en forme de feuille de lierre qui, comme la conchoïde, servait à la résolution du problème de la duplication du cube. Voici comment il la définissait :

Soient AOA′ et BOB′ deux diamètres fixes d'un cercle faisant entre eux un angle droit. Traçons les deux cordes QQ′, RR′ parallèles à BOB′ et équidistantes de ce diamètre. Le lieu du point d'intersection de AR et de QQ′ sera la cissoïde. Son équation peut se mettre sous la forme

$$y^2(2a - x) = x^3$$

Dioclès résolut aussi (au moyen des sections coniques) le problème suivant proposé par Archimède : mener un plan divisant une sphère donnée en deux parties dont les volumes aient entre eux un rapport donné.

Persée. Zénodore. — Un quart de siècle après, c'est-à-dire vers — 150, Persée étudia les diverses sections planes du tore et Zénodore écrivit un traité sur les figures isopérimètres ; une partie de ce dernier travail a été conservée et pour donner une idée de la nature des problèmes discutés nous citerons la proposition suivante : « de tous les segments de cercles compris sous des arcs égaux, le plus grand est le demi-cercle ».

Vers la fin de ce siècle nous trouvons deux mathématiciens qui en faisant porter leurs recherches sur des sujets nouveaux donnèrent un nouvel attrait à l'étude des mathématiques. Ce sont Hipparque et Héron.

Hipparque [1]. — Hipparque, le plus éminent des astronomes grecs, eut pour principaux prédécesseurs Eudoxe, Aristarque, Archimède et Eratosthène. On raconte qu'il naquit vers — 160 à Nicée en Bithynie ; il passa probablement quelques années à Alexandrie, mais il s'était établi finalement à Rhodes où il fit la plupart de ses observations.

Delambre a obtenu une ingénieuse confirmation de la tradition d'après laquelle Hipparque aurait vécu dans le second siècle avant Jésus-Christ. Dans un de ses écrits Hipparque dit, en effet, que la longitude d'une certaine étoile, *η du chien*, qu'il avait observée était exactement de 90°, et il faut noter que toutes ses observations étaient minutieusement faites. Comme en 1750, elle se trouvait de 116° 4′ 10″ et comme le premier point du bélier rétrograde à raison de 50″,2 par an, l'observation d'Hipparque a dû se faire vers — 120.

[1] Voir C. Manitius, *Hipparchi in Arati et Eudoxi phænomena commentarii*. Leipzig, 1894, et J. B. J. Delambre, *Histoire de l'Astronomie ancienne*. Paris, 1817, vol. I, pp. 106-189.

S P. Tannery dans ses *Recherches sur l'histoire de l'Astronomie ancienne*. Paris, 1893, prétend que le travail d'Hipparque a été surfait, mais nous avons adopté ici les vues de la majorité des auteurs.

A l'exception d'un court commentaire sur un poème d'Aratus ayant trait à l'astronomie, tous ses ouvrages sont perdus, mais le grand traité de Ptolémée, l'*Almageste*, dont nous parlerons plus loin, repose sur les observations et les écrits d'Hipparque, et nous permet de lui restituer ses principales découvertes : il détermina la vraie valeur de la durée de l'année avec une approximation de 6 minutes. Il calcula et trouva pour l'inclinaison de l'écliptique sur l'équateur de 23°51′, elle était à cette époque de 23°46′. Il estimait la précession annuelle des équinoxes à 59″ ; les calculs modernes donnent 50″,2. Il assigna à la parallaxe horizontale de la lune la valeur de 57′ qui est très sensiblement exacte. Il trouva $\frac{1}{24}$ pour l'excentricité de l'orbite solaire, elle est très approximativement $\frac{1}{30}$. Il détermina le périgée et le mouvement moyen du soleil et de la lune et il calcula l'inclinaison du plan de l'orbite lunaire sur le plan de l'écliptique. Pour les détails de ses observations et de ses calculs nous renvoyons aux écrits de Delambre.

En ce qui concerne le mouvement de la lune, Hipparque supposait qu'elle se déplaçait d'un mouvement uniforme sur un cercle dont la terre occupait une position voisine du centre (mais non en coïncidence avec lui). Ceci revenait à dire que l'orbite est une épicycle du premier ordre. La longitude de la lune, qu'il obtenait en partant de cette hypothèse, est à peu près correcte pour quelques révolutions

Pour rendre cette évaluation exacte pour une durée quelconque, Hipparque supposait de plus que la ligne des apsides se déplaçait en avant d'environ 3° par mois, ce qui lui fournissait la correction pour une durée quelconque. Il expliquait le mouvement du soleil de la même manière. Cette théorie donnait l'explication de tous les faits, qui pouvaient être observés avec les instruments alors en usage, et elle lui permit, en particulier, de faire le calcul des éclipses avec une précision remarquable.

Il avait commencé une série d'observations planétaires, pour permettre à ses successeurs de créer une théorie rendant compte de leurs mouvements, et il avait annoncé, avec beaucoup de perspicacité, qu'on n'arriverait à un pareil résultat qu'en introduisant des épicycles d'ordre supérieur, c'est-à-dire en supposant trois ou plus

de trois cercles, tels que les centres de chacun d'eux se déplaceraient uniformément sur la circonférence du précédent.

Il composa un catalogue de 1 080 étoiles fixes et l'on raconte que c'est à l'apparition soudaine d'une nouvelle étoile remarquable par sa clarté, qu'il comprit la nécessité d'un pareil travail. Des documents chinois confirment effectivement l'apparition d'une étoile pendant sa vie.

Après Hipparque, la science astronomique demeura stationnaire jusqu'à Copernic, mais Ptolémée reprit en détail les principes qu'il avait posés, les étudia de nouveau et leur donna une extension considérable.

Des recherches du genre de celles dont nous venons de parler devaient naturellement conduire à la *Trigonométrie* et Hipparque peut être considéré comme le créateur de cette branche de la science mathématique. On sait qu'en trigonométrie plane, il construisit une table des valeurs des cordes d'un certain nombre d'arcs, qui est pratiquement la même chose qu'une table des sinus naturels, et qu'en trigonométrie sphérique, il possédait une méthode pour la résolution des triangles, mais ses écrits sont perdus et nous ne pouvons donner aucun détail sur ce sujet. On pense cependant que l'élégant théorème, qui se lit dans le livre VI des Éléments d'Euclide (proposition D) et qui est connu généralement sous le nom de théorème de Ptolémée, est dû à Hipparque, à qui Ptolémée l'aurait emprunté.

Il contient implicitement les formules pour le développement de sin $(A \pm B)$ et cos $(A \pm B)$ et Carnot a montré comment on pouvait en déduire toutes les formules de la trigonométrie plane.

Nous compléterons cet aperçu en disant qu'Hipparque fut le premier qui détermina la position d'un lieu sur la surface de la terre au moyen de sa longitude et de sa latitude.

Héron (1). — Le second des mathématiciens de la fin du siècle fut *Héron* d'Alexandrie qui établit l'art de l'Ingénieur et l'arpen-

(1) Voir *Recherches sur la vie et les Ouvrages d'Héron d'Alexandrie*, par T. H. Martin, dans le volume IV des *Mémoires présentés... à l'Académie des inscriptions*. Paris, 1854 ; voir aussi Cantor, chap. xviii, xix et Loria, livre III, chap. v, pp. 107-128.

Sur l'ouvrage intitulé *Définitions* et attribué à Héron, voir P. Tannery,

tage sur des bases scientifiques. Il était élève de Ctésibus, qui imagina plusieurs machines ingénieuses, et dont il parlait comme d'un mathématicien réputé. Il est assez vraisemblable qu'Héron vécut avant — 120, mais la période précise de son existence est incertaine. En mathématiques pures, les principaux travaux d'Héron et les plus caractéristiques consistent :

1° En une géométrie élémentaire, avec applications à la détermination des aires de champs ayant une forme donnée ;

2° En propositions sur la manière de calculer les volumes de certains solides, avec applications aux bâtiments servant de théâtre, de salle de bains, de salle de fêtes, etc. ;

3° En une règle pour trouver la hauteur d'un objet inaccessible ;

4° En table des poids et mesures.

Il trouva une solution du problème de la duplication du cube, qui est pratiquement la même que celle qu'Apollonius avait déjà donnée. Quelques commentateurs pensent qu'il savait résoudre une équation du second degré, même quand les coefficients sont littéraux, mais cela est douteux. Il établit la formule

$$\Delta = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

permettant de calculer l'aire d'un triangle en fonction des côtés et il l'appliqua à un triangle dont les côtés étaient entre eux comme les trois nombres, 13, 14 et 15. Il était évidemment familiarisé avec la trigonométrie d'Hipparque et il avait calculé l'expression cot. $\frac{2\pi}{n}$ pour diverses valeurs de n, mais il ne cite nulle part une formnle où il soit question du sinus ; il est probable que, comme les Grecs des temps plus récents, il considérait la trigonométrie comme une introduction à l'astronomie, dont elle restait partie intégrante.

chap. XIII, XIV et un article par G. FRIEDLEIN, dans le *Bulletino di bibliografia*, de BONCOMPAGNI, mars 1871, vol. IV, pp. 93-126.

Des éditions des travaux qui nous restent d'HÉRON ont été publiées par W. SCHMIDT. Leipzig, 1899 et par F. HULTSCH. Berlin, 1864. Une traduction anglaise des Πνευματικα, a été publiée par B. WOODCROFT et J. S. GREENWOOD. Londres, 1851.

Voici comment il établissait la formule lui donnant la surface d'un triangle en fonction des côtés a, b, c (¹) (*fig.* 14).

Soient, p le demi-périmètre du triangle et D, E, F les points de contact des côtés et de la circonférence inscrite de centre O. Sur le côté BC prolongé, prenons le point H tel que $CH = AF$, il en résulte que $BH = p$.

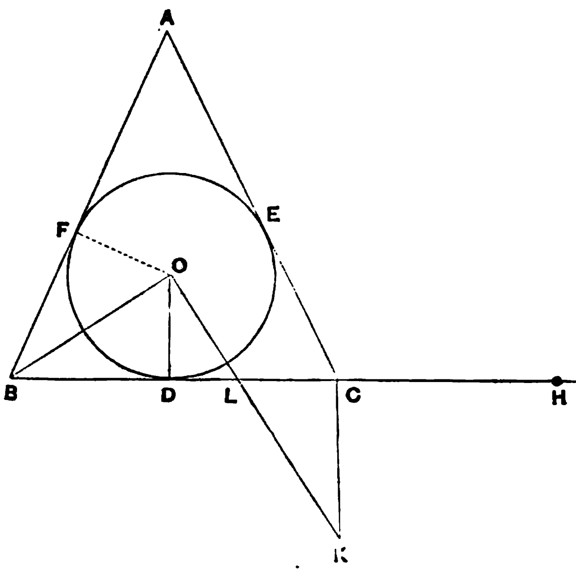


Fig. 14.

Traçons OK perpendiculaire sur OB et CK perpendiculaire sur BC, ces deux droites se coupent en K.

L'aire du triangle ABC ou Δ est égale à la somme des aires des trois triangles OBC, OCA et OAB, c'est-à-dire que l'on a :

$$\frac{1}{2} a.\, r + \frac{1}{2} b.\, r + \frac{1}{2} c.\, r = p.\, r = BH \times OD.$$

La similitude des deux triangles OAF, CBK résulte de l'égalité des angles OAF, CBK qu'Héron démontre sans peine.

(¹) Dans sa *Dioptrique*, Hultsch, part. VIII, pp. 235-237.
Nous devons faire remarquer que certains critiques pensent qu'il y a eu là intercalation et que ce passage n'est pas dû à Héron.

On a alors la série de rapports égaux

$$\frac{BC}{CK} = \frac{AF}{OF} = \frac{CH}{OD},$$

$$\frac{BC}{CH} = \frac{CK}{OD} = \frac{CL}{LD},$$

$$\frac{BH}{CH} = \frac{CD}{LD},$$

d'où

$$\frac{\overline{BH}^2}{CH.BH} = \frac{CD.BD}{LD.BD} = \frac{CD.BD}{\overline{OD}^2}.$$

Par suite

$$\Delta = BH.OD = \sqrt{CH.BH.CD.BD} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

En mathématiques appliquées, Héron s'occupa du centre de gravité, étudia les cinq machines simples et le problème consistant à déplacer une masse donnée avec une puissance donnée.

Dans un passage de ses écrits, il indique le moyen de tripler la puissance de la catapulte. Il écrivit aussi sur la théorie des machines hydrauliques. Il donna la description d'un théodolite (la dioptre) et d'un cyclomètre, et signala diverses questions d'arpentage dans lesquelles on pouvait utiliser ces instruments. Mais, de tous ses petits ouvrages, ses Πνευματικά et ses Αὐτόματα constituent les plus intéressants ; ils contiennent la description d'environ cent petites machines ou jouets mécaniques, dont beaucoup sont très ingénieux. Dans le premier traité, il décrit une machine à vapeur fixe présentant la forme aujourd'hui bien connue de l'appareil d'Avery qui était d'un usage commun en Écosse au commencement de ce siècle, mais qui n'offre pas les mêmes avantages que la disposition imaginée par Watt.

On y trouve aussi quelques renseignements sur une pompe foulante à double effet destinée à être employée en cas d'incendie. Il est probable que tous ces appareils restèrent à l'état de modèles entre les mains d'Héron. Ce n'est que récemment que l'attention générale a été attirée sur ses découvertes en mécanique, bien qu'Arago y ait fait allusion dans son *Éloge* de Watt.

On voit que tout cela diffère beaucoup de la géométrie classique et de l'arithmétique d'Euclide ou de la mécanique d'Archimède. Héron ne fit rien pour développer ses connaissances en mathéma-

tiques abstraites; il avait appris tout ce que les livres classiques de l'époque pouvaient lui enseigner, mais il ne s'intéressait à la science que par son côté pratique et, tant que ses résultats étaient exacts, il ne s'inquiétait pas de savoir si les procédés qui les lui avaient fournis étaient appliqués logiquement. Ainsi pour déterminer l'aire du triangle, il prenait la racine carrée du produit de quatre lignes. Les géomètres grecs classiques se permettaient bien l'usage du carré et du cube d'une ligne, car tous les deux sont susceptibles d'une représentation géométrique, mais on ne peut concevoir une figure à quatre dimensions et ils auraient certainement rejeté une démonstration reposant sur une semblable conception.

On peut se demander si Héron ou ses contemporains avaient connaissance de l'existence du papyrus de Rhind, mais il semble que des traités d'un caractère semblable circulaient alors en Égypte, et un livre classique de ce genre — bien que datant, très vraisemblablement, d'une époque pouvant remonter à environ huit siècles auparavant — a été découvert et reproduit (¹). Il est douteux que ce soient là les sources où Héron aurait puisé ses inspirations. Deux ou trois raisons ont conduit les commentateurs modernes à penser que Héron, bien que natif d'Alexandrie, était Égyptien d'origine, et s'il en était ainsi, il nous présenterait un exemple curieux de la permanence des caractères et des traditions d'une race. Héron parlait et écrivait le grec et on croit qu'il naquit lorsque l'influence grecque était dominante; cependant les règles qu'il donne, ses méthodes de démonstration, les figures qu'il trace, les questions qu'il traite, et même les phrases dont il fait usage, rappellent l'ouvrage si ancien d'Ahmès.

LE PREMIER SIÈCLE AVANT JÉSUS-CHRIST

Les successeurs d'Hipparque et de Héron ne saisirent pas l'opportunité qui se présentait à eux de faire porter leurs recherches sur des questions nouvelles, et reprirent un sujet déjà bien usé, la

(¹) Le papyrus Akhmin, par J. Baillet dans les *Mémoires de la mission archéologique française au Caire*, vol. IX, pp. 1-88. Paris, 1892.

géométrie. Parmi les plus éminents de ces derniers géomètres furent Théodose et Dionysodore, qui tous les deux vivaient vers — 50.

Théodose. — *Théodose* écrivit un traité complet sur la géométrie de la sphère et deux ouvrages sur l'astronomie (1).

Dionysodore. — *Dionysodore* ne nous est connu que par sa solution du problème ayant pour objet de diviser un hémisphère par un plan parallèle à sa base en deux parties, dont les volumes soient entre eux dans un rapport donné. Il employait les sections coniques pour résoudre la question (2), de même que Dialès, dans sa solution du problème analogue pour la sphère entière dont il a été question plus haut. Pline rapporte que Dionysodore avait déterminé la longueur du rayon de la terre qu'il trouvait approximativement de 42 000 stades, ce qui correspond à environ 80 000^{km} ; nous ne savons pas comment Dionysodore était parvenu à ce résultat, que l'on peut comparer avec celui donné par Eratosthène et que nous avons mentionné plus haut.

FIN DE LA PREMIÈRE ÉCOLE D'ALEXANDRIE

Rome devint définitivement maîtresse de l'empire Égyptien en 30 avant Jésus-Christ. Des troubles nombreux, aussi bien civils que militaires, signalèrent les dernières années de la dynastie de Ptolémée et les premiers temps de l'occupation romaine. Les études de l'Université se trouvèrent naturellement suspendues et on considère généralement cette époque comme marquant la fin de la première école d'Alexandrie.

(1) L'ouvrage sur la *Sphère* a été édité par I. Barrow. Cambridge, 1675 et par E. Nizze. Berlin, 1852.
Les ouvrages sur l'*Astronomie* furent publiés par Dasypodius, en 1572.

(2) Sa solution a été reproduite dans l'ouvrage de H. Suter, *Geschichte der mathematischen Wissenschaften*, seconde édition. Zurich, p. 1873, 101.

CHAPITRE V

SECONDE ÉCOLE D'ALEXANDRIE [1]

(DE 30 AVANT JÉSUS-CHRIST A 641 APRÈS JÉSUS-CHRIST)

En terminant le précédent chapitre nous avons observé que la première école d'Alexandrie disparaissait à peu près au moment où le pays perdait son indépendance. Dans le monde romain, le régime impérial fut substitué, en fait si ce n'est de nom, à la forme républicaine et les universités eurent à souffrir des troubles qui accompagnèrent cette transformation ; elles purent néanmoins continuer leur enseignement sans interruption et, aussitôt l'ordre rétabli, les étudiants revinrent en foule à Alexandrie. Cette période d'agitation coïncida pourtant avec une autre orientation des doctrines philosophiques, qui désormais procédèrent presque exclusivement de Platon et de Pythagore : par là, le commencement d'une ère nouvelle est nettement marqué. Le mysticisme des idées en cours eut sa répercussion dans les écoles des géomètres et c'est ce qui explique en partie la stérilité de l'œuvre scientifique de cette époque.

Bien que l'influence de la Grèce fut toujours prédominante et la langue de ce pays toujours employée, Alexandrie devint alors un centre intellectuel pour la plupart des peuples de la Méditerranée qui étaient sous la domination romaine. Si beaucoup de mathématiciens de ce temps n'ont pu avoir des relations directes avec les maîtres d'Alexandrie, c'est néanmoins à ceux-ci qu'ils sont rede-

[1] Pour les références voir la note donnée plus haut, p. 52.
Toutes les dates mentionnées ci-après doivent être considérées comme *anno domini*, à moins que le contraire ne soit expressément spécifié.

vables de leurs connaissances scientifiques et c'est pourquoi on les rattache à la seconde école d'Alexandrie. D'un autre côté, l'enseignement mathématique donné à Rome n'étant que le développement d'idées qui avaient pris naissance en Grèce, nous pourrons faire rentrer naturellement dans le cadre de ce chapitre ce que nous aurons à en dire.

PREMIER SIÈCLE APRÈS JÉSUS-CHRIST

Durant le premier siècle qui suivit la naissance du Christ, la géométrie fut toujours la science de prédilection ; mais il est évident qu'à cette époque la géométrie d'Archimède et d'Apollonius n'était guère susceptible de beaucoup de développements ; les traités qui parurent alors sont surtout des commentaires aux écrits des grands mathématiciens des âges antérieurs. Les seuls ouvrages de ce siècle ayant une certaine valeur, qui nous soient parvenus, sont au nombre de trois : deux sont dûs à Serenus et un à Ménélaus.

Serenus. Ménélaus. — Les écrits de *Serenus d'Antissa* (1) (vers 70), traitent des sections planes du cône et du cylindre (2), et on y trouve la proposition fondamentale des transversales.

L'ouvrage de *Ménélaus d'Alexandrie* (vers 98), est une *Trigonométrie sphérique*, présentée suivant la méthode euclidienne (3). Le théorème fondamental sur lequel elle repose est la relation entre les six segments déterminés sur les côtés d'un triangle sphérique par l'arc d'un grand cercle qui les coupe (livre III, proposition 1). Ménélaus écrivit aussi un ouvrage sur le calcul des cordes, c'est-à-dire un traité de trigonométrie rectiligne, mais il a été perdu.

Nicomaque. — Dans les dernières années de ce siècle (vers 100), *Nicomaque*, un juif qui naquit à Gérase en 50 et mourut vers

(1) Heiberg pense que Serenus vivait à Antinœ et non Antissa.
(2) Ils ont été publiés par J. L. Heiberg. Leipzig, 1896, et par E. Halley. Oxford, 1710.
(3) L'ouvrage a été traduit par E. Halley. Oxford, 1758.

[illegible] (¹), qui (ou plutôt la version la- [illegible] pendant près de mille ans. Cet [illegible]tion des résultats connus à cette [illegible]ques mais sans aucune démons- [illegible]le des propriétés énoncées (car [illegible]onstrations les explications qu'on [illegible] numériques. Le but du livre [illegible]nbres et en particulier de leurs

[illegible]ser les nombres, suivant la ma- [illegible], impairs, premiers et parfaits ; [illegible] une façon assez incorrecte, puis [illegible]aux et solides, et enfin traite des [illegible]rogressions.

[illegible] arithmétique de ce genre le nom [illegible] sur ce sujet a été au Moyen- [illegible]torité.

[illegible] APRÈS JÉSUS-CHRIST

[illegible]ithmétique, à peu près semblable [illegible]é par *Théon de Smyrne*, vers 130. [illegible] de son ouvrage (²) sur les mathé- [illegible] de faciliter l'étude des écrits de

[illegible]athématicien sensiblement de la [illegible]te une mention parce qu'il est le [illegible]xplicitement énoncé un théorème

[illegible]omme d'un nombre quelconque [illegible]ne la somme de chacun des couples

(¹) [illegible]che. Leipzig, 1866.

(²) [illegible]nt encore a été publié avec une tra- [illegible] 1892.

constitués par l'une de ces quantités avec successivement chacune des autres, cette quantité est égale à la (n — 2me) partie de la différence entre la somme de tous les couples et la première somme connue.

Par exemple, si

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = S$$

et si on donne en même temps

$$x_1 + x_2 = s_2, \quad x_1 + x_3 = s_3, \quad x_1 + x_4 = s_4, \ldots, \quad x_1 + x_n = s_n,$$

alors

$$x_1 = \frac{s_2 + s_3 + s_4 + \ldots + s_n - S}{n - 2}$$

Il ne semble pas avoir fait usage d'un symbole pour représenter la quantité inconnue, mais il la désigne toujours par le même mot, ce qui est un premier pas vers le symbolisme.

Ptolémée (1). — A peu près à l'époque où vivaient les auteurs que nous venons de mentionner, *Ptolémée d'Alexandrie,* mort en 168, faisait paraître son grand ouvrage sur l'Astronomie qui transmettra son nom à la postérité aussi longtemps que l'on s'occupera de l'histoire des sciences. Ce traité est généralement appelé *Almageste,* nom dérivant du titre arabe *al midschisti,* qui serait, dit-on, la corruption de μεγίστη [μαθηματική] σύνταξις.

L'ouvrage est basé sur les écrits d'Hipparque, et bien qu'il ne fasse pas progresser sensiblement le sujet au point de vue théorique, les idées de l'auteur ancien sont exposées avec une perfection et une élégance telles, que ce traité sera toujours considéré comme un modèle du genre. Nous y voyons que Ptolémée fit des observations à Alexandrie de l'année 125 à 150, mais il était plutôt mé-

(1) Voir l'article *Ptolemæus Claudius,* par A. de Morgan, dans le *Dictionary of Greek and Roman Biography,* de Smith. Londres, 1849; S. P. Tannery, *Recherches sur l'histoire de l'astronomie ancienne.* Paris, 1893; et J. B. J. Delambre, *Histoire de l'astronomie ancienne.* Paris, 1817, vol. II.

Une édition de toutes les œuvres qui ont été conservées de Ptolémée a été publiée à Bâle, en 1551. L'*Almageste* avec divers ouvrages de moindre valeur a été édité par M. Halma, 12 vol. Paris, 1813-28, mais une nouvelle édition, par J. L. Heiberg. Leipzig, part. I, 1898, est en cours de publication.

diocre comme astronome praticien et les observations d'Hipparque sont généralement plus exactes que celles de son interprète.

L'ouvrage comprend treize livres. Dans le premier, Ptolémée discute diverses notions préliminaires, traite de la trigonométrie plane et sphérique donne une table des cordes, c'est-à-dire des sinus naturels (qui est correcte en substance et a probablement été extraite de l'ouvrage perdu d'Hipparque) et explique l'obliquité de l'écliptique ; dans ce livre il fait usage, pour l'évaluation des angles, des degrés, minutes et secondes. Le second livre est consacré principalement aux phénomènes qui sont la conséquence de la forme sphérique de la terre ; il fait remarquer que les explications seraient bien simplifiées en supposant la terre animée d'un mouvement de rotation autour de son axe et effectuant cette rotation dans un jour, mais il constate que cette hypothèse serait en opposition avec les faits observés. Dans le troisième livre, il explique le mouvement du soleil autour de la terre au moyen des cercles excentriques et des épicycles et, dans les livres quatre et cinq, il donne une explication semblable pour la lune. La théorie des éclipses est exposée dans le sixième livre et c'est là qu'on trouve pour valeur approchée de π, $3°8'30''$, c'est-à-dire $3\frac{17}{120}$, ou 3,1416. Les septième et huitième livres contiennent un catalogue de 1 028 étoiles fixes déterminées en spécifiant celles qui, par groupes de trois ou de plus de trois, se trouvent en ligne droite, ou plus exactement, appartiennent à un même arc de grand cercle (cette partie de l'ouvrage a été probablement empruntée à Hipparque) ; et, dans un autre ouvrage, Ptolémée fait l'énumération des phénomènes sidéraux se reproduisant chaque année. Les derniers livres sont consacrés à la théorie des planètes.

Cet ouvrage est un témoignage admirable de l'intelligence de son auteur. Il fut immédiatement accepté comme modèle et fit autorité en astronomie, jusqu'à ce que Copernic et Képler eussent montré que c'était le soleil et non la terre qui devait être regardé comme le centre du système du monde.

Dans les temps modernes on a souvent tourné en ridicule les idées des excentriques et des épicycles sur lesquelles Hipparque et Ptolémée basaient leurs théories. Il est hors de doute qu'avec le temps et à la suite d'observations plus nombreuses et plus

exactes, la nécessité où l'on se serait trouvé d'introduire épicycle sur épicycle pour faire concorder la théorie avec les faits observés, l'aurait rendue fort compliquée. Mais De Morgan a judicieusement fait observer que si les anciens astronomes se trompaient grandement en supposant qu'il était indispensable de transformer tous les mouvements des corps célestes en mouvements circulaires uniformes, leurs hypothèses, en tant que rendant compte des phénomènes apparents, étaient non seulement légitimes, mais commodes. Elles suffisaient pour expliquer le mouvement angulaire des corps célestes ou leur changement de distance, et comme les anciens ne s'attachaient qu'à cette dernière question, ils s'en contentaient. En fait, étant donnés l'état de leurs connaissances et l'imperfection de leurs instruments, c'était la meilleure des théories qu'ils pouvaient créer, et elle correspond à l'expression d'une fonction donnée comme somme de sinus et de cosinus, méthode qui est d'un fréquent usage en analyse moderne.

Malgré les recherches de Delambre, il est presque impossible d'établir une distinction entre les résultats dus à Hipparque et ceux qui peuvent être attribués à Ptolémée. Mais Delambre et De Morgan s'accordent à penser que les observations mentionnées, les idées fondamentales et l'explication du mouvement solaire apparent sont dues à Hipparque, tandis que tous les détails et les calculs des mouvements apparents de la lune et des planètes appartiennent à Ptolémée.

L'Almageste montre que Ptolémée était un géomètre de premier ordre, bien qu'il se soit principalement limité aux applications de la géométrie à l'astronomie. Il composa également un grand nombre d'autres traités. Parmi ces derniers, il en est un sur la *géométrie pure*, dans lequel il propose de supprimer l'axiome douze d'Euclide sur les parallèles et de le démontrer comme il suit :

Supposons que les deux droites AB et CD soient coupées par la ligne EFGH de telle sorte que la somme des angles BFG, FGD soit égale à deux droits. Il s'agit de démontrer que ces deux droites AB, CD sont parallèles (*fig.* 15).

Si elles n'étaient pas parallèles, elles devraient, en les prolongeant suffisamment, se rencontrer en un point M (ou N). Mais les angles AFG, FGC sont respectivement les supplémentaires des angles BFG, FGD; par suite AFG + FGC = 2 angles droits et les lignes

BA, DC devront, suffisamment prolongées, se rencontrer en N (ou M). Mais deux lignes droites ne peuvent renfermer un espace, par conséquent on ne peut admettre la rencontre des droites AB, CD prolongées; c'est dire que ces droites sont parallèles. Réciproquement, si AB et CD sont parallèles, les segments AF, CG ne sont pas moins parallèles que les segments FB, GD ; par conséquent quelle que soit la somme des angles AFG, FGC, la somme des angles FGD, GFB sera la même. Mais la somme des quatre angles est égale à quatre angles droits, et par conséquent la somme des angles BFG et FGD doit être égale à deux droits.

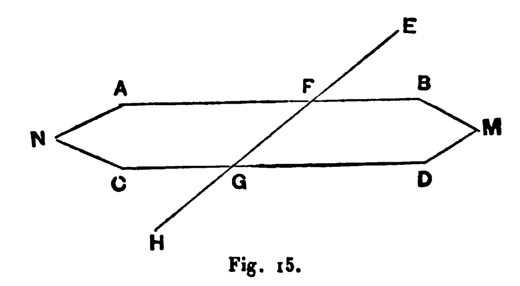


Fig. 15.

Ptolémée écrivit un autre ouvrage pour montrer que l'espace ne pouvait comprendre plus de trois dimensions : il étudia également les *projections orthographiques* et *stéréographiques*, avec des applications spéciales à la construction des cadrans solaires. Il écrivit sur la géographie et établit que la longueur d'un degré de latitude est égale à 500 stades. On lui attribue aussi quelquefois un ouvrage sur *l'optique* et un autre sur le *son*, mais leur authenticité est douteuse.

LE IIIe SIÈCLE APRÈS JÉSUS-CHRIST

Pappus. — Ptolémée avait montré non seulement que la géométrie pouvait être appliquée à l'étude de l'astronomie, mais il avait indiqué de plus comment de nouvelles méthodes d'analyse, telle que la trigonométrie, pouvaient y trouver l'occasion de se développer. Cependant son œuvre, si brillamment commencée, ne fut continuée par aucun de ses successeurs et ce n'est qu'après une période de 150 ans que nous rencontrons un autre géomètre de

quelque valeur. Ce fut *Pappus*, qui vivait et enseignait à Alexandrie vers la fin du troisième siècle. Nous savons qu'il avait de nombreux disciples et il est probable qu'il sut momentanément donner un nouvel attrait à l'étude de la géométrie.

Pappus composa plusieurs ouvrages, mais *il n'y en a qu'un* qui nous soit parvenu, les Συναγωγη (1), consistant en une collection de mémoires mathématiques disposés en huit livres dont le premier et une partie du second ont été perdus. Dans ce recueil il se proposait d'analyser les ouvrages des mathématiciens grecs en ajoutant des commentaires et des propositions nouvelles. Une étude comparative faite avec soin des textes anciens qui nous sont parvenus et de l'analyse qu'en présente Pappus, a permis de constater que son ouvrage était d'une fidélité scrupuleuse et nous pouvons en conséquence accepter avec confiance les renseignements qu'il donne sur des traités aujourd'hui perdus. Il n'a pas adopté l'ordre chronologique, il a groupé ensemble tous les traités portant sur un même sujet, et il est fort vraisemblable qu'il donne très approximativement l'ordre suivant lequel les auteurs classiques étaient étudiés à Alexandrie. Le premier livre, actuellement perdu, était probablement consacré à l'arithmétique ; dans les quatre livres qui suivent il est question de la géométrie jusqu'aux sections coniques exclusivement ; le sixième comprend l'astronomie et subsidiairement quelques sujets tels que l'optique et la trigonométrie ; le septième a trait à l'analyse, aux coniques et aux prismes ; et le huitième est consacré à la mécanique.

Les deux derniers livres contiennent beaucoup de proportions appartenant en propre à Pappus, mais nous devons faire remarquer en même temps que dans deux ou trois cas, on a constaté qu'il s'était approprié les démonstrations d'anciens auteurs ; et il est possible qu'il en ait fait de même dans d'autres parties de son ouvrage.

Cette réserve faite nous pouvons dire que la meilleure partie du recueil de Pappus est sa géométrie. Il fit connaître la directrice dans les sections coniques, mais il n'en étudia que quelques propriétés isolées, l'exposition complète la plus moderne a été faite par Newton et par Boscovich. Comme exemple de sa sagacité comme géomètre

(1) L'ouvrage a été publié par F. Hultsch. Berlin, 1876-78.

rappelons qu'il résolut le problème suivant : inscrire dans un cercle un triangle dont les côtés passent par trois points donnés en ligne droite (prop. 107, livre VI). Dans le courant du XVIIIe siècle cette question fut généralisée par Cramer, en supposant les trois points donnés disposés d'une façon quelconque dans le plan du cercle, et elle était considérée comme difficile. Il l'avait proposée en défi à Castillon, en 1742, et il en fit connaître une solution en 1776. Lagrange, Euler, Lhulier, Fuss et Lexell en donnèrent également des solutions en 1780. Quelques années plus tard le même problème fut proposé au jeune Napolitain A. Giordano qui n'était âgée que de 16 ans mais qui avait déjà fait preuve d'une rare intelligence mathématique : Giordano l'étendit au cas d'un polygone inscrit de n côtés passant par n points donnés et en fournit une solution à la fois simple et élégante. Poncelet le généralisa encore en l'appliquant aux coniques de tous genres et en faisant intervenir d'autres conditions restrictives.

En mécanique, Pappus montra que le centre de gravité d'un triangle homogène est le même que celui d'un triangle inscrit dont les sommets divisent les côtés du premier dans le même rapport. Il découvrit aussi les deux théorèmes sur la surface et le volume d'un solide de révolution, qui portent encore son nom dans les ouvrages classiques [1]. Ils s'énoncent ainsi :

Le volume engendré par la révolution d'une surface limitée par une courbe tournant autour d'un axe, est égal au produit de l'aire de la surface par la circonférence ou par l'arc de circonférence décrite par son centre de gravité; la surface engendrée par une courbe tournant autour d'un axe est égale au produit du périmètre de la courbe par la circonférence ou par la portion de circonférence décrite par son centre de gravité.

Les deux théorèmes que nous venons de mentionner sont des exemples de quelques unes des remarquables questions énoncées sans démonstrations par Pappus. L'ensemble de son ouvage et les commentaires qu'on y lit montrent que c'était un brillant géomètre; mais malheureusement pour lui il vivait à une époque où la géométrie n'excitait que très peu d'intérêt et à un moment où le sujet paraissait épuisé.

[1] En France ces théorèmes sont généralement connus sous le nom de *Théorèmes de Guldin.*

Il est possible qu'un petit traité [1] sur la multiplication et la division des fractions sexagésimales et qui semble avoir été écrit de son temps, soit dû à Pappus.

LE IV° SIÈCLE APRÈS JÉSUS-CHRIST

Pendant le second et le troisième siècles, c'est-à-dire depuis Nicomaque, l'intérêt qui s'attachait à la géométrie avait diminué d'une façon persistante et l'attention s'était de plus en plus portée vers la théorie des nombres, bien que les résultats obtenus ne fussent nullement en rapport avec le temps qu'on avait consacré à cette étude. Il faut se rappeler qu'Euclide employait des droites pour représenter les grandeurs de toute nature et qu'il étudia d'une manière rigoureusement scientifique tous ses théorèmes sur les nombres, mais en se limitant aux cas où une représentation géométrique était possible.

Les œuvres d'Archimède contiennent certaines indications, d'où il résulterait qu'il avait l'intention de poursuivre l'étude de la théorie des nombres : il introduisait les nombres dans ses discussions géométriques et il effectuait la division d'une ligne par une ligne, mais trop absorbé par d'autres recherches, il n'eut pas le temps de se consacrer à l'arithmétique. Héron abandonna la représentation géométrique des nombres, mais il ne réussit pas à créer un autre symbolisme pour les nombres en général ; il en fut de même de Nicomaque et des autres arithméticiens qui vécurent après lui, et par suite chaque fois qu'ils énonçaient un théorème, ils se contentaient de le vérifier en l'appliquant à un grand nombre d'exemples numériques. Ils savaient sans doute résoudre une équation du second degré à coefficients numériques, car — ainsi que nous l'avons déjà fait observer — on trouve dans Euclide (propositions 28 et 29 du livre VI) les solutions géométriques des équations

$$ax^2 - bx + c = 0 \quad \text{et} \quad ax^2 + bx - c = 0$$

[1] Il a été édité par C. Henry. Halle, 1879 et présente un certain intérêt comme exemple de l'arithmétique pratique chez les Grecs.

mais c'est ce qui constituait, probablement, le summum de leurs connaissances.

Il semble donc que, malgré le temps consacré à l'étude de l'arithmétique et de la géométrie, ces deux branches des mathématiques n'aient pas progressé d'une façon sensible depuis l'époque d'Archimède. On trouve des exemples du genre de problèmes qui, dans le troisième siècle, excitaient le plus d'intérêt dans une collection de questions faisant partie de l'anthologie Palatine composée par *Métrodore* au commencement du siècle suivant, vers 310. Quelques unes d'entre elles appartiennent à Métrodore, mais beaucoup sont d'une date antérieure et elles expliquent bien la façon dont l'arithmétique conduisit aux méthodes algébriques. En voici quelques exemples typiques :

« Quatre tuyaux amènent de l'eau dans une citerne ; l'un la remplit en un jour, un autre en deux jours, le troisième en trois jours et le quatrième en quatre jours ; si les quatre tuyaux coulaient ensemble, combien mettraient-ils de temps pour remplir la citerne. »

« Demochares a passé le quart de sa vie comme enfant, le cinquième comme jeune homme, le tiers comme homme, et il est demeuré treize ans vieillard en enfance. Quel était son âge quand il mourut ?

« On demande de composer une couronne pesant 60 mines avec de l'or, du cuivre, de l'étain et du fer, sachant que l'or et le cuivre doivent y entrer pour les deux tiers, l'or et l'étain pour les trois quarts et l'or et le fer pour les trois cinquièmes. Déterminer les poids respectifs de l'or, du cuivre, de l'étain et du fer. »

Cette dernière question est une application numérique du théorème de Thymaridas cité plus haut. Les commentateurs allemands ont fait remarquer que ces problèmes, bien que faciles à résoudre au moyen d'équations simples, peuvent également être traités par les méthodes géométriques en représentant par une droite la quantité inconnue. Dean Peacock fait aussi observer qu'on peut les résoudre en appliquant une méthode employée par les Arabes et par plusieurs auteurs du Moyen-Age pour des questions semblables. Cette méthode généralement connue sous le nom de *règle de fausse supposition*, consiste à prendre un nombre quelconque pour la quantité inconnue, et si en l'essayant on constate

que les conditions imposées ne sont pas remplies, on lui fait subir une correction proportionnelle comme dans une règle de trois.

Prenons, par exemple, la seconde question et supposons que l'âge de Democharès soit de 40 ans ; en appliquant les diverses conditions spécifiées on trouve finalement qu'il aurait passé 8 ans $\frac{2}{3}$ (et non 13 ans) comme vieillard ; on peut par suite écrire que le rapport de 8 $\frac{2}{3}$ à 13 est le même que celui de 40 à l'âge cherché, d'où on déduit pour l'âge cherché 60 ans.

Mais les critiques les plus récents pensent que ces problèmes se résolvaient par ce qu'on appelle l'*Algèbre de rhétorique*, c'est-à-dire à l'aide de raisonnements algébriques traduits par des phrases sans aucune intervention de symboles. C'est ainsi, d'après Nesselmann, que commença l'Algèbre et nous trouvons ce procédé employé à la fois par Ahmès et par les plus anciens algébristes Arabes, Persans et Italiens. Nous donnons un peu plus loin (1) des exemples de l'emploi de cette méthode à la solution d'un problème de géométrie et l'établissement de la règle pour résoudre une équation du second degré. Cette façon de voir conduirait à cette conséquence, qu'une algèbre non symbolique avait pris naissance et s'était progressivement développée chez les Grecs, ou était alors en pleine période de développement, développement bien imparfait du reste. Hankel, qui n'est pas un critique malveillant, constate que les résultats obtenus en ce qui concerne la théorie des nombres, sont, après un travail de six siècles, sans importance et même enfantins, et ne peuvent être en aucune façon considérés comme le commencement d'une science.

Entre cet abandon décroissant de la géométrie et ces faibles tentatives vers une arithmétique algébrique, un seul algébriste d'une originalité vraie se fit soudainement connaître et créa ce qu'on peut pratiquement appeler une science. Ce fut Diophante, qui introduisit un système d'abréviations pour les opérations et les quantités se reproduisant constamment dans le raisonnement, bien qu'il ne se crut pas dispensé en les employant d'observer les règles de la syntaxe grammaticale. Nesselmann donne à cette nouvelle science le nom d'*Algèbre syncopée* ; c'est en réalité une sorte de

(1) Voir plus loin, pp. 209, 216.

sténographie. Pour nous résumer nous pouvons dire que l'algèbre ne fit aucun progrès en Europe depuis ce premier pas jusqu'à la fin du XVIe siècle.

L'algèbre moderne a été encore plus loin et est devenue entièrement *symbolique*, c'est-à-dire qu'elle a un langage lui appartenant en propre et un système de notation ne présentant aucune connexion évidente avec les choses que l'on veut représenter, tandis que ses opérations s'effectuent suivant certaines règles, nullement astreintes aux lois d'une construction grammaticale.

Diophante (1). — Tout ce que nous savons de *Diophante*, c'est qu'il habitait Alexandrie et que, très vraisemblablement, il n'était pas grec. L'époque même de son existence est incertaine, mais il vivait probablement dans la première moitié du IVe siècle, c'est-à-dire peu après la mort de Pappus. Il mourut à l'âge de 84 ans.

Dans les quelques lignes qui précèdent, où il était question du développement de l'algèbre, nous avons attribué à Diophante la création de l'algèbre syncopée. C'est là un point sur lequel les opinions sont partagées, et quelques écrivains pensent qu'il ne fit que présenter d'une façon méthodique les connaissances que possédaient ses contemporains. A l'appui de cette dernière opinion, on doit constater que Cantor estime que des traces de l'emploi d'un symbolisme algébrique se trouvent dans Pappus, et Friedlein mentionne un papyrus grec dans lequel les signes / et) sont respectivement employés pour l'addition et la soustraction, mais on n'a produit aucune autre preuve directe évidente de la non-originalité de l'œuvre de Diophante, et aucun auteur ancien ne sanctionne cette opinion.

Diophante a écrit un court essai sur les nombres polygonaux, un traité d'algèbre qui nous est parvenu tronqué et un ouvrage sur les porismes qui est perdu.

Les *nombres polygonaux* contiennent dix propositions et ce fut probablement son premier ouvrage. Il abandonne la méthode em-

(1) Une édition des œuvres réunies de *Diophante* a été publiée avec des critiques, par S. P. TANNERY, 2 vol Leipzig, 1893.
Voir aussi *Diophantos of Alexandria*, par T. L. HEATH. Cambridge, 1885.

pirique de Nicomaque pour revenir au vieux système classique, dans lequel les nombres sont représentés par des lignes. Quand cela est nécessaire il fait une construction et la preuve qui en découle est rigoureusement déductive. Il peut être utile de faire remarquer que, dans cet ouvrage, quelques propositions d'Euclide, telles que les propositions 3 et 8 du livre II, sont appliquées aux nombres et non aux grandeurs.

Son *Arithmétique* constitue son principal ouvrage. C'est en réalité un traité d'algèbre, dans lequel il emploie les symboles algébriques et traite les problèmes par l'analyse.

Diophante suppose, comme on le fait dans presque toutes les algèbres modernes, que les raisonnements sont réversibles. Il applique cette algèbre à la recherche des solutions de plusieurs problèmes sur les nombres. Nous nous proposons d'examiner successivement la notation usitée, les méthodes d'analyse employées et les matières faisant l'objet de l'ouvrage.

En premier lieu, en ce qui concerne la notation, Diophante emploie toujours un symbole pour représenter la quantité inconnue dans ses équations, mais comme il ne fait usage que d'un seul symbole, il ne peut faire intervenir plus d'une quantité inconnue à la fois (1). La quantité inconnue est appelée ὁ ἀριθμός et est représentée par ς′ ou ς^ό. On l'imprime généralement comme ς. Au pluriel elle était dénotée par $\overline{\varsigma\varsigma}$ ou ςς^οι. Ce symbole peut être une corruption de α^ο ou peut avoir été mis pour le mot σωρός, un tas (2), ou encore il est possible que ce soit le *sigma* final de ce mot. Le carré d'une quantité inconnue est appelé δύναμις et se représente par δ^υ ; le cube de la même quantité s'appelle κύβος et s'écrit κ^υ ; et ainsi de suite jusqu'à la sixième puissance.

Les coefficients de la quantité inconnue et ses puissances sont numériques et le coefficient s'écrit immédiatement après la quantité qu'il multiplie ; ainsi

$$\varsigma'\,\bar{\alpha} = x \quad \text{et} \quad \varsigma\varsigma^{o\iota}\,\overline{\iota\alpha} = \overline{\varsigma\varsigma}\,\overline{\iota\alpha} = 11x.$$

(1) On trouvera cependant plus loin, pp. 111, 112 (exemple 3) un exemple de problème contenant deux quantités inconnues.

(2) Voir ci-dessus, page 5.

Un terme absolu est regardé comme un certain nombre d'unités ou μονάδες et se représente par μ^{δ}; ainsi :

$$\mu^{\delta}\,\bar{\alpha} = 1, \qquad \mu^{\delta}\,\overline{\iota\alpha} = 11.$$

Il n'a aucun signe pour l'addition qui s'indique par une simple juxtaposition. La soustraction est représentée par ψ, et ce symbole affecte tous ceux qui le suivent. L'égalité s'indique par ι. Ainsi

$$\kappa^{\breve{\upsilon}}\,\bar{\alpha}\,\overline{\varsigma\varsigma}\,\bar{\eta}\ \psi\ \delta^{\breve{\upsilon}}\,\bar{\varepsilon}\,\mu^{\delta}\,\bar{\alpha}\ \iota\ \varsigma\,\bar{\alpha}$$

se lit

$$(x^3 + 8x) - (5x^2 + 1) = x.$$

Diophante introduisit également une notation à peu près semblable pour les fractions dans lesquelles figuraient les quantités inconnues, mais nous ne croyons pas utile d'entrer ici dans des détails à ce sujet.

Il faut observer que tous ces symboles ne sont que de simples abréviations de langage et Diophante, en développant ses démonstrations, intercalait ces abréviations dans le texte.

Dans plusieurs manuscrits on trouve en marge un résumé, dans lequel les symboles seuls se trouvent transcrits, et qui constitue réellement une algèbre symbolique, mais cette addition est probablement due à quelque copiste plus récent.

Cette introduction d'un diminutif ou d'un symbole, à la place d'un mot représentant une quantité inconnue indique, un progrès plus grand que ne pourrait se l'imaginer une personne non familiarisée avec le sujet, et ceux qui n'ont jamais fait intervenir de tels symboles abréviatifs n'arrivent qu'avec peine à suivre les raisonnements compliqués de l'algèbre. Il est assez vraisemblable qu'un pareil système aurait été créé plus tôt, sans l'incommode système de numération adopté par les Grecs dans lequel chaque lettre de l'alphabet représentait un nombre particulier, ce qui rendait impossible leur usage pour désigner un nombre quelconque.

Passons en second lieu à l'examen des méthodes algébriques indiquées dans l'ouvrage de Diophante. Il commence par quelques définitions et par l'explication de sa notation. En indiquant la signification du symbole *moins*, il constate qu'une soustraction multipliée par une soustraction donne une addition ; il veut dire

par là que le produit de $-b$ par $-d$ dans le développement de $(a-b)(c-d)$ est $+bd$, mais en appliquant la règle, il a toujours soin de choisir les nombres a, b, c et d de telle sorte que a soit plus grand que b et c plus grand que d.

L'ensemble de l'ouvrage, ou tout au moins ce qui nous en reste, est consacré à la résolution de problèmes conduisant à des équations. Il contient les règles pour résoudre une équation simple du premier degré et l'équation binôme du second degré. La règle pour la résolulion d'une équation quelconque du second degré se trouvait probablement dans un des livres perdus, mais quand l'équation est de la forme $ax^2+bx+c=0$, il paraît avoir multiplié les deux membres par a puis « complété le carré » à peu près de la même manière qu'on le fait actuellement. Quand les racines sont négatives ou irrationnelles, il rejette l'équation comme « impossible » ; et même quand les racines sont toutes les deux positives, il ne donne jamais qu'une seule des racines, en prenant toujours le radical avec le signe plus. Diophante a résolu une équation du troisième degré, à savoir :

$$x^3+x=4x^2+4 \text{ (livre VI, proposition 19).}$$

La plus grande partie de l'ouvrage est cependant réservée aux équations indéterminées à deux ou trois variables. Quand l'équation est à deux variables, si elle est du premier degré, il attribue une valeur convenable à l'une des variables et résout l'équation par rapport à l'autre. Beaucoup de ses équations sont de la forme

$$y^2=Ax^2+Bx+C.$$

Toutes les fois que les quantités A et C sont nulles, il peut résoudre l'équation complétement, mais lorsqu'il n'en est pas ainsi, si $A=a^2$, il pose $y=ax+m$; si $C=c^2$, il pose $y=mx+c$; et enfin si l'équation peut se mettre sous la forme

$$y^2=(ax\pm b)^2+c^2,$$

il pose $y=mx$; dans chacun des cas m est un certain coefficient numérique, variable suivant le problème traité. Quelques équations particulières d'un degré plus élevé se rencontrent aussi dans l'ouvrage, mais alors il modifie généralement le problème de façon

[illegible] er l'équation à l'une des formes

[illegible] inées simultanées comprenant trois [illegible] bles », comme il les appelle, celles [illegible]

$$[illegible] \quad \text{et} \quad z^2 = ax^2 + bx + c.$$

[illegible] s, il donne une ou deux manières [illegible] nous contenterons de citer une de [illegible] me suit :

[illegible] à membre, ce qui lui donne une [illegible]

$$[illegible] mx + n;$$

$$[illegible] = \lambda,$$

[illegible]

$$[illegible] = \frac{mx + n}{\lambda}$$

[illegible] Sa façon de traiter les « équations [illegible] manque de généralité et dépend des [illegible] res du problème.

[illegible] le-même du livre. Les problèmes [illegible] donne sont si variés, qu'il n'est [illegible] vec toute la concision désirable ; [illegible] hodes nous avons donc choisi cinq [illegible] le plus avoir frappé ses critiques, [illegible] ans le choix comme inconnues de [illegible] t à des équations qu'il peut ré- [illegible] oyen desquels il trouve les solu- [illegible] s.

[illegible] uivants comme exemples caracté- [illegible]

[illegible] ls que les sommes de trois d'entre [illegible] possibles soient égales à quatre nom- [illegible] re I, prop. 17).

[illegible] e nombres, les nombres cherchés [illegible]

$$[illegible] \quad x - 27 \quad \text{et} \quad x - 20.$$

On a donc

$$x = (x - 22) + (x - 24) + (x - 27) + (x - 20)$$

d'où

$$x = 31$$

et les nombres sont 9, 7, 4 et 11.

2° *Diviser un nombre tel que* 13, *qui est la somme de deux carrés* 4 *et* 9, *en deux autres carrés* (livre II, prop. 10).

Puisque, dit-il, les carrés donnés sont 2^2 et 3^2, il prendra $(x + 2)^2$ et $(mx - 3)^2$ pour les carrés cherchés.

En supposant $m = 2$, il pose l'équation

$$(x + 2)^2 + (2x - 3)^2 = 13$$

d'où

$$x = \frac{8}{5}.$$

Les carrés cherchés sont donc

$$\frac{324}{25} \quad \text{et} \quad \frac{1}{25}.$$

3° *Trouver deux carrés tels qu'en ajoutant à leur produit soit l'un, soit l'autre, on ait deux nouveaux carrés* (livre II, prop. 29).

Soient x^2 et y^2 les nombres cherchés. D'après les conditions imposées $x^2y^2 + y^2$ et $x^2y^2 + x^2$ sont des carrés.

La première somme sera un carré si $x^2 + 1$ est un carré. Il suppose que ce dernier peut être pris égal à $(x - 2)^2$ ce qui lui donne

$$x = \frac{3}{4}.$$

ensuite

$$\frac{9}{16}(y^2 + 1)$$

doit être un carré et dans ce but il suppose que

$$9y^2 + 9 = (3y - 4)^2$$

d'où il tire

$$y = \frac{7}{24}.$$

Les carrés cherchés sont, par suite,

$$\frac{9}{16} \quad \text{et} \quad \frac{49}{576}.$$

Il faut se rappeler que Diophante n'employait qu'un seul symbole pour désigner une quantité inconnue et dans l'exemple mentionné il commence par appeler les inconnues x^2 et 1, puis aussitôt la valeur de x trouvée, il remplace le 1 par le symbole usité pour représenter l'inconnue et détermine cette seconde inconnue à son tour.

4° *Trouver un triangle rectangle (rationnel) tel que la bissectrice de l'un des angles aigus soit rationnelle* (livre VI, problème 18).

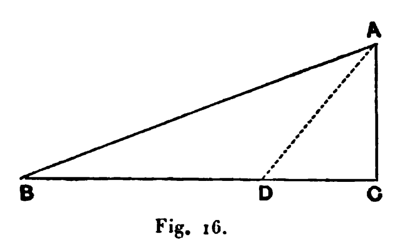


Fig. 16.

Voici sa solution. Soit ABC un triangle rectangle en C remplissant les conditions de l'énoncé.

Représentons la bissectrice AD par $5x$ et DC par $3x$, alors

$$AC = 4x.$$

Supposons ensuite que BC soit un multiple de 3, 3 par exemple.

Par suite

$$BD = 3 - 3x \quad \text{et} \quad AB = 4 - 4x.$$

Alors

$$(4 - 4x)^2 = 3^2 + (4x)^2$$

d'où

$$x = \frac{7}{32}.$$

En multipliant par 32 nous obtenons pour les côtés des triangles 28, 96 et 100, et pour la bissectrice 35.

5° *Un homme achète x mesures de vin, les unes à 8 drachmes, les autres à 5. Il paie pour le tout un nombre de drachmes représenté par un carré, tel que si on y ajoute 60 le nombre résultant est égal à x^2. Trouver le nombre des mesures achetées à chaque prix* (livre V, prob. 33).

Le prix payé est $x^2 - 60$; on doit par conséquent avoir

$$8x > x^2 - 60 \quad \text{et} \quad 5x < x^2 - 60$$

d'où il résulte que x doit être plus grand que 11 et plus petit que 12.

De plus $x^2 - 60$ est un carré, supposons-le égal à $(x - m)^2$ alors

$$x = \frac{m^2 + 60}{2m}$$

et nous pouvons poser la double inégalité

$$11 < \frac{m^2 + 60}{2m} < 12$$

ou

$$19 < m < 21.$$

Diophante supposait par conséquent $m = 20$, ce qui lui donnait

$$x = 11\frac{1}{2}$$

et, pour le prix total, c'est-à-dire pour $x^2 - 60$, $72\frac{1}{4}$ drachmes.

Il lui faut ensuite diviser cette somme en deux parties, qui lui donneront respectivement le prix des mesures à 8 drachmes et celui des mesures à 5 drachmes. Soient y et z ces parties

$$\frac{z}{5} + \frac{72\frac{1}{4} - z}{8} = \frac{1}{2}$$

par suite

$$z = \frac{5 \times 79}{12} \quad \text{et} \quad y = \frac{8 \times 59}{12}.$$

Le nombre des mesures à 5 drachmes était donc $\frac{79}{12}$ et le nombre des mesures à 8 drachmes $\frac{59}{12}$.

Il résulterait de l'énoncé de la question que le vin était de faible qualité, et Tannery, a ingénieusement suggéré que les prix mentionnés pour un tel vin sont plus élevés que ceux qui étaient payés jusqu'à la fin du second siècle. C'est pourquoi il repousse l'hypothèse, anciennement admise, qui faisait vivre Diophante dans ce siècle, mais il paraît ignorer que de Morgan avait démontré antérieurement que cette hypothèse n'était pas admissible. Tannery incline à croire que Diophante vivait un demi-siècle plus tôt que nous l'avons supposé.

Nous avons dit que Diophante composa un troisième ouvrage in-

titulé *Porismes.* Le livre est perdu, mais nous avons les énoncés de quelques-unes des propositions qui s'y trouvaient et bien que nous ne sachions pas si elles ont été rigoureusement démontrées, elles nous confirment dans l'opinion que l'on s'est formée de son savoir et de son intelligence. On a prétendu que quelques-uns des théorèmes qu'il admet dans son arithmétique étaient démontrés dans le livre des Porismes. Parmi les plus remarquables de ces questions nous citerons les suivantes :

La différence de deux cubes peut toujours être transformée en une somme de deux cubes.

Aucun nombre de la forme $4n - 1$ ne peut être décomposé en une somme de deux carrés ;

Aucun nombre de la forme $8n - 1$ (ou peut-être $24n + 7$) ne peut être décomposé en une somme de trois carrés.

Nous pourrions peut-être ajouter à ces énoncés cette proposition : que tout nombre est équivalent à un carré ou à la somme de deux, de trois ou de quatre carrés.

Les écrits de Diophante n'eurent aucune influence sur les progrès des sciences mathématiques en Grèce, mais son *arithmétique*, une fois traduite en arabe dans le dixième siècle, eut beaucoup d'influence sur l'école arabe et, par suite, contribua aux progrès des mathématiques en Europe. Une copie imparfaite de l'ouvrage original a été découverte en 1462 ; traduite en latin par Xylander, elle fut publiée en 1575 ; cette traduction excita un intérêt général ; mais déjà à cette époque les algébristes en Europe avaient, en fait, dépassé les limites des connaissances de Diophante.

Jamblique. — *Jamblique* (vers 350) à qui nous devons un ouvrage remarquable sur les découvertes et les doctrines Pythagoriciennes, paraît avoir également étudié les propriétés des nombres. Il fit connaître ce théorème : si l'on prend un nombre égal à la somme de trois entiers de la forme $3n$, $3n - 1$ et $3n - 2$, et qu'on additionne les chiffres de ce nombre, ce qui donne un nouveau nombre, puis les chiffres de ce nouveau nombre et ainsi de suite, on doit obtenir 6 comme dernier résultat.

Par exemple 159 est la somme de 54, 53 et 52, la somme des chiffres de 159 est 15, et la somme des chiffres de 15 est 6.

La démonstration de ce théorème devait présenter quelques diffi-

cultés à ceux qui ne connaissaient que la notation numérique usuelle des Grecs : il est possible qu'il ait été établi d'une façon empirique, mais, selon Gow, il viendrait à l'appui de cette supposition, que les Grecs possédaient un symbolisme ressemblant à la notation numérique des Arabes.

Nous terminerons utilement cette longue liste de mathématiciens appartenant à l'École d'Alexandrie en signalant deux commentateurs.

Théon. — Le premier d'entre eux, *Théon d'Alexandrie*, florissait vers 370. Il n'était pas un mathématicien très réputé, mais nous lui devons une édition des *Éléments* d'Euclide et un commentaire de l'*Almageste*.

Ce dernier ouvrage (1) nous fournit un grand nombre d'informations variées sur les méthodes numériques employées par les Grecs.

Hypathie. — Le second fut *Hypathie* la fille de Théon. Plus renommée que son père, on la considère comme le dernier mathématicien célèbre de l'école d'Alexandrie : elle écrivit un Commentaire sur les *coniques* d'Apollonius et peut-être aussi quelques autres ouvrages, mais aucun d'eux ne nous est parvenu. Elle fut assassinée à l'instigation des chrétiens en 415.

Le sort d'*Hypathie* nous rappelle que les chrétiens d'Orient, aussitôt qu'ils devinrent les maîtres, se montrèrent impitoyablement hostiles à toutes les formes d'enseignement profane. N'ayant qu'un seul but, propager la religion chrétienne, ils persécutèrent ceux qui ne les aidaient pas dans leur propagande religieuse. On peut voir dans le roman de Kingsley (2) la manière dont ils attaquèrent les vieilles écoles scientifiques. Avec l'établissement du christianisme en Orient, ces écoles cessèrent d'exister, de fait, bien qu'elles aient vécu encore nominalement pendant environ deux cents ans.

(1) Traduit et commenté par M. Halma, il a été publié à Paris, en 1821.

(2) Allusion au roman de l'écrivain anglais Charles Kingsley, intitulé *Hypathie*. (N. du T).

L'ÉCOLE ATHÉNIENNE [1] (DANS LE V° SIÈCLE)

La fin de la dernière École athénienne nous fournit encore un exemple plus frappant de l'hostilité de l'église d'Orient contre la science grecque. Cette École n'occupe qu'une place restreinte dans notre histoire. Depuis le temps de Platon, un certain nombre de mathématiciens de profession avaient toujours vécu à Athènes ; et, vers l'année 420, cette École jouissait de nouveau d'une grande réputation due surtout aux nombreux étudiants qui, après le meurtre d'Hypathie, avaient abandonné Alexandrie pour Athènes. Ses membres les plus remarquables furent Proclus, Damascius et Eutocius.

Proclus. — *Proclus* naquit à Constantinople en février 412 et mourut à Athènes le 17 avril 485. Il écrivit un commentaire sur les *Eléments* d'Euclide ; la partie [2] relative au premier livre est développée et contient un grand nombre de renseignements utiles sur l'histoire des mathématiques ; il est diffus et lourd, mais il nous donne heureusement des citations empruntées à d'autres autorités plus compétentes.

Proclus fut remplacé à la tête de l'Ecole par *Marinus* et à ce dernier succéda *Isidore*.

Damascius. Eutocius. — Nous pouvons mentionner en passant deux élèves d'Isidore qui postérieurement et à leur tour enseignèrent à Athènes. *Damascius* de Damascus, vers 490, ajouta aux *Eléments* d'Euclide un quinzième livre sur l'inscription d'un solide régulier dans un autre. *Eutocius*, vers 510, écrivit des commentaires sur les quatre premiers livres des *Coniques* d'Apollonius et sur divers ouvrages d'Archimède ; il donna aussi quelques exemples de l'arithmétique pratique des grecs. Ses écrits n'ont jamais été publiés bien qu'ils paraissent dignes d'intérêt.

La dernière Ecole Athénienne vécut au milieu de grandes diffi-

(1) Voir *Untersuchungen über die neu aufgefundenen Scholien des Proklus*, par J. H. Knoche. Herford, 1865.

(2) Elle a été éditée par G. Friedlein. Leipzig, 1873.

cultés causées par l'opposition des Chrétiens. Ainsi Proclus fut plusieurs fois menacé de mort, parce qu'il était « un philosophe ». On a souvent cité de lui cette réponse à quelques étudiants qui s'offraient pour le protéger : « qu'importe mon corps, ce n'est pas pour lui que je crains, mais c'est mon esprit que j'emporterai avec moi en mourant. » Les Chrétiens, après quelques tentatives qui n'aboutirent pas, obtinrent enfin en 529, de Justinien, un décret par lequel « l'enseignement païen » ne pouvait plus être donné à Athènes. C'est par conséquent cette date qui marque la fin de l'Ecole Athénienne.

A Alexandrie, l'Eglise d'Orient était moins influente et la ville se trouvait plus éloignée du pouvoir Central. Les Ecoles y furent donc tolérées, mais leur existence n'était que précaire. C'est dans ces conditions que l'on continua à étudier encore les mathématiques en Egypte pendant une période de cent ans, mais tout goût pour l'étude avait disparu.

LES MATHÉMATIQUES CHEZ LES ROMAINS (1)

Nous ne pouvons terminer cette partie de notre histoire sans faire mention des mathématiques à Rome, car c'est de cette ville qu'elles se répandirent dans l'Europe du moyen âge et toutes les histoires modernes tirent leur origine de Rome. Nous avons cependant très peu de détails à donner. A Rome on étudiait surtout l'art de gouverner, soit par l'autorité des lois, soit par la persuasion, soit en ayant recours à ces moyens matériels sur lesquels, en définitive, s'appuie tout gouvernement. Sans doute, les professeurs capables de faire connaître les conquêtes de la science grecque ne manquaient pas, mais une école de mathématiques n'avait jamais été demandée. Les Italiens désireux d'acquérir une instruction scientifique complète, se rendaient à Alexandrie ou dans des centres se rattachant à l'école d'Alexandrie.

Les mathématiques, telles qu'elles étaient enseignées dans les Ecoles à Rome, semblent avoir été limitées, en arithmétique, à l'art

(1) Le sujet a été étudié par CANTOR, chap. XXV, XXVI et XXVII ; et aussi par HANKEL, pp. 294-304.

du calcul (sans nul doute avec l'aide de l'abaque) et peut-être aux parties les plus faciles de l'ouvrage de Nicomaque ; en géométrie, à quelques règles pratiques. Cependant certaines sciences basées sur la connaissance des mathématiques (principalement celle de l'arpentage) furent portées à un haut degré de perfection. Il paraîtrait aussi que la représentation des nombres au moyen de signes attira particulièrement l'attention. La manière de désigner les nombres jusqu'à dix, en se servant des doigts, a dû être mise en pratique depuis les temps les plus reculés ; elle fut perfectionnée par les romains, vers le premier siècle, et se transforma en un symbolisme digital qui leur permit de représenter les nombres jusqu'à 10 000, ou peut-être jusqu'à une limite encore plus reculée : le système, semble-t-il, était enseigné dans les Ecoles romaines. Bede le décrit et par conséquent il se serait répandu vers l'Ouest, au moins jusqu'à la Bretagne ; Jérôme en parle également et son usage s'est conservé dans les bazars persans.

Nous ne connaissons aucun ouvrage latin sur les principes de la mécanique, mais il existait de nombreux traités, dans lesquels le côté pratique seul était envisagé et qui discutaient minutieusement des questions concernant l'architecture et la science de l'ingénieur. Nous pouvons nous faire une idée de ce qu'ils renfermaient par les *Mathematici Veteres* qui forment une collection de petits traités sur les catapultes, les engins de guerre et par le χεστοί, dû à Sextus Julius Africanus vers la fin du second siècle et dont une partie, comprise dans les *Mathematici Veteres*, contient, entre autres choses, des règles pour déterminer la largeur d'une rivière que l'on ne peut franchir, parce que par exemple la rive opposée est occupée par l'ennemi, et la manière de correspondre par signaux au moyen de sémaphores.

Dans le sixième siècle, Boëce publia une géométrie contenant quelques propositions d'Euclide et une arithmétique basée sur celle de Nicomaque ; à peu près à la même époque, Cassiodore posa les bases d'une instruction libérale qui, après le trivium préliminaire comprenant la grammaire, la logique et la rhétorique, passait au quadrivium constitué par l'arithmétique, la géométrie, la musique et l'astronomie. Ces ouvrages furent écrits à Rome dans les dernières années des Ecoles d'Athènes et d'Alexandrie et, par suite, nous les mentionnons ici, mais comme leur seule valeur

tient à ce qu'ils devinrent les livres classiques acceptés pour l'enseignement au moyen âge, nous ajournerons leur examen qui sera présenté au chapitre VIII.

En fait les mathématiques théoriques constituaient à Rome une étude exotique ; le génie de la nation était essentiellement pratique, et pendant la fondation de l'Empire, pendant toute sa durée et sous la domination des Goths, les sciences abstraites se trouvèrent dans des conditions peu favorables à leur développement.

Alexandrie au contraire se trouvait admirablement située pour devenir un centre scientifique. Depuis sa fondation jusqu'à sa prise par les Mahométans elle ne fut troublée par aucune guerre soit étrangère, soit intérieure, en faisant cependant exception des quelques années de transition du règne de Ptolémée à la domination romaine. La Cité était opulente, et ses gouverneurs se faisaient une gloire de contribuer à l'embellissement de l'Université.

Non seulement l'Orient et l'Occident s'y donnaient rendez-vous pour les transactions commerciales, mais encore elle eut la bonne fortune de voir les Grecs et les différents peuples sémitiques se fixer dans ses murs. Mais, avec le temps, les événements prirent graduellement une tournure de moins eu moins favorable au développement de la science ; les discussions perpétuelles des chrétiens sur les dogmes théologiques et l'insécurité croissante dans l'empire dirigèrent les esprits dans d'autres voies.

FIN DE LA SECONDE ECOLE D'ALEXANDRIE

Pendant les deux derniers siècles de son existence, la seconde école d'Alexandrie eut une existence trop précaire et un mouvement scientifique trop infécond pour laisser des traces dans l'histoire.

Mahomet mourut en 632 et ses successeurs mirent dix ans pour soumettre la Syrie, la Palestine, la Mésopotamie, la Perse et l'Egypte. La date précise de la chute d'Alexandrie est incertaine mais les historiens arabes les plus dignes de confiance la fixent au 10 décembre 641, date qui, dans tous les cas, est exacte à dix-huit mois près.

La longue histoire des mathématiques grecques prend fin avec la chute d'Alexandrie. Il est probable que la plus grande partie de la fameuse bibliothèque de l'Université ainsi que le Musée avaient été détruits par les chrétiens cent ou deux cents ans auparavant, ce qui en restait devait être de peu de valeur et fut sans doute négligé. Deux ou trois ans après la première prise d'Alexandrie une sérieuse révolte éclata en Egypte, elle fut impitoyablement réprimée. Nous n'avons aucune raison de mettre en doute le récit d'après lequel les Mahométans, après avoir pris la ville, détruisirent les constructions universitaires et les collections qui existaient encore. On raconte que lorsque le chef des Arabes donna l'ordre de brûler la bibliothèque, les Grecs firent entendre des protestations si énergiques, qu'il consentit à en référer au Calife Omar. Celui-ci fit cette réponse : « Quant aux ouvrages dont vous parlez, s'ils sont conformes au livre de Dieu ils sont inutiles, s'ils sont contraires ils sont pernicieux, dans tous les cas il faut les détruire. » Ils furent, dit-on, brûlés dans les bains publics, et l'incinération dura six mois.

CHAPITRE VI

—

L'ECOLE BYZANTINE

(641-1453)

L'histoire de l'Ecole Byzantine se place à côté de celle des mathématiques grecques. Après la prise d'Alexandrie par les Mahométans, la majorité des philosophes qui professaient dans cette cité émigrèrent à Constantinople, qui devint alors et demeura pendant 800 ans, le centre de l'enseignement grec en Orient. Mais, bien que l'histoire de l'Ecole byzantine s'étende sur un aussi grand nombre d'années, — c'est-à-dire sur une période à peu près égale à celle qui va de la conquête des Normands à nos jours — elle est absolument dépourvue d'intérêt scientifique, et son principal mérite est de nous avoir conservé les ouvrages des différentes Ecoles grecques. La révélation aux nations occidentales de ces ouvrages, dans le quinzième siècle, doit être considérée comme l'une des sources les plus abondantes, d'où jaillirent les idées qui se développèrent dans l'Europe moderne, et l'histoire de l'Ecole byzantine peut se résumer en disant qu'elle joua le rôle d'un conduit qui déversa jusqu'à nous les résultats obtenus antérieurement à une époque plus brillante.

En ces temps ds luttes incessantes, les courtes périodes de paix étaient consacrées à des subtilités théologiques et à des disputes de grammairiens. Si les écrivains dont les noms suivent avaient vécu dans la période Alexandrine nous n'en aurions pas fait mention, mais, à défaut d'autres, on peut les signaler pour faire connaître le caractère de l'Ecole. Il est peut-être bon aussi de faire remarquer ici aux lecteurs que nous abandonnons momentanément

l'ordre chronologique et que les mathématiciens cités dans ce chapitre sont contemporains de ceux que nous trouverons dans le chapitre consacré à l'histoire des mathématiques au moyen âge. L'Ecole de Byzance était tellement isolée, que nous avons pensé que c'était là le meilleur arrangement que comportait le sujet.

Héron. — L'un des plus anciens membres de l'Ecole Byzantine fut *Héron de Constantinople*, vers 900, dénommé quelquefois *le jeune* pour le distinguer d'Héron d'Alexandrie. Héron aurait écrit un ouvrage sur la géodésie et sur l'application de la mécanique aux engins de guerre.

Pendant le dixième siècle deux empereurs, Léon VI et Constantin VII montrèrent beaucoup d'intérêt pour l'astronomie et les mathématiques mais le stimulant que leur intervention donna à ces études ne fut que temporaire.

Psellus. — Dans le onzième siècle, *Michel Psellus*, né en 1020, écrivit sur le quadrivium une brochure (¹) qui se trouve actuellement à la Bibliothéque Nationale de Paris.

Au quatorzième siècle, nous trouvons les noms de trois moines qui s'occupèrent de mathématiques.

Planude. Barlaam. Argyrus. — Le premier des trois est *Maxime Planude* (²). Il écrivit un commentaire sur les deux premiers livres de *l'arithmétique* de Diophante ; un traité sur *l'arithmétique selon les Indiens*, dans lequel il introduisait dans l'empire d'Orient l'usage des chiffres Arabes ; et un autre sur les proportions dont le manuscrit se trouve à la Bibliothèque Nationale de Paris.

Le suivant, *Barlaam*, est un moine calabrais qui naquit en 1290 et mourut en 1348. Il composa un ouvrage, *Logistique*, sur les méthodes grecques de calcul, contenant beaucoup de renseignements sur la façon dont les grecs traitaient pratiquement les frac-

(¹) Elle a été imprimée à Bâle, en 1556. PSELLUS écrivit un *Compendium Mathematicum* qui fut imprimé à Leyde, en 1647.

(²) Ses commentaires arithmétiques ont été publiés par XYLANDER. Bâle, 1575 ; son ouvrage sur l'*Arithmétique des Indiens*, édité par C. J. GERHARDT, a été publié à Halle, 1865.

tions (1). Barlaam paraît avoir été un homme fort intelligent. Envoyé comme ambassadeur auprès du pape à Avignon, il s'acquitta avec honneur d'une mission délicate et pendant son séjour dans cette ville il enseigna le grec à Pétrarque. La façon dont il ridiculisa une légende absurde émise par les moines du Mont Athos l'avait rendu fâmeux à Constantinople. Ces moines prétendaient que ceux qui venaient au milieu d'eux pouvaient, en se tenant au repos, dépouillés de leurs vêtements, la barbe tombant sur le ventre et les yeux fixés avec persistance sur le nombril, voir une flamme mystique, qui était l'essence de Dieu. Barlaam leur conseilla de substituer la lumière de la raison à cette prétendue lumière du bas-ventre et ce conseil faillit lui coûter la vie.

Le dernier de ces moines fut Argyrus qui mourut en 1372. Il écrivit trois traités d'astronomie dont les manuscrits se trouvent dans les Bibliothèques du Vatican, de Leyde et de Vienne; un traité de géodésie dont le manuscrit est à l'Escurial; un ouvrage sur la géométrie dont la Bibliothèque Nationale de Paris posséde le manuscrit; un autre sur l'arithmétique de Nicomaque qui se trouve également en manuscrit à la Bibliothèque Nationale, et enfin un traité de trigonométrie dont le manuscrit existe à Oxford à la Bibliothèque Bodleienne.

Rhabdas. — Dans le courant du quatorzième siècle ou peut-être du quinzième, *Nicolas Rhabdas de Smyrne* écrivit sur l'arithmétique deux opuscules (2) qui sont actuellement à la Bibliothèque Nationale de Paris. Il exposa le symbolisme par les doigts (3) que les Romains avaient introduit en Orient et qui était alors d'un usage courant.

Pachymeres. — Au début du quinzième siècle, *Pachymeres* écrivit des traités sur l'arithmétique, la géométrie et sur quatre machines mécaniques.

Moschopulus. — Quelques années plus tard *Emmanuel Mos-*

(1) La *Logistique* de Barlaam, éditée par Dasypodius, fut publiée à Strasbourg, 1572; une autre édition parut à Paris, en 1600.
(2) Ils ont été édités, par S. P. Tannery. Paris, 1886.
(3) Voir ci-dessus, p. 117.

chopulus, qui mourut en Italie vers 1460, composa un ouvrage sur les carrés magiques. *Un carré magique* (¹) consiste en un certain nombre de nombres entiers disposés en carré, de telle sorte que la somme des nombres écrits dans chaque ligne horizontale, dans chaque colonne verticale et dans chaque diagonale soit toujours la même. Si les nombres choisis sont les entiers consécutifs de 1 à n^2, on dit que le carré est de l'ordre n, et dans ce cas la somme des nombres dans chacune des lignes, des colonnes et des diagonales est égal à $\frac{1}{2} n (n^2 + 1)$. Ainsi les 16 premiers nombres entiers, disposés sous l'une des deux formes représentées ci-dessous, donnent un carré magique du quatrième ordre, la somme des nombres dans chacune des lignes, des colonnes et des diagonales étant 34.

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

Fig. 17.

15	10	3	6
4	5	16	9
14	11	2	7
1	8	13	12

Fig. 18.

Dans la philosophie mystique, qui était alors en vogue, on associait souvent à certains nombres particuliers des idées métaphysiques, et il était alors naturel que l'attention fut attirée sur de tels arrangements de nombres auxquels on attribuait des propriétés magiques. La théorie de la formation des carrés magiques est élégante et plusieurs mathématiciens distingués s'en sont occupés, mais, bien qu'intéressante, elle n'est d'aucune utilité ; elle est due en grande partie à De la Hire qui donna les règles pour la construction des carrés magiques d'un ordre quelconque supérieur au second. Moschopulus semble avoir été le plus ancien écrivain en Europe, qui fit quelques tentatives pour établir une théorie mathématique, mais ses règles ne s'appliquent qu'aux carrés impairs.

(¹) Sur la formation et l'histoire des *Carrés magiques*, voir nos *Mathematical Recreations and Problems*. Londres, 3ᵉ édition, 1896, chap. v. Une traduction française en a été publiée par la librairie Hermann.

Sur l'ouvrage de Moschopulus, voir le chapitre iv, de *Geschichte der Mathematischen Wissenschaften*, de S. Günther. Leipzig, 1876.

Les astrologues des quinzième et seizième siècles faisaient grand usage de ces arrangements de nombres. Le fameux Cornelius Agrippa (1486-1535), en particulier, avait construit des carrés magiques des ordres 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, qui étaient respectivement associés aux sept « planètes » astrologiques : Saturne, Jupiter, Mars, le Soleil, Vénus, Mercure et la Lune. Il enseignait que le carré à une case dans laquelle le nombre 1 était inscrit représentait l'unité et l'éternité de Dieu, tandis que le fait qu'on ne pouvait former un carré du second ordre établissait l'imperfection des quatre éléments, l'air, la terre, le feu et l'eau ; plus tard d'autres écrivains ajoutèrent que cela symbolisait le péché originel. Un carré magique gravé sur une plaque d'argent était souvent recommandé comme un charme contre la peste, et l'un de ceux que nous avons représentés ci-dessus (le premier) se trouve dessiné sur le portrait de la mélancolie peint par Albert Dürer vers l'année 1500. De tels talismans sont encore en usage en Orient.

Les Turcs s'emparèrent de Constantinople en 1453 et ainsi disparut ce que nous pouvons appeler la dernière image d'une Ecole grecque de mathématiques. De nombreux grecs se réfugièrent en Italie. En Occident le souvenir de la science grecque s'était effacé et on ignorait même les noms des écrivains de cette nationalité à quelques rares exceptions près. Aussi les ouvrages apportés par ces exilés furent une révélation pour l'Europe et, comme nous le verrons plus loin, donnèrent un stimulant considérable à l'étude de la science.

CHAPITRE VII

SYSTÈMES DE NUMÉRATION ET ARITHMÉTIQUE PRIMITIVE [1]

Nous avons déjà fait plusieurs fois allusion à la méthode employée par les Grecs pour représenter les nombres et nous avons pensé qu'il était préférable de reporter à ce chapitre tout ce que nous avions à dire au sujet des différents systèmes de notations numériques, qui furent remplacés par la notation des Arabes.

Voyons d'abord ce qui concerne le symbolisme et le langage. La représentation des nombres par les doigts de l'une ou des deux mains est si naturelle que nous la trouvons employée chez les races primitives, et il n'existe actuellement aucune tribu qui n'en connaisse l'usage, tout au moins pour les nombres ne dépassant pas dix ; il est même avéré que, dans quelques langues, les noms des dix premiers nombres dérivent de ceux des doigts qu'ils désignent. Mais la limite au delà de laquelle un homme primitif ne sait plus compter est vite atteinte, et on a reconnu que certaines peuplades n'ont pas de termes pour désigner les nombres plus grands que dix, quelquefois même plus grands que quatre ; pour les autres elles se servent d'une façon générale des mots abondance ou tas et, à ce propos, il n'est pas inutile de remarquer (comme nous

(1) Le sujet de ce chapitre a été traité par Cantor et par Hankel. Voir aussi *Philosophy of Arithmetic*, par John Leslie, seconde édition. Edimbourg, 1820.

Outre ces autorités consultez l'article sur l'*Arithmétique*, par George Peacock dans la *Encyclopædia Metropolitana, Pure sciences*. Londres, 1845 ; E. B. Tylor, *Primitive Culture*. Londres, 1873 ; *Les signes numéraux et l'arithmétique chez les peuples de l'antiquité*... par T. H. Martin. Rome, 1864 ; et *Die Zahlzeichen*... par G. Friedlein. Erlangen, 1869.

l'avons déjà fait) que les Egyptiens employaient le symbole représentant le mot tas, pour indiquer, en algèbre, une quantité inconnue.

Le nombre 5 est généralement représenté par la main ouverte, et on prétend que dans presque toutes les langues les mots cinq et main ont la même racine. Il est possible que dans les temps primitifs les hommes ne comptaient pas réellement au delà de cinq et, lorsque les objets dont ils voulaient faire le dénombrement étaient plus nombreux, ils les exprimaient par multiples de cinq. Ainsi le symbole X des Romains pour 10 représentait probablement deux V opposés par le sommet et il paraît remonter à une époque où l'on comptait par cinq [1]. Notons qu'aujourd'hui encore à Java et chez les Aztèques la semaine a une durée de cinq jours.

Presque toutes les races sur lesquelles nous avons aujourd'hui quelques renseignements paraissent cependant avoir fait usage des doigts des deux mains pour représenter les nombres. Elles pouvaient donc compter jusqu'à dix inclusivement et par là elles furent naturellement conduites à prendre dix comme racine de leur système de numération. En Anglais, par exemple, tous les mots désignant les nombres supérieurs à dix sont exprimés d'après le système décimal : *eleven* et *twelve*, qui paraissent tout d'abord faire exception, sont dérivés de mots anglo-saxons signifiant respectivement un et dix, deux et dix [2].

Quelques peuples semblent avoir été plus loin encore et avoir compté par multiples de vingt en faisant usage des doigts de leurs pieds. On prétend qu'il en était ainsi chez les Aztèques. On doit observer que l'on compte encore en Angleterre certaines choses (par exemple les troupeaux de moutons) par scores, le mot *score* signifiant une raie, une marque, faite sur chaque individu entrant dans la constitution d'un groupe de vingt ; tandis qu'en France on parle de quatre-vingt comme si à une certaine époque, les objets avaient été comptés par multiples de vingt. Cependant nous ne présentons cette remarque que sous réserves car il nous semble

[1] Voir aussi *Odyssée*, IV, 413-415, on y fait une allusion apparente à une semblable coutume.

[2] En France les mots onze, douze, treize, quatorze, quinze et seize font exception ; ce sont des expressions empruntées du latin : *undecim*, *duodecim*, *tredecim*, *quatuordecim*, *quindecim*, *sexdecim* et consacrées par l'usage. (N. du T).

avoir vu le mot *octante* dans de vieux ouvrages français et il est certain (¹) qu'autrefois les mots *septante* et *nonante* étaient communément employés pour soixante-dix et quatre-vingt-dix (²). Quelques dialectes les ont conservés.

Les seules tribus qui, d'après les récits qui nous sont parvenus, ne compteraient pas par 5 ou multiples de 5 sont les Bolans de l'Afrique occidentale et les Maories ; on prétend que les premiers comptent par multiples de sept et les seconds par multiples de onze.

Il est relativement facile de compter jusqu'à 10, mais les peuplades primitives éprouvèrent de grandes difficultés pour évaluer les nombres supérieurs ; cette difficulté fut surmontée tout d'abord en apparence par l'intervention de deux hommes (comme cela se pratique encore dans le sud de l'Afrique), l'un comptant au moyen de ses doigts jusqu'à 10 et le second comptant le nombre de groupes de 10 unités ainsi formés. Il est clair que cette opération revient pour nous à indiquer par une marque conventionnelle chaque multiple de dix, mais on prétend que dans beaucoup de tribus on n'est jamais parvenu à faire compter les indigènes au-delà de 10 à moins de les laisser opérer avec deux hommes.

Plusieurs peuplades cependant, que leurs tendances portaient à la civilisation, allèrent plus loin et imaginèrent un moyen de représenter les nombres avec des cailloux ou des jetons disposés par tas de dix ; cette idée perfectionnée donna naissance à son tour à l'abaque ou suan-pan. Ces instruments étaient en usage chez des peuples si éloignés les uns des autres, comme les Etrusques, les Grecs, les Egyptiens, les Indiens, les Chinois et les Mexicains, qu'ils furent, pense-t-on, inventés indépendamment dans des centres différents. Ils sont encore communément employés en Russie, en Chine et au Japon.

Sous sa forme la plus simple (voir *fig.* 19), l'abaque est une

(¹) Voir par exemple *Practique... à ciffrer*, de V. M. DE KEMPTEN. Anvers, 1556.

(²) Les mots *Septante*, *Octante* et *Nonante*, auxquels un usage que nous croyons regrettable a substitué les mots *soixante-dix*, *quatre-vingt*, *quatre-vingt-dix*, sont encore usités dans quelques localités du Midi de la France, en Belgique et en Suisse.

Condorcet avait proposé de substituer *unante* et *duante* à dix et vingt pour la régularité qui aurait été parfaite en maintenant les dénominations *septante*, *octante* et *nonante*. (N. du T).

tablette de bois portant un certain nombre de rainures longitudinales ou une table recouverte d'une couche de sable dans lequel on a tracé des sillons avec les doigts. On représente un nombre en mettant dans la première rainure autant de cailloux ou de jetons qu'il contient d'unités, dans la seconde, autant de cailloux ou de jetons qu'il contient de dizaines, et ainsi de suite. Quand on veut à l'aide de l'abaque compter un certain nombre d'objets, on place dans la première rainure autant de cailloux qu'il y a d'objets et dès qu'on a dix cailloux dans cette première rai-

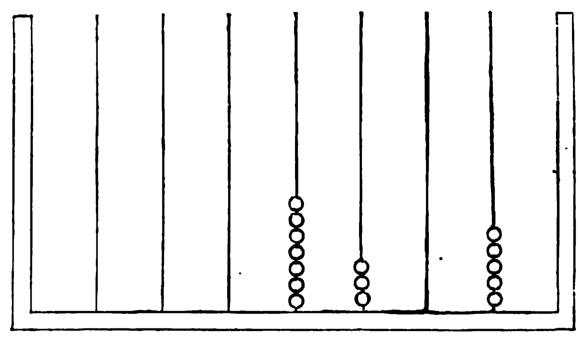


Fig. 19.

nure, on les enlève et on place un caillou dans la seconde, et ainsi de suite. Quelquefois, comme dans le *quibus* des Aztèques, l'appareil était constitué par un certain nombre de tiges parallèles ou de cordes fixées sur un cadre en bois et sur lesquelles on pouvait faire glisser des boules ou des grains ; sous cette forme on a l'instrument appelé suan-pan. Dans le nombre représenté sur chacun des appareils représentés par les figures 19, 20 et 21, il y a sept mille, trois centaines, pas de dizaines et cinq unités, c'est-à-dire qu'on a formé le nombre 7305. Chez quelques peuples on comptait de gauche à droite, chez d'autres, de droite à gauche, mais ce n'est là qu'une pure question de convention.

Les abaques romains paraissent avoir été plus perfectionnés. Ils avaient deux rainures marginales ou deux tringles, sur l'une desquelles se trouvaient 4 boules pour faciliter l'addition des fractions ayant pour dénominateur quatre, et sur l'autre 12 boules pour les fractions ayant pour dénominateur douze ; en dehors de cela, ils ne différaient pas en principe de ceux dont nous venons de parler.

Ils étaient généralement construits pour représenter les nombres jusqu'à 100 000 000. Les abaques grecs ressemblaient à ceux des Romains. Les Grecs et les Romains se servaient parfois de leurs abaques comme d'une table pour jouer un jeu ayant une certaine analogie avec le trictrac.

Dans le tschotü des Russes (voir *fig.* 20), qui est un perfectionnement des instruments précédents, les tiges sont fixées à demeure dans un cadre rectangulaire, et sur chacune d'elles sont enfilées neuf ou dix boules. Supposons le cadre horizontal et toutes les boules poussées vers une même extrémité des tiges, l'extrémité supérieure par exemple : on pourra alors représenter un nombre quelconque en faisant glisser vers l'autre extrémité autant de boules de la première tige que le nombre renferme d'unités, autant de boules de la seconde tige que le nombre renferme de dizaines et ainsi de suite.

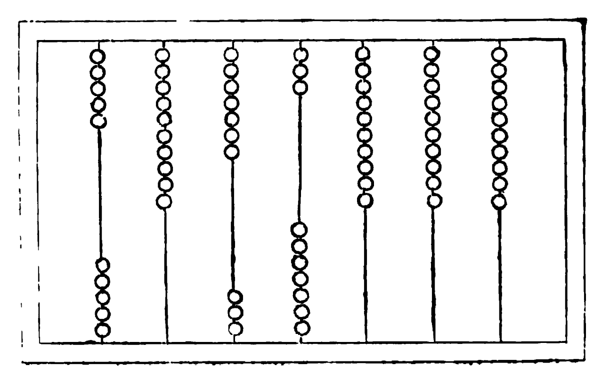


Fig. 20.

Les calculs peuvent s'effectuer avec plus de rapidité si, sur chaque tige, les cinq boules les plus voisines du bord supérieur du cadre sont colorées d'une autre façon que les cinq boules les plus proches du bord inférieur et ils seront rendus encore plus faciles si la 1re, la 2me, la 3me, ..., et la 9me boules de chaque colonne portent respectivement des marques symboliques désignant les nombres 1, 2. 3, ..., 9. Gerbert [1] aurait, dit-on, introduit dans le courant du dixième siècle, des marques de ce genre appelées *apices*.

(1) Voir plus loin, p. 144.

La figure 21 ci-dessous donne le croquis du suan-pan en usage en Chine et au Japon. Là encore un nouveau perfectionnement a été introduit et on a remplacé sur chaque tige cinq boules par une seule dont la grosseur n'est pas la même ou qui occupe une position différente, mais les apices ne sont pas employées. Nous nous sommes laissé raconter qu'un Japonnais exercé peut, avec l'aide d'un suan-pan, effectuer des additions en même temps qu'on lui énonce les nombres et aussi vite. Il faut remarquer que l'instrument en question est disposé de telle sorte qu'on peut s'en servir pour représenter deux nombres à la fois.

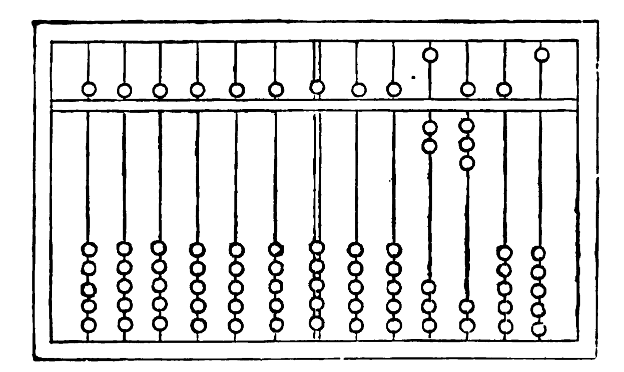


Fig. 21.

L'emploi de l'abaque pour faire des additions ou des soustractions se comprend tout seul. On peut aussi l'utiliser pour la multiplication et la division, et les règles à cet effet avec des exemples à l'appui sont exposées dans divers ouvrages d'arithmétique anciens ([1]).

Il est évident que l'abaque donne un moyen concret de représenter un nombre dans le système de numération décimale, c'est-à-dire en considérant la valeur attribuée à chaque chiffre suivant sa position par rapport aux autres. Malheureusement les méthodes pour écrire les nombres présentèrent des différences suivant les centres où elles avaient été imaginées, et ce n'est que dans le treizième siècle de notre ère, après l'adjonction du zéro aux neuf

([1]) Par exemple dans *Grounde of Artes*, de R. Record, édition de 1610 Londres, pp. 225-262.

autres symboles, qu'on adopta en Europe une notation uniforme pour l'écriture des nombres.

En ce qui concerne maintenant le moyen d'écrire les nombres, nous pouvons dire d'une manière générale que, dans les temps anciens, un nombre (quand on le désignait par un signe et non par un mot) était représenté par le nombre équivalent de traits. Ainsi dans une inscription de Tralles en Carie datant de 398 avant Jésus-Christ, la phrase sept ans est écrite ainsi ἐτεως |||||||. Les traits peuvent avoir été de simples marques, ou bien ils représentaient peut-être originairement des doigts car dans les hiéroglyphes égyptiens les symboles des nombres 1, 2, 3 sont respectivement 1, 2, 3 doigts, et dans l'écriture hiératique la plus récente ces symboles se trouvent réduits à des lignes droites. On introduisit bientôt des signes additionnels pour 10 et 100 : et, dans les plus vieux écrits égyptiens et phéniciens existants le symbole de l'unité est reproduit autant de fois qu'il est nécessaire (jusqu'à 9), de même le symbole de 10 est répété autant de fois qu'il est utile (jusqu'à 9 fois), et ainsi de suite. On ne possède aucun spécimen d'une numération grecque de ce genre, mais tout nous porte à accepter le témoignage de Jamblique, qui nous fait connaître que ce fut là le premier moyen employé par les Grecs pour l'écriture des nombres.

Cette manière de représenter les nombres fut d'un usage constant pendant toute la période romaine et, dans un but d'abréviation, les Romains ou les Etrusques ajoutèrent des signes spéciaux pour 5, 50, .., etc. Les symboles usités par les Romains étaient généralement et tout simplement les lettres initiales des noms des nombres ; ainsi ils avaient C pour *centum* ou 100, M pour *mille* ou 1000. Le symbole V pour 5 semble avoir été à l'origine une main avec le pouce écarté. Les symboles L pour 50 et D pour 500 représentent, prétend-on, les moitiés supérieures de ceux employés dans les premiers temps pour C et M. Les formes soustractives, telles que IV pour IIII, ont probablement une origine plus moderne.

De même, dans l'Attique, cinq était représenté par Π la première lettre de πέντε ou quelquefois par Γ, dix par Δ la lettre initiale de δέκα, cent par H pour ἑκατόν ; mille par X pour χίλιοι ; tandis que 50 se présentait par Δ écrit à l'intérieur de Π, et ainsi de suite. Ces symboles attiques continuèrent à être employés pour les inscrip-

tions et dans les documents officiels jusqu'à une date très avancée.

Ce système, bien que primitif, se comprenait parfaitement, mais les Grecs, à une certaine époque du IIIe siècle avant Jésus-Christ, l'abandonnèrent pour un autre n'offrant aucun avantage spécial pour écrire un nombre donné et présentant l'inconvénient de rendre très difficiles toutes les opérations de l'arithmétique. Dans ce système qui porte le nom d'Alexandrin pour rappeler le lieu où il prit naissance, les nombres de 1 à 9 étaient représentés par les neuf premières lettres de l'alphabet; les dizaines de 10 à 90, par les neuf lettres suivantes; et les centaines de 100 à 900 par les neuf lettres à la suite.

L'application de ce système exigeait donc l'emploi de 27 lettres et comme l'alphabet grec n'en contenait que 24, on y introduisit à nouveau deux lettres (le digamma et le kappa) qui en avaient déjà fait partie mais dont l'usage s'était perdu, et on plaça à la fin un vingt-septième symbole emprunté à l'alphabet phénicien. Par conséquent les lettres de α à ι désignaient respectivement les nombres de 1 à 10; les huit lettres à la suite représentaient les multiples de 10, de 20 à 90; et les neuf dernières lettres s'employaient pour 100, 200, 300, ..., etc., jusqu'à 900. Les nombres intermédiaires, tels que 11, 12, étaient représentés comme les sommes de 10 et de 1, de 10 et de 2, c'est-à-dire par les symboles $\iota\alpha'$, $\iota\beta'$. On avait donc ainsi une notation permettant d'écrire tous les nombres jusqu'à 999, et, au moyen d'un système de suffixes et d'indices, elle avait été étendue de façon à donner tous les nombres jusqu'à 100 000 000.

Il n'est pas douteux que les résultats étaient obtenus tout d'abord avec l'aide d'un abaque ou de quelque méthode mécanique semblable, et que les signes n'étaient usités que pour conserver trace des résultats; l'idée d'opérer sur les symboles eux-mêmes est d'origine moins ancienne et les grecs ne s'assimilèrent jamais bien cette façon d'opérer. Le caractère stationnaire de l'arithmétique grecque est peut-être dû en partie à leur malencontreuse adoption du système alexandrin, qui ne leur permettait que l'emploi de l'abaque pour bien des applications pratiques; ils suppléaient à l'insuffisance de l'appareil par une table de multiplication qui s'apprenait par cœur. Les résultats de la multiplication et de la division des nombres autres que ceux donnés par la table auraient pu s'obtenir avec l'abaque, mais, en fait, ils étaient généralement déterminés par des

additions et des soustractions répétées. Ainsi, jusqu'en 944, un mathématicien qui avait besoin dans un de ses écrits de multiplier 400 par 5 employait l'addition pour obtenir le résultat. Le même auteur avait-il besoin de diviser 6 152 par 15, il essayait tous les multiples de 15 jusqu'à ce qu'il eut trouvé 6 000, ce qui lui donnait 400 avec 152 pour reste ; il essayait encore tous les multiples de 15 jusqu'à ce qu'il eut 150, il obtenait ainsi 10 avec 2 pour reste. La réponse était donc 400 plus 10, soit 410, avec le reste 2.

Cependant quelques mathématiciens, tels que Héron d'Alexandrie, Théon et Eutocius employaient, pour effectuer la multiplication et la division, une méthode qui peut être considérée comme identique, en substance, à celle en usage de nos jours.

Ainsi, pour multiplier 18 par 13, ils procédaient comme il suit :

$$\begin{aligned} \iota\gamma \times \iota\eta &= (\iota + \gamma)(\iota + \eta) \\ &= \iota(\iota + \eta) + \gamma(\iota + \eta) \\ &= \rho + \pi + \lambda + \varkappa\delta \\ &= \sigma\lambda\delta \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 13 \times 18 &= (10 + 3)(10 + 8) \\ &= 10(10 + 8) + 3(10 + 8) \\ &= 100 + 80 + 30 + 24 \\ &= 234 \end{aligned}$$

Nous pensons que la dernière opération, dans laquelle il s'agissait d'ajouter quatre nombres, s'effectuait avec l'abaque.

Mais ces hommes étaient exceptionnellement doués et nous devons nous rappeler que pour tous les besoins ordinaires, l'art du calcul consistait uniquement dans l'usage de l'abaque et de la table de multiplication, tandis que le mot arithmétique était réservé aux théories des rapports, des proportions et des nombres.

Tous les systèmes que nous venons d'exposer brièvement étaient plus ou moins grossiers et ils ont été remplacés chez les nations civilisées par le système des Arabes, qui comprend dix signes ou symboles, à savoir neuf pour les neuf premiers nombres et un pour le zéro. Dans ce système tout nombre entier est représenté par une suite de signes, chacun d'eux désignant le produit du nombre spécifié par ce signe par une puissance de 10, et le nombre étant égal à la somme de ces produits. Ainsi à l'aide de neuf symboles auxquels on attribue une valeur locale, c'est-à-dire dépendant de la position de chacun d'eux par rapport aux autres, et d'un dernier symbole pour zéro, on peut représenter un nombre quelconque dans le système de numération décimale. L'histoire des développements de l'arithmétique basée sur ce système de notation sera étudiée plus loin dans le chapitre XI.

SECONDE PÉRIODE

LES MATHÉMATIQUES AU MOYEN-AGE ET PENDANT LA RENAISSANCE

Cette période qui commence vers le sixième siècle peut être considérée comme prenant fin avec l'invention de la géométrie analytique et du calcul infinitésimal. Elle est essentiellement caractérisée par la création ou le développement de l'arithmétique moderne, de l'algèbre et de la trigonométrie.

Dans cette période nous considérons tout d'abord, dans le chapitre VIII, les premiers débuts de la science en Europe occidentale, et les mathématiques au moyen-âge. Dans le chapitre IX, nous nous occupons des spéculations mathématiques des Arabes et des Indiens et au chapitre X nous voyons leurs méthodes s'introduire en Europe. Dans le chapitre XI nous suivons les progrès successifs de l'Arithmétique jusqu'à l'année 1637. Ensuite, dans le chapitre XII, nous donnons l'histoire générale des mathématiques pendant la Renaissance, depuis l'invention de l'imprimerie jusqu'au commencement du XVIIe siècle, c'est-à-dire de 1450 à 1637, et nous sommes amenés à raconter les débuts de l'Arithmétique, de l'Algèbre et de la Trigonométrie traitées à la façon des modernes. Enfin, dans le chapitre XIII, nous signalons les progrès nouveaux de la mécanique et de la géométrie pure, qui caractérisent les dernières années de cette période, constituant ainsi un lien entre les Mathématiques de la Renaissance et celles des temps modernes.

CHAPITRE VIII

LA NAISSANCE DE L'ENSEIGNEMENT DANS L'EUROPE OCCIDENTALE (1)

L'ENSEIGNEMENT DANS LES VIe, VIIe ET VIIIe SIÈCLES

Les premiers siècles de cette seconde partie de notre histoire sont particulièrement dépourvus d'intérêt et, en réalité, il eût été étrange de voir les mathématiques cultivées par des hommes, qui vivaient dans un état de guerre perpétuel. Nous pouvons dire en un mot, que les seuls lieux d'études en Europe occidentale, depuis le VIe jusqu'au VIIIe siècle, furent les couvents des moines Bénédictins. On peut constater là quelques faibles tentatives d'études littéraires, mais l'instruction scientifique proprement dite était limitée à l'usage de l'abaque, à la tenue des comptes et à la connaissance de la règle permettant de déterminer la date de l'été. On ne doit pas en être surpris, car il n'y avait pas de raison pour que les moines, après avoir renoncé au monde, étudiassent autre chose que ce qui était indispensable aux besoins de l'Eglise et de leurs monastères. Les traditions de l'enseignement grec et d'Alexandrie disparurent graduellement.

On pouvait peut-être trouver, et encore avec beaucoup de peine, à Rome et dans quelques centres favorisés, des copies des œuvres des mathématiciens grecs, mais les étudiants manquaient ; ces ouvrages avaient peu de valeur et avec le temps ils devinrent très rares.

(1) Les mathématiques de cette période ont été étudiées, par CANTOR ; par S. GÜNTHER, *Geschichte des Mathematischen Unterrichtes im deutschen Mittelalter*. Berlin, 1887 ; et par H. WEISSENBORN, *Kenntniss der Mathematik des Mittelalters*. Berlin, 1888.

On peut citer trois auteurs du sixième siècle : *Boëce*, *Cassiodore* et *Isidore*, dont les écrits servent de lien entre les mathématiques des temps classiques et du moyen-âge. Leurs ouvrages ayant été suivis pendant six ou sept siècles, il est nécessaire d'en faire mention, mais il faut bien comprendre que c'est pour ce seul motif, car ils ne présentent aucune originalité. Nous ferons remarquer que ces auteurs étaient contemporains des dernières écoles d'Athènes et d'Alexandrie.

Boëce. — *Anicius Manlius Severinus Bœthius* ou *Boëce*, comme le nom est écrit quelquefois, né à Rome vers 475 et mort en 526, appartenait à une famille, qui depuis deux siècles était considérée comme une des plus illustres de cette Cité. On pensait autrefois qu'il avait été instruit à Athènes ; le fait est douteux. Dans tous les cas, il connaissait d'une façon remarquable la littérature et la science grecques.

Boëce, à ce qu'il paraît, désirait se consacrer aux études littéraires, mais reconnaissant « que le monde ne serait heureux que si tous les rois devenaient des philosophes ou tous les philosophes des rois », il céda à la pression qu'on exerçait sur lui et prit une part active à la politique. Il était renommé à cause de sa charité excessive et, ce qui était fort rare de son temps, à cause du soin qu'il prenait de s'assurer que les solliciteurs étaient réellement dignes d'intérêt. Elu consul jeune et à un âge anormal, il profita de sa situation pour réformer la frappe de la monnaie et pour rendre public l'usage des cadrans solaires, des horloges à eau, etc. Il atteignit l'apogée de sa prospérité en 522, lorsque ses deux fils furent nommés consuls. Son intégrité et ses tentatives pour protéger les habitants des campagnes contre les vols des fonctionnaires publics, lui attirèrent la haine du tribunal. Etant absent de Rome, il fut condamné à mort, arrêté à Ticinium et torturé dans le baptistère de l'église de cette ville. On lui enroula autour de la tête une corde, que l'on serra jusqu'à faire sortir les yeux de leurs orbites, et finalement on l'acheva à coups de masse, le 23 octobre 526. Tel est du moins le récit qui nous est parvenu. Plus tard ses mérites furent reconnus et on éleva en son honneur, aux frais de l'Etat, des monuments et des statues.

Boëce fut le dernier Romain de valeur qui étudia la langue et la

littérature de la Grèce, et ses œuvres répandirent sur l'Europe du moyen-âge quelques éclats de la vie intellectuelle du vieux monde.

Il occupe par suite une place importante dans l'histoire de la littérature, mais son importance provient uniquement de l'époque où il vivait. Lorsque les œuvres d'Aristote pénétrèrent en Europe au treizième siècle, sa renommée s'affaiblit et il est maintenant tombé dans une obscurité aussi profonde que sa réputation avait été grande à un certain moment. Il est mieux connu par ses *Consolatio*, qui ont été traduites en anglo-saxon par Alfred-le-Grand. Il nous suffit de constater, pour l'étude que nous poursuivons, que l'enseignement des mathématiques, dans les premiers temps du moyen-âge, était principalement basé sur sa géométrie et son arithmétique [1].

Sa *géométrie* consiste dans les énoncés seuls du premier livre d'Euclide et dans quelques propositions choisies des III[e] et IV[e] livres, mais avec de nombreuses applications numériques portant sur la détermination des aires, etc. Il a ajouté un appendice, avec preuves des trois premières propositions, pour montrer que l'on peut se fier aux énoncés. Son arithmétique est basée sur celle de Nicomaque.

Cassiodore. — Quelques années plus tard, un autre Romain, *Magnus Aurelius Cassiodore*, né vers 490 et mort en 566, publia deux ouvrages, *De Institutione Divinarum Litterarum* et *De Artibus ac Disciplinis*, dans lesquels il traitait non seulement le *trivium* préliminaire : grammaire, logique et rhétorique; mais aussi le *quadrivium* mathématique : arithmétique, géométrie, musique et astronomie. Pendant le moyen-âge, on les considérait comme des ouvrages modèles : le premier a été imprimé à Venise en 1729.

Isidore. — *Isidore*, évêque de Séville, né en 570 et mort en 636, est l'auteur d'un ouvrage encyclopédique en vingt volumes, intitulé *Origines*, et dont le troisième volume était consacré au *quadrivium*. Il a été publié à Leipzig en 1833.

[1] Ses ouvrages sur la *Géométrie* et l'*Arithmétique* ont été édités, par G. Friedlein. Leipzig, 1867.

LES ÉCOLES DES CATHÉDRALES ET DES COUVENTS [1]

Charlemagne, en créant son Empire dans la dernière moitié du huitième siècle s'était proposé de développer l'enseignement autant qu'il était en son pouvoir. Il commença par décréter la création d'écoles à côté de chaque cathédrale ou de chaque monastère de son royaume, mesure qui fut approuvée et matériellement facilitée par les papes. Il est intéressant pour nous de constater que cette décision fut prise à l'instigation et sous la direction de deux anglais, Alcuin et Clément, qui étaient attachés à la cour de Charlemagne.

Alcuin [2]. — Le plus remarquable des deux a été *Alcuin*, né en 735 dans le Yorkshire et mort à Tours en 804. Instruit à York sous l'archevêque Egbert « son maître bien aimé », il lui succéda comme directeur de l'Ecole. Nommé ensuite abbé de Canterbury, il fut envoyé par Offa à Rome, afin de solliciter le *Pallium* pour l'archevêque Eanbald. Dans son voyage de retour, il rencontra Charlemagne à Parme; l'Empereur le prit en amitié et finalement le décida à rester à la Cour impériale où il enseignait la rhétorique, la logique, les mathématiques et la théologie. Alcuin fut pendant plusieurs années l'un des amis les plus intimes et les plus influents de Charlemagne, qui l'employait constamment comme ambassadeur confidentiel : c'est ainsi qu'il passa les années 791 et 792 en Angleterre, où il réorganisa les études de sa vieille école de York. En 801, il sollicita la permission de se retirer de la Cour pour passer dans le repos les dernières années de sa vie. C'est avec difficulté qu'il obtint cette autorisation et il se retira à l'abbaye de St-Martin-de-Tours dont il avait eu la direction en 796. Il annexa à cet abbaye une école qui devint très célèbre et il y enseigna jusqu'à sa mort qui survint le 19 mai 804.

(1) Voir *The Schools of Charles the Great and the Restoration of Education in the Ninth Century*, par J. B. Mullinger. Londres, 1877.

(2) Voir la *Vie d'Alcuin*, par F. Lorentz. Halle, 1829, traduite par J. M. Slee. Londres, 1837; *Alcuin und sein Jahrhundert*, par C. Werner. Paderborn, 1876; et Cantor, vol. I, pp. 712-721.

Beaucoup des écrits existants d'Alcuin ont trait à la théologie et à l'histoire, mais ils comprennent aussi une collection de propositions arithmétiques arrangées pour l'instruction de la jeunesse. Ces propositions sont en grande partie des problèmes faciles, déterminés ou indéterminés, et nous présumons qu'ils ont été composés d'après des ouvrages qu'il a pu connaître pendant son séjour à Rome. Le suivant qui est un des plus difficiles, donnera une idée de l'ensemble : « Si l'on distribue 100 boisseaux de blé à 100 personnes, de manière que chaque homme en reçoive 3, chaque femme 2 et chaque enfant un demi, combien y a-t-il d'hommes, de femmes et d'enfants ? »

La solution générale est $(20 - 3n)$ hommes, $5n$ femmes et $(80 - 2n)$ enfants, n pouvant prendre une quelconque des valeurs 1, 2, 3, 4, 5, 6. Alcuin ne donne que la solution qui correspond à $n = 3$, c'est-à-dire que sa réponse est 11 hommes, 15 femmes et 74 enfants.

Cet ouvrage cependant était l'œuvre d'un homme d'un talent exceptionnel et nous serons probablement dans le vrai en disant que les mathématiques, alors enseignées dans les écoles, se réduisaient à la géométrie de Bœce, à l'emploi de l'abaque et de la table de multiplication, peut-être aussi à l'arithmétique de Boëce ; et que, sauf dans une de ces Ecoles ou encore dans les cloîtres des Bénédictins, il était à peu près impossible d'avoir le moyen de s'instruire davantage. Il va de soi que les ouvrages usités étaient de provenance romaine, car la Grande-Bretagne et toutes les provinces composant l'Empire de Charlemagne avaient autrefois fait partie de la moitié occidentale de l'Empire romain, et leurs habitants, pendant longtemps encore, regardèrent Rome comme le centre de la civilisation ; d'un autre côté, le haut clergé était en relations constantes avec cette ville qui était la capitale de la chrétienté.

Après la mort de Charlemagne plusieurs de ces Ecoles se bornèrent à enseigner le latin, la musique et la théologie, connaissances indispensables au haut clergé. Quant aux autres sciences et aux mathématiques, il n'en fut pour ainsi dire plus question ; cependant la permanence de ces écoles fut favorable aux maîtres, dont l'instruction où le zèle dépassait les étroites limites fixées par la tradition.

Quelques écoles, dont les maîtres étaient réputés, prirent de l'extension et eurent des cours organisés d'une façon permanente ; mais même dans ces centres, l'enseignement fut généralement limité au trivium et au quadrivium. Le trivium devait comprendre la grammaire, la logique et la rhétorique, pratiquement il se bornait à enseigner à lire et à écrire le latin. Le quadrivium devait comprendre l'arithmétique et la géométrie avec leur application à la musique et à l'arpentage. En fait, l'arithmétique était bornée à des notions permettant de tenir les livres, la musique se bornait aux notions utiles pour le service de l'église, la géométrie se réduisait à des notions d'arpentage, l'astronomie aux notions suffisantes pour fixer les fêtes et les jeûnes de l'église. Les sept arts libéraux sont énumérés dans cette phrase :

Lingua, tropus, ratio; numerus, tonus, angulus, astra.

Un étudiant qui allait au-delà du trivium était considéré comme un homme d'une grande érudition,

Qui tria, qui septem, qui totum scibile novit

suivant un vers du onzième siècle. Les questions qui, à cette époque et longtemps encore, occupèrent particulièrement les meilleurs penseurs roulaient sur la logique, sur la théologie transcendante et la philosophie.

Nous pouvons résumer cette partie de notre sujet en disant que, durant le neuvième et le dixième siècles, les mathématiques enseignées étaient limitées aux matières contenues dans les deux ouvrages de Boëce, avec la pratique de l'abaque et de la table de multiplication, mais que, durant la dernière partie de cette période, un plus vaste champ d'étude s'ouvrait à ceux qui désiraient s'instruire.

Gerbert (1). — Le dixième siècle vit paraître un homme qui aurait été remarquable à toutes les époques et qui donna une grande extension à l'enseignement. Ce fut *Gerbert*, Aquitain de naissance,

(1) Weissenborn, dans l'ouvrage déjà mentionné, expose très complètement la vie et les travaux de Gerbert ; voir aussi : *La Vie et les Œuvres de Gerbert*, par A. Olleris. Clermont, 1867 ; *Gerbert von Aurillac*, par K. Werner, seconde édition, Vienne, 1881 ; et *Gerberti. . Opera mathematica*, édité par N. Bubnov. Berlin, 1899.

[illegible] on cinquante ans. Sa vive intelli- [illegible] orsqu'il était encore enfant et on [illegible] illac en Espagne, où il reçut une [illegible] à Rome; là son talent musical et [illegible] attirèrent l'attention, mais ses [illegible] s deux sujets : il avait déjà appro- [illegible] m et du quadrivium, comme on [illegible] outefois de la logique. Pour com- [illegible], il se rendit à Reims, où l'arche- [illegible] e la plus réputée de l'Europe. Il [illegible] et sa renommée était si grande, [illegible] ducation de son fils Robert, qui [illegible]

[illegible] réputation, due particulièrement [illegible] e globes terrestres et célestes; [illegible] de ces derniers dans ses leçons. [illegible] admiration et il en profita pour [illegible] d'ouvrages classiques latins qui [illegible] ntretenait même dans ce but et [illegible] ncipales villes d'Europe. C'est à [illegible] nservation de plusieurs ouvrages [illegible] s sa bibliothèque les pères chré- [illegible] is en 982 à la tête de l'Abbaye [illegible] passa en intrigues politiques; il [illegible] 91, puis de Ravenne en 998, et [illegible] om de Sylvestre II. A la tête de [illegible] ous les pays du monde chrétien, [illegible] ndre les armes pour la défense de [illegible] ierre l'Ermite d'un siècle, mais il [illegible] voir eu le temps de mettre son [illegible] e est, pensons-nous, conservée au [illegible]

[illegible] nte devait laisser, cela va sans [illegible] sa génération et toutes sortes de [illegible] sur son compte. Il paraît certain [illegible] t conservée longtemps à Magde- [illegible] la vapeur, qui existait encore à [illegible] Toutes ces inventions ne firent

que confirmer ses contemporains dans cette idée qu'il s'était vendu au diable, et on peut trouver dans les pages de William de Malmesburg, d'Orderic Vitalis et de Platina, les récits de ses entrevues avec le prince des ténèbres, des détails sur le pouvoir dont il avait été investi et sur ses tentatives pour échapper, au moment de sa mort, aux conséquences de son marché. A ces anecdotes, le premier des auteurs sus-mentionnés ajoute l'histoire de la statue portant l'inscription « frappe ici », qui, après avoir amusé nos ancêtres dans le *Gesta Romanorum*, a été racontée de nouveau dans le *Earthly Paradise* (le Paradis terrestre).

Si grande que fût son influence, il ne faut pas croire que les écrits de Gerbert montrent beaucoup d'originalité. Ses œuvres mathématiques comprennent un traité sur l'abaque, *Regula de abaco computi*, un autre sur l'arithmétique intitulé : *De Numerorum Divisione*, et un sur la *Géométrie*.

Un perfectionnement de l'abaque, attribué par quelques écrivains à Boëce, mais qui est dû plus probablement à Gerbert, est l'introduction, dans chaque colonne, de boules portant des caractères différents appelés *apices*, pour chacun des nombres de un à neuf, à la place de neuf jetons ou boules exactement semblables. Ces apices étaient probablement d'origine indienne ou arabe et permettaient de représenter les nombres de la même manière qu'avec les chiffres de Gobar reproduits ci-après (1) ; il n'y avait cependant aucun symbole pour zéro. Le passage de cette représentation concrète des nombres sur un abaque, au moyen d'un système décimal, à l'écriture de ces mêmes nombres, en utilisant des symboles semblables, nous semble à nous d'une grande simplicité, mais ce dernier perfectionnement aurait échappé, paraîtrait-il, à Gerbert. Son ouvrage sur la géométrie est d'un mérite inégal ; il comprend quelques applications à l'arpentage et la détermination de la hauteur des objets inaccessibles, mais beaucoup dans ce traité semble avoir été emprunté à quelques manuels de l'école pythagoricienne.

On trouve cependant résolu dans cet ouvrage, un problème qui, pour l'époque, était d'une grande difficulté : Il s'agit de calculer les côtés d'un triangle rectangle dont on connaît l'hypoténuse et l'aire. En désignant par c et h^2 les données de la question, il trouve

(1) Voir plus loin.

les côtés par les formules

$$\frac{1}{2}\left\{\sqrt{c^2+4h^2}+\sqrt{c^2-4h^2}\right\} \text{ et } \frac{1}{2}\left\{\sqrt{c^2+4h^2}-\sqrt{c^2-4h^2}\right\}.$$

Bernelinus. — L'un des élèves de Gerbert, *Bernelinus*, publia un ouvrage sur l'abaque (¹) qui, à n'en pas douter, est une reproduction de l'enseignement de Gerbert. Il est intéressant parce qu'il nous montre que les caractères arabes pour l'écriture des nombres n'étaient pas encore connus en Europe.

CRÉATION DES PREMIÈRES UNIVERSITÉS AU MOYEN-AGE (²)

A la fin du onzième siècle ou au commencement du douzième, un retour vers l'enseignement se fit sentir dans plusieurs des Ecoles annexées aux cathédrales ou aux monastères ; dans plusieurs endroits, des maîtres étrangers à ces Ecoles, s'établirent dans leur voisinage et, avec l'assentiment des autorités ecclésiastiques firent des cours qui portaient toujours, en fait, sur la théologie, la logique ou les lois civiles. Le nombre des étudiants dans ces centres augmentant, il leur parut possible et désirable de s'entendre chaque fois que leurs intérêts communs étaient en jeu. L'association ainsi formée était une sorte de corporation ou d'union d'intérêts, ou, pour employer le langage du temps une *universitas magistrorum et scholarium*. Ce fut la première étape vers le développement des plus anciennes universités du moyen-âge. Dans certains cas, comme à Paris, la direction des affaires de l'Université appartenait aux seuls maîtres ; dans d'autres cas, comme à Bologne, le corps dirigeant était constitué par les maîtres et les élèves ; mais dans tous les cas, des règles précises pour la conduite des affaires et la réglementation intérieure de la corporation furent formulées

(¹) Il est reproduit dans l'édition d'Olleris des *Œuvres de Gerbert*, pp. 311 à 326.

(²) Voir les *Universities of Europe in the Middle Ages*, par H. Rashdall. Oxford, 1895 ; *Die Universitäten des Mittelalters bis 1400*, Par P. H. Denifle, 1885 et le vol. I de *University of Cambridge*, par J. B. Mullinger. Cambridge, 1873.

dès les premiers temps de sa création. Les municipalités et les nombreuses sociétés qui existaient en Italie fournirent de nombreux modèles pour l'établissement de ces règlements, mais il est probable que quelques uns d'entre eux dérivèrent de ceux qui étaient en vigueur dans les écoles mahométanes de Cordoue.

Il est évident que nous sommes à peu près dans l'impossibilité de fixer la date exacte de l'origine de ces associations volontaires, mais elles existaient à Paris, Bologne, Salerne, Oxford et Cambridge avant la fin du douzième siècle : ce sont là les universités qui peuvent être considérées comme les plus anciennes en Europe. L'enseignement donné à Salerne et Bologne était principalement technique — pour la médecine à Salerne, pour le droit à Bologne — et on a contesté à ces deux centres d'instruction la prétention d'être des universités, aussi longtemps qu'ils ne furent que de simples écoles techniques ; le titre d'université était généralement attribué à tout corps enseignant aussitôt qu'il était reconnu comme un *studium generale*.

Bien que par leur organisation ces premières universités fussent indépendantes des écoles paroissiales ou monastiques voisines, elles paraissent leur avoir été unies en général, tout au moins à l'origine, et elles leur empruntèrent peut-être leurs salles de réunion, etc. Les universités ou corporations (se gouvernant elles-mêmes et formées par les maîtres et les étudiants) et les Ecoles voisines (sous le contrôle direct de l'Eglise ou du Monastère) continuèrent à vivre côte à côte, mais avec le temps les dernières diminuèrent d'importance, et finirent souvent par être soumises aux règlements des Universités. Presque toutes les Universités du moyen-âge prospérèrent sous la protection d'un évêque (ou d'un abbé) et furent, dans un certain domaine, placées sous son autorité ou sous celle de son chancelier ; c'est d'ailleurs de ce dernier que le chef de l'Université prit par la suite son titre. Cependant les Universités ne constituaient pas une corporation ecclésiastique et bien que la masse de leurs membres fut dans les ordres, leur liaison avec l'église provenait principalement de ce fait, que les clercs formaient alors la seule classe de la communauté ayant la faculté de continuer des études intellectuelles.

Quand une *universitas magistrorum et scholarium* était parvenue à grouper un certain nombre d'étudiants, elle réclamait toujours

après un certain temps d'existence, des privilèges légaux, tels que le droit de fixer le prix de ses cours et celui d'exercer toutes actions légales intéressant ses membres.

Ces privilèges lui faisaient généralement reconnaître le pouvoir d'accorder des grades qui conféraient à leurs détenteurs le droit d'enseigner dans tout le royaume et fréquemment l'Université était créée à ce moment là.

Paris reçut ses chartes en 1200 et fut probablement la plus ancienne université de l'Europe ainsi reconnue d'une façon officielle.

Des privilèges légaux furent accordés à Oxford en 1214 et à Cambridge en 1231 ; le développement de ces deux centres d'instruction suivit de près celui de Paris, qu'ils avaient pris comme modèle lors de leur organisation. Dans le cours du treizième siècle des universités furent créées à Naples, Orléans, Padoue et Prague (entre autres villes à citer) ; et dans le cours du quatorzième siècle, à Pavie et à Vienne.

Les plus fameuses universités du moyen-âge aspirèrent à un pouvoir encore plus grand, et le dernier degré dans leur évolution ascendante fut la reconnaissance par le pape ou l'empereur du droit attaché aux grades qu'elles conféraient autorisant les titulaires à enseigner dans toute l'étendue du monde chrétien — de telles universités étaient en relations étroites les unes avec les autres. Celle de Paris fut ainsi constituée en 1283, celle d'Oxford en 1296 et celle de Cambridge en 1318.

Le programme de l'enseignement des mathématiques fut complètement fixé par les Universités, et la plupart des mathématiciens qui se firent ultérieurement connaître eurent des attaches étroites avec une ou plusieurs d'entre elles ; on nous permettra par conséquent d'ajouter quelques mots sur la marche générale des études [1] dans une université du moyen-âge.

Les élèves étaient admis encore jeunes, quelquefois à onze ou douze ans. Ce serait une erreur de les présenter comme étudiants, car leur âge, leurs études, la discipline à laquelle ils étaient soumis, et leur situation dans l'université montrent qu'ils étaient de simples écoliers. On peut admettre que leurs quatre premières années

[1] Pour de plus amples détails sur l'organisation des études, le mode d'instruction, et leur constitution, voir notre *History of the Study of Mathematics at Cambridge*. Cambridge, 1889.

d'études étaient consacrées au trivium, c'est-à-dire à la grammaire latine, à la logique et à la rhétorique. Tout à fait dans les premiers temps, un nombre considérable d'élèves n'allaient pas au-delà de l'étude de la grammaire latine — ils formaient une faculté d'un rang inférieur et ne pouvaient prétendre qu'au grade de maître de grammaire ou maître de rhétorique — mais les étudiants les plus avancés (et dans les derniers temps tous les étudiants) passaient effectivement ces années à étudier le trivium d'une façon complète.

Le titre de bachelier ès-arts était conféré à la fin de cette période et signifiait que l'étudiant n'était plus un écolier et, par suite, ne devait plus être traité comme un élève. On peut estimer que l'âge moyen d'un bachelier était entre dix-sept et dix-huit ans. Ainsi à Cambridge quand un jeune homme se présente pour l'obtention d'un grade, le terme technique encore employé de nos jours est *juvenis* pour un écolier, tandis que le bachelier est qualifié *vir*. Le bachelier ne pouvait pas prendre d'élèves et n'était autorisé à enseigner que sous certaines réserves, il occupait probablement une position présentant beaucoup d'analogie avec celle des étudiants de nos jours. Quelques bacheliers poursuivaient leurs études par le droit civil ou le droit canon, mais on supposait théoriquement qu'ils étudiaient ensuite le quadrivium dont l'enseignement demandait trois ans et qui comprenait à peu près autant de sciences que nous en trouvons dans les écrits de Boëce et d'Isidore.

Le titre de maître ès-arts était accordé à la fin de cette nouvelle période. Dans le douzième et treizième siècles ce titre était tout simplement une permission d'enseigner ; il n'était recherché que par ceux qui avaient l'intention de rester dans l'Université ; et vraisemblablement seuls, ceux particulièrement doués pour l'enseignement songeaient à embrasser une profession aussi mal rétribuée que celle de professeur. Le titre était conféré à tout étudiant ayant régulièrement suivi le cours de ses études et dont la moralité était irréprochable. Les étrangers étaient également admis mais ce n'était pas régulier. Nous pouvons ajouter ici qu'à la fin du quatorzième siècle les étudiants commencèrent à comprendre qu'un grade représentait une certaine valeur pécuniaire et, par la suite, plusieurs universités ne les accordèrent

[illegible] maître résiderait dans l'Univer-
[illegible] moins une année. Un peu plus
[illegible] loin et refusèrent le titre à ceux
[illegible]nces suffisantes. Ce nouveau pri-
[illegible] d'un incident qui se produisit en
[illegible]a de conférer un titre à un étu-
[illegible] Nicholas — qui n'avait pas subi
[illegible]ves auxquelles il avait été soumis.
[illegible]er l'Université à lui conférer le
[illegible] raison à cette dernière. Nicholas
[illegible]ier étudiant « blackboulé ».
[illegible]athématiques fissent partie inté-
[illegible] bacheliers, il est probable que
[illegible]t des étudiants consacrèrent sur-
[illegible] philosophie et à la théologie. Les
[illegible]cholastique formaient un champ
[illegible]est juste de constater que c'étaient
[illegible]s.

[illegible] une époque où les résultats de
[illegible]mencent à être connus en Europe.
[illegible]ecques a déjà été présentée ; nous
[illegible]ment celle des mathématiques au
[illegible]loppement des écoles arabes jus-
[illegible]ensuite comment les savants eurent
[illegible]s arabes et grecs et quelle en fut
[illegible] des mathématiques en Europe.

CHAPITRE IX

LES MATHÉMATIQUES CHEZ LES ARABES (1)

L'histoire des mathématiques chez les Arabes nous est connue dans ses grandes lignes et cependant beaucoup de points particuliers auraient besoin d'être précisés. Il est toutefois hors de doute que c'est chez les Grecs et les Indiens qu'ils ont puisé leurs connaissances premières et on peut dire que la science arabe s'est élevée sur ces fondements. Nous examinerons tout d'abord et à tour de rôle ce qu'ils ont tiré de ces sources.

CONNAISSANCES MATHÉMATIQUES DE SOURCES GRECQUES

Suivant leurs propres traditions, par elles-mêmes très vraisemblables, les Arabes ont puisé leurs premières connaissances scientifiques chez les médecins grecs qui soignèrent les Califes à Bagdad. On raconte que lorsque les conquérants Arabes établirent leurs résidences dans les villes ils éprouvèrent des maladies qui leur avaient été complètement inconnues quand ils habitaient le

(1) Le sujet est longuement traité par Cantor, chap. xxxi–xxxv; par Hankel, pp. 172–293, et par A. von Kremer dans *Kulturgeschichte des Orientes unter den Chalifen.* Vienne, 1877 et par H. Suter, *Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke, Zeitschrift für Mathematik und Physik, Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik.* Leipzig, vol. XLV, 1900. Voir aussi *Matériaux pour servir à l'histoire comparée des Sciences mathématiques chez les Grecs et les Orientaux*, par L. A Sédillot. Paris, 1845-49; et les articles suivants de Fr. Woepcke, *Sur l'introduction de l'arithmétique Indienne en Occident.* Rome, 1859; *Sur l'histoire des Sciences mathématiques chez les Orientaux.* Paris, 1860; et *Mémoires sur la propagation des chiffres Indiens.* Paris, 1863.

désert. L'étude de la médecine était à cette époque entre les mains des Grecs et des Juifs, et plusieurs d'entre eux, encouragés par les Califes, s'établirent à Bagdad, à Damas et dans d'autres villes ; leurs connaissances scientifiques étaient bien plus étendues et plus exactes que celles des Arabes, et l'instruction de la jeunesse, comme il arrive souvent en pareil cas, ne tarda pas à leur être confiée.

L'introduction de la science européenne était rendue d'autant plus facile que plusieurs petites écoles grecques existaient dans les contrées soumises aux Arabes : il y en avait une depuis plusieurs années à Edesse, au milieu des chrétiens Nestoriens et d'autres encore à Antioche, Emesse et même à Damas, qui avaient conservé les traditions et quelques uns des résultats de l'enseignement grec.

Les Arabes remarquèrent bientôt que les Grecs tiraient leurs connaissances médicales des ouvrages d'Hippocrate, d'Aristote et de Galien, et ces livres furent traduits en arabe, vers l'année 800, sur l'ordre du Calife Haroun al Raschid. Cette traduction excita tellement l'intérêt que son successeur Al-Mamoun (813-833) envoya à Constantinople et dans l'Inde, des commissions chargées de prendre des copies du plus grand nombre possible d'ouvrages scientifiques.

Il engagea en même temps un nombreux personnel de clercs syriens pour traduire ces livres en Arabe et en Syriaque. Afin de désarmer le fanatisme, ces clercs furent d'abord appelés les docteurs du Calife, mais en 851 ils formèrent une académie et le Calife Mutawakkil (847-861) en donna la direction au plus célèbre d'entre eux, Honein ibn Ishak.

Ce dernier et son fils Ishak ibn Honein revisèrent les traductions avant de les livrer à la publicité. Ils ne connaissaient ni l'un ni l'autre, les mathématiques, et de ce fait plusieurs erreurs se glissèrent dans leurs écrits, mais un autre membre de l'académie, Tabit Ibn Korra fit paraître peu, après, de nouvelles éditions qui devinrent par la suite les textes officiels.

Les Arabes possédèrent ainsi, avant la fin du neuvième siècle, des traductions des œuvres d'Euclide, d'Archimède, d'Appollonius, de Ptolémée et de plusieurs autres : quelques uns de ces ouvrages ne nous sont parvenus que par leurs traductions arabes.

Un fait curieux et qui montre dans quel oubli était tombé

Diophante, c'est que autant que nous pouvons le savoir, les Arabes n'eurent connaissance de son grand ouvrage que 150 ans plus tard, alors qu'ils s'étaient déjà familiarisés avec la notation et les procédés de l'algèbre.

CONNAISSANCES MATHÉMATIQUES TIRÉES DES SOURCES INDIENNES

Les Arabes faisaient un commerce considérable avec les Indes, et sous le califat de Al Mansur (754–775) ils avaient eu connaissance de l'un ou des deux grands ouvrages originaux des Hindous sur l'Algèbre, mais ils n'y prêtèrent une sérieuse attention que 50 ou 60 ans plus tard. L'algèbre et l'arithmétique des Arabes furent en grande partie basées sur ces Traités, aussi allons-nous entrer dans quelques détails au sujet des mathématiques des Indiens.

De même que les Chinois, les Hindous ont prétendu qu'ils étaient le peuple le plus ancien de la terre, et que c'est à eux que l'on doit l'origine de toutes les sciences.

Mais il résulterait de recherches récentes que ces prétentions n'ont aucun fondement sérieux, et en fait aucune science ou aucun art utile (à l'exception cependant d'une architecture et d'une sculpture quelque peu fantaisiste) ne peut être attribué aux habitants de la péninsule indienne antérieurement à l'invasion des Aryens. Cette invasion semble avoir eu lieu pendant la seconde moitié du cinquième ou dans le sixième siècle, époque où une tribu d'Aryens pénétrant dans les Indes par le N.-O., soumit une grande partie du pays et s'y établit. Partout où il n'y a pas eu fusion des races, les descendants de cette tribu se reconnaissent encore à leur supériorité sur les peuples primitivement conquis; mais comme c'est encore le cas de nos jours pour les Européens, le climat les épuisa et ils dégénérèrent peu à peu. Cependant pendant les deux ou trois premiers siècles, ils conservèrent leur vigueur intellectuelle, et produisirent un ou deux écrivains de grand talent.

Arya-Bhata. — Le premier est *Arya-Batha*, qui naquit à

Patna en l'an 476. Il est fréquemment cité par Brahmagupta et suivant l'opinion de bien des commentateurs il créa l'analyse algébrique bien qu'on ait suggéré qu'il ait pu avoir connaissance de l'arithmétique de Diophante. Le principal ouvrage d'Arya-Bhata parvenu jusqu'à nous est son *Aryabhathiya* qui consiste en un recueil de vers mnémoniques renfermant l'énoncé de règles et de propositions diverses. Il n'y a pas de démonstrations et le langage présente une telle obscurité et une telle concision qu'on est resté fort longtemps avant de pouvoir le traduire ([1]).

L'ouvrage est divisé en quatre parties dont trois sont consacrées à l'astronomie et aux éléments de la trigonométrie sphérique ; la partie restante contient les énoncés de trente-trois règles d'arithmétique, d'algèbre et de trigonométrie plane. Il est probable qu'Arya-Bhata, de même que Brahmagupta et Bhaskara dont nous parlons ci-après, s'occupait surtout d'astronomie, et qu'il n'étudia les mathématiques qu'autant qu'elles pouvaient lui servir dans ses recherches.

En algèbre Arya-Bhata donne les formules de la somme des premiers nombres, de leurs carrés et de leurs cubes ; la solution générale d'une équation du second degré ; et la solution en nombres entiers de certaines équations indéterminées du premier degré. D'après ses solutions des équations numériques on a supposé qu'il connaissait le système de numération décimale.

En trigonométrie il donne une table des sinus naturels des angles de $3^\circ \frac{3}{4}$ en $3^\circ \frac{3}{4}$ compris dans le premier quadrant, le sinus étant défini comme la moitié de la corde de l'arc double. En supposant que pour l'angle de $3^\circ \frac{3}{4}$ le sinus est égal à la mesure de l'angle, il prend pour sa valeur 225, c'est-à-dire le nombre de minutes compris dans l'angle. Il énonce ensuite une règle qui est presque incompréhensible mais qui revient probablement à la formule

$$\sin(n+1)a - \sin na = \sin na - \sin(n-1)a - \sin na \operatorname{cosec} a,$$

([1]) Un texte sanscrit de l'*Aryabhathiya* a été publié à Leyde, en 1874, par M. Kern; qui a fait paraître un article sur cet ouvrage dans le *Journal of the Asiatic Society*. Londres, 1863, vol. XX. pp. 371-387.

Une traduction française de la partie ayant trait à l'algèbre et à la trigono-

dans laquelle a serait égal à $3° \frac{3}{4}$; en partant de cette formule, il construit une table de sinus et trouve finalement 3 438 pour la valeur du sinus de 90°. Ce résultat est exact si l'on suppose $\pi = 3,1416$ et il est intéressant de constater que c'est là la valeur qu'il assigne à π dans une autre partie de l'ouvrage. La formule trigonométrique exacte est

$$\sin(n+1)a - \sin na = \sin na - \sin(n-1)a - 4 \sin na \sin^2 \frac{1}{2} a$$

par conséquent Arya-Bhata faisait $4 \sin^2 \frac{1}{2} a$ égal à cosec a, c'est-à-dire qu'il supposait $2 \sin a = 1 + \sin 2a$; en employant les valeurs approchées de sin $2a$ données dans sa table, cette égalité revient à $2(225) = 1 + 449$.

Sa formule est donc exacte avec l'approximation résultant de l'hypothèse d'où il est parti. Un grand nombre des propositions géométriques qu'il énonce sont fausses.

Brahmagupta. — Le second écrivain Hindou ayant quelque valeur est *Brahmagupta* né, dit-on, en 598 et qui vivait encore probablement vers 660. Il écrivit un ouvrage en vers intitulé *Brahma-Sphuta-Siddhanta*, c'est-à-dire, le *Siddhanta* ou le système de Brahma en astronomie. Dans ce livre, deux chapitres sont consacrés à l'arithmétique, l'algèbre et la géométrie (1).

L'arithmétique est sans aucun symbolisme. La plupart des problèmes sont traités par la règle de trois et un grand nombre roulent sur des questions d'intérêt.

Dans son algèbre, qui est également sans symbolisme, il étudie les propositions fondamentales des progressions arithmétiques et résout une équation du second degré (mais il ne donne que la valeur positive du radical). Comme exemple des problèmes qu'il traite, nous pouvons citer le suivant qui a été reproduit sous des formes légèrement différentes par divers auteurs, mais nous remplaçons les nombres par des lettres.

métrie a été donnée, par L. Rodet, dans le *Journal Asiatique* 1879. Paris, série 7, vol. XIII, pp. 393-434.

(1) Ces deux chapitres (chap. XII et XVIII) ont été traduits par H. T. Colebrooke et publiés à Londres, en 1817.

« Deux ascètes vivent au sommet d'un rocher de hauteur h dont la base est à une distance mh du village le plus voisin. L'un se rend au village en descendant la montagne, l'autre monte jusqu'à une hauteur x, puis se dirige directement sur le village. Trouver x sachant que tous les deux ont parcouru la même distance ».

Brahmagupta donne la réponse correcte $x = \frac{mh}{m+2}$. Dans la question telle qu'il l'énonçait $h = 100$ et $m = 2$. Brahmagupta trouva les solutions en nombres entiers de plusieurs équations indéterminées du premier degré par une méthode semblable à celle qui est encore en usage aujourd'hui. Il a fait connaître une équation indéterminée du second degré $nx^2 + 1 = y^2$ et donné comme solutions $x = \frac{2t}{t^2 - n}$ et $y = \frac{t^2 + n}{t^2 - n}$. Il a prouvé que cette solution générale se déduit d'une solution particulière de l'équation donnée ou d'une autre qui en dépend, mais il n'a pas dit comment il obtenait une solution particulière.

Ce qui est assez curieux c'est que cette équation fut proposée en défi, dans le dix-septième siècle par Fermat à Wallis et à lord Brouncker ; ce dernier trouva les mêmes solutions que Brahmagupta. Brahmagupta a encore démontré que l'équation $y^2 = nx^2 - 1$ ne peut être satisfaite par des valeurs entières de x et de y que si n est exprimable par la somme des carrés de deux entiers. Il est peut être bon d'observer que les premiers algébristes Grecs, Hindous, Arabes ou Italiens ne faisaient aucune distinction entre les problèmes qui conduisaient à des équations déterminées et ceux qui conduisaient à des équations indéterminées. Ce n'est qu'après l'introduction de l'algèbre syncopée que des tentatives ont été faites pour donner les solutions générales des équations et la difficulté de les obtenir pour les équations indéterminées autres que celles du premier degré avait conduit à les exclure en pratique de l'algèbre élémentaire.

En, géométrie Brahmagupta démontra le théorème de Pythagore concernant le triangle rectangle (Euc. I. 47). Il donna des expressions pour calculer les aires d'un triangle et d'un quadrilatère inscriptible en fonction de leurs côtés, et montra que la surface du cercle est égale à celle d'un rectangle ayant pour côtés le rayon et le demi-périmètre. Il fut moins heureux dans ses essais de rec-

tification du cercle, et le résultat qu'il donne revient à prendre $\sqrt{10}$ pour la valeur de π. Il détermina également la surface et le volume de la pyramide et du cône, questions traitées d'une façon incorrecte par Arya-Bhata. Le reste de sa géométrie est presque inintelligible ; mais il semble que l'on se trouve en présence d'essais faits pour trouver les expressions de plusieurs éléments d'un quadrilatère inscrit en fonction des côtés ; la plupart des résultats énoncés sont faux.

Il ne faudrait pas croire que dans l'ouvrage original toutes les propositions se rapportant à un même sujet soient réunies pour former un ensemble, et ce n'est que pour la commodité de notre exposition que nous avons essayé de les disposer ainsi. Il est impossible de dire si tous les résultats de Brahmagupta, que nous venons de résumer, lui sont bien dûs, Il avait connaissance de l'ouvrage d'Arya-Bhata, car il reproduit la table des sinus que l'on y trouve ; il est également vraisemblable que les successeurs immédiats d'Arya-Bhata avaient fait quelques progrès en mathématiques et que leurs travaux n'étaient pas inconnus à Brahmagupta ; mais nous n'avons aucune raison de douter que l'ensemble de son arithmétique et de son algèbre ne lui appartienne en propre, bien qu'il ait peut-être subi l'influence des écrits de Diophante. La contribution qu'il a apportée à la géométrie est plus douteuse, quelques parties ont été probablement empruntées aux ouvrages de Héron.

Bhaskara. — Pour compléter cette histoire des mathématiques chez les Indiens, nous négligerons l'ordre chronologique pour parler de Bhaskara, né en 1114, et seul mathématicien Hindou d'une valeur exceptionnelle dont les travaux nous sont connus. Il fut, dit-on, le successeur immédiat de Brahmagupta à la tête d'un observatoire astronomique à Ujein. Il composa une astronomie dont quatre chapitres ont été traduits. L'un, intitulé *Lilavati* est relatif à l'arithmétique, un second avec le titre de *Bija-Ganita* traite de l'algèbre ; le troisième et le quatrième sont consacrés à l'astronomie et à la sphère [1] ; quelques-uns des autres chapitres

[1] Voir l'article *Viga Ganita*, dans le *Penny Cyclopædia*. Londres, 1843 ; et les traductions du *Lilavati* et du *Bija Ganita* publiées par H. T. Colebrooke.

concernent également les mathématiques. Nous pensons que les Arabes eurent connaissance de cet ouvrage presque aussitôt qu'il fut composé et son influence se fit sentir sur leurs écrits ultérieurs bien qu'ils n'aient su ni utiliser, ni développer beaucoup de vues nouvelles qui s'y trouvaient. Cet ouvrage fut connu d'une façon indirecte, en Occident, avant la fin du douzième siècle, mais le texte lui-même ne pénétra en Europe qu'à une époque plus récente.

Le traité est en vers, mais contient des notes explicatives en prose. On ne peut dire si l'ouvrage est vraiment original, ou s'il n'est qu'une simple exposition de ce qu'on connaissait alors dans l'Inde ; mais, dans tous les cas, il est plus que probable que Bhaskara avait lu les ouvrages arabes écrits dans les dixième et onzième siècles et qn'il n'ignorait pas les résultats des travaux des mathématiciens grecs, tels qu'ils avaient été transmis par les sources arabes. L'algèbre est syncopée et presque symbolique ce qui marque un grand progrès sur celles de Brahmagupta et des Arabes. La géométrie est également supérieure à celle de Brahmagupta, mais cela provient peut être, de ce que, grâce aux Arabes, il pouvait connaître les divers ouvrages grecs.

Le premier livre ou *Lilavati* débute par une invocation au Dieu de la Sagesse. La disposition générale de l'ouvrage se comprendra par la table suivante des matières :

Système des poids et mesures ; — ensuite numération décimale brièvement exposée ; — viennent après les huit opérations de l'arithmétique à savoir : addition, soustraction, multiplication, division, élévation au carré, au cube, extraction de la racine carrée, de la racine cubique. — Réduction des fractions au même dénominateur ; fractions de fractions, nombres fractionnaires et les huit règles appliquées aux fractions. Les « règles du zéro », c'est-à-dire $a \pm 0 = a$, $0^2 = 0$, $\sqrt{0} = 0$, $\frac{a}{0} = \infty$; — la solution de quelques équations simples données comme questions d'arithmétique ; — la règle de fausse supposition ; les équations simultanées du premier degré avec applications ; la solution de quelques équations du second degré ; la règle de trois et la règle de trois com-

Londres, 1817. Les chapitres sur l'*Astronomie* et la *Sphère* ont été publiés par L. Wilkinson. Calcutta, 1842.

posée avec des cas divers. Intérêts, escompte et partages. Le temps nécessaire à plusieurs fontaines pour remplir une citerne. Echanges, progressions arithmétiques et sommation des carrés et des cubes. Progressions géométriques. Problèmes sur les triangles et les quadrilatères. Valeur approchée de π. Quelques formules trigonométriques. Volume des solides. Equations indéterminées du premier degré. Enfin le livre se termine par quelques questions sur les combinaisons.

C'est le plus ancien ouvrage connu présentant une exposition méthodique du système de numération décimale. Il est possible que ce système fût familier à Arhya-Bhata et très vraisemblable que Brahmagupta l'ait connu, mais nous trouvons dans l'arithmétique de Bhaskara des symboles numériques dûs aux Arabes ou aux Indiens et un signe pour le zéro, formant ensemble une notation bien définie. Il est actuellement impossible de trouver des traces de l'emploi de ces symboles antérieurement au huitième siècle, mais il n'y a aucune raison de douter de l'assertion, qui a été émise, que leur usage remonte au commencement du septième siècle. Leur origine est une question difficile et controversée. Nous mentionnons plus loin (1) les opinions qui nous paraissent, en définitive, les plus probables et qui sont généralement admises, et nous reproduisons quelques-unes des formes qui furent primitivement employées.

Pour nous résumer, nous pouvons dire que le *Lilavati* donne les règles actuellement en usage pour l'addition, la soustraction, la multiplication et la division aussi bien que les traités d'arithmétique les plus communs ; et que la plus grande partie de l'ouvrage est consacrée à la discussion de la règle de trois, divisée en directe et inverse, en simple et composée, et employée à la résolution de nombreuses questions, principalement d'intérêt et d'échange. Le système de numération décimale que nous connaissons est utilisé dans les applications numériques.

Bhaskara était aussi célèbre comme astrologue que comme mathématicien. Il apprit par cette science que le mariage de sa fille Lilavati serait pour lui un évènement fatal. C'est pourquoi il ne voulut jamais lui permettre de le quitter, et comme une sorte de

(1) Voir plus loin, p. 190

consolation, non seulement il donna son nom au premier livre de son ouvrage, mais encore il rédigea plusieurs de ses problèmes sous forme de questions qu'il était censé lui adresser.

En voici un exemple : « Aimable et chère Lilavati dont les yeux ont la douceur de ceux du faon, dis-moi quels sont les nombres qui résultent de la multiplication de 135 par 12. Si tu es experte en multiplication, soit par totalité ou par parties, soit par division ou par séparation des chiffres, dis-moi, heureuse demoiselle, quel est le quotient du produit par le même multiplicateur ».

Ajoutons ici que dans les ouvrages indiens, les problèmes fournissent beaucoup d'informations intéressantes sur les conditions sociale et économique du pays. Ainsi Bhaskara traite quelques questions relatives au prix des esclaves et incidemment il fait remarquer qu'une femme esclave était généralement considérée comme ayant sa plus grande valeur lorsqu'elle avait 16 ans et que cette valeur décroissait ensuite en raison inverse de l'âge ; par exemple si cette esclave valait à l'âge de 16 ans, 32 nishkas, à 20 ans, sa valeur n'était plus que de $\frac{16 \times 32}{20} = 25,6$ nishkas. Il paraîtrait, suivant une évaluation moyenne grossière, qu'une esclave de 16 ans, représentait la valeur de 8 bœufs ayant travaillé pendant 2 ans. L'intérêt de l'argent dans les Indes variait de $3 \frac{1}{2}$ à 5 °/₀ par mois. Entre autres renseignements ainsi fournis on trouve le prix des denrées et du travail.

Le chapitre intitulé *Bija Ganita* débute par une sentence si ingénieusement présentée qu'on peut la lire comme l'énonciation d'une vérité religieuse, philosophique ou mathématique. Bhaskara après avoir fait allusion à son arithmétique ou *Lilavati*, annonce qu'il se propose dans ce livre d'étudier les opérations générales de l'analyse. Il emploie une notation dont voici le principe. Des abréviations et des initiales sont utilisées comme symbole ; la soustraction est indiquée par un point placé au-dessus du coefficient de la quantité à soustraire, l'addition par la simple juxtaposition ; mais il n'a aucun symbole pour la multiplication, l'égalité ou l'inégalité qui sont écrites en entier. Le produit est indiqué par la première syllabe du mot jointe aux facteurs entre lesquels se trouve quelquefois placé un point. Dans un quotient ou une fraction le diviseur est écrit sous le dividende, mais sans trait séparatif. Les

deux membres d'une équation sont écrits l'un sous l'autre et l'exposition écrite de tous les développements qui accompagnent l'opération préserve de toute confusion.

Il emploie pour les quantités inconnues des symboles variés, mais beaucoup d'entre eux sont les lettres initiales des noms des couleurs, et le mot couleur est souvent usité comme synonyme de quantité inconnue ; son équivalent en sanscrit signifie également une lettre, et les lettres sont quelquefois employées, soit qu'elles proviennent de l'alphabet ou des syllabes initiales des sujets sur lesquels roule le problème. Dans un ou deux cas des symboles sont employés aussi bien pour les quantités connues que pour les quantités inconnues. Les initiales des mots carré et solide, indiquent la seconde et la troisième puissances, et la première syllabe du mot qui désigne la racine carrée représente une quantité irrationnelle. Les polynomes sont ordonnés par rapport aux puissances, le terme indépendant étant toujours placé à la fin et distingué par la syllabe initiale dénotant une quantité connue. Beaucoup de ces équations renferment des coefficients, et le coefficient s'écrit toujours après la quantité inconnue. Les termes positifs ou négatifs sont indistinctement placés au premier rang, et chaque puissance figure dans les deux termes d'une équation avec zéro pour coefficient quand l'une d'elles fait défaut. Après l'explication de la notation, Bhaskara continue en donnant les règles pour l'addition, la soustraction, la multiplication, la division, l'élévation au carré et l'extraction de la racine carrée des expressions algébriques. Il expose ensuite les règles du zéro comme dans le *Lilavati* ; il résout plusieurs équations, et enfin termine par quelques opérations sur les radicaux. Plusieurs des problèmes sont énoncés d'une façon poëtique avec des allusions aux gentes damoiselles et aux galants chevaliers.

Des fragments d'autres chapitres traitant de l'algèbre, de la trigonométrie et donnant des applications géométriques ont été traduits par Colebrooke. Parmi les formules trigonométriques il s'en trouve une équivalente à l'équation $d\ (\sin \theta) = \cos \theta d\theta$.

Nous n'avons pas respecté l'ordre chronologique en parlant ici de Bhaskara, mais nous avons pensé qu'il était préférable de le mentionner en même temps que nous exposions les travaux de ses compatriotes. Il faut cependant remarquer qu'il n'a vécu que postérieurement à tous les mathématiciens arabes dont il est question

ci-après. Les ouvrages dont les Arabes eurent tout d'abord connaissance furent ceux d'Arya-Bhata.et de Brahmagupta, et peut-être ceux de leurs successeurs Sridhara et Padmanabha ; il est douteux qu'ils aient jamais fait beaucoup usage du grand traité de Bhaskara.

Il est probable que l'attention des Arabes se porta sur les ouvrages des deux premiers de ces auteurs, parce qu'ayant adopté les méthodes arithmétiques des Indiens, il leur était possible d'étudier les livres mathématiques de ces savants. Les Arabes avaient toujours fait un commerce considérable avec les Indes, commerce qui naturellement prit une plus grande extension avec l'établissement de leur empire ; à cette époque, vers l'an 700, ils trouvèrent chez les marchands hindous, le système de numération avec lequel nous sommes familiarisés, et que ces derniers commençaient à employer ; ils l'adoptèrent aussitôt. Il leur était d'autant plus aisé d'utiliser immédiatement ce système qu'ils ne possédaient aucun ouvrage scientifique ou littéraire leur en donnant un autre ; il est même douteux que celui dont ils faisaient alors usage, fut autre que le système le plus primitif de notation pour représenter les nombres. Les Arabes (de même que les Hindous) paraîssent n'avoir fait que peu d'usage de l'abaque, si même ils l'ont connu, et par suite, ils doivent avoir trouvé les méthodes de calcul des Grecs et des Romains extrêmement laborieuses. La date la plus ancienne assignée pour l'emploi, en Arabie, du système de numération décimale est 773. C'est à cette époque que quelques tables astronomiques indiennes furent apportées à Bagdad, et il est à peu près certain qu'elles comportaient l'usage des symboles numériques indiens (y compris le zéro).

DÉVELOPPEMENT DES MATHÉMATIQUES CHEZ LES ARABES (1)

Nous venons d'indiquer les deux sources où les Arabes ont puisé leurs connaissances mathématiques et nous avons exposé rapidement ce que chacune d'elles leur a fourni. Nous pouvons nous

(1) Un travail de B. Baldi sur la vie de plusieurs mathématiciens arabes, a été inséré dans le *Balletino di bibliografia*, de Boncompagni, 1872, vol. V, pp. 427-534.

résumer en disant qu'à la fin du huitième siècle, les Arabes étaient en possession d'une bonne notation numérique et de l'arithmétique de Brahmagupta et qu'avant la fin du neuvième, ils connaissaient les chefs-d'œuvre des mathématiciens grecs, en géométrie, mécanique et astronomie. Il nous reste à montrer l'usage qu'ils firent de ces matériaux.

Alkarismi. — Le premier et à certains égards le plus illustre des mathématiciens arabes fut *Mohammed ibn Musa Abu Djefar Al-Khwarizmi.* On n'est pas d'accord sur celui de ces noms qui doit lui être attribué : le dernier se rapporte à son lieu de naissance, peut-être à la ville où il fut célèbre, et d'après nos renseignements ce serait celui que ses contemporains lui donnaient le plus souvent. C'est donc celui que nous lui attribuerons, et nous agirons généralement de la même manière pour les autres mathématiciens arabes. Jusque dans ces derniers temps, ce nom s'écrivait toujours sous la forme corrompue, *Alkarismi,* et bien que cette façon de faire soit incorrecte, elle a été sanctionnée par tant d'écrivains que nous croyons devoir la conserver.

Nous ne savons rien de la vie d'Alkarismi, si ce n'est qu'il naquit à Khorassan et qu'il fut le bibliothécaire du Calife Al Mamoun ; il accompagna une mission en Afghanistan, et il se peut qu'il ait traversé les Indes en revenant dans son pays. A son retour, vers 830, il écrivit une algèbre (1) d'après celle de Brahmagupta, mais dans laquelle quelques-unes des démonstrations sont exposées suivant la méthode grecque, c'est-à-dire en représentant les nombres par des lignes. Il écrivit aussi un traité sur l'arithmétique : un ouvrage sans nom d'auteur intitulé *Algoritmi De Numero Indorum,* qui se trouve à la bibliothèque de l'université de Cambridge serait, suppose-t-on, une traduction de ce traité (2). Outre ces deux livres, il prépara quelques tables astronomiques avec remarques explicatives ; elles renferment des résultats empruntés à la fois à Ptolémée et à Brahmagupta.

L'algèbre d'Alkarismi tient une place importante dans l'histoire des mathématiques, car nous pouvons dire que les ouvrages arabes

(1) Elle a été publiée par F. Rosen, avec une traduction anglaise. Londres, 1831.

(2) Il a été publié, par B. Boncompagni. Rome, 1857.

et ceux des premières années de la Renaissance, qui parurent dans la suite, s'en inspirèrent directement, et que c'est par elle que le système de numération décimale Arabe ou Indien pénétra en Occident. Le livre est intitulé *Al-Gebr we' l mukabala* : *Al-Gebr*, d'où est dérivé le mot algèbre, peut être traduit par *La restitution* et se rapporte à ce fait que l'on peut augmenter ou diminuer d'une même quantité les deux membres d'une équation; *al mukabala* signifie le procédé de simplification, et est généralement employé pour désigner la réduction des termes semblables en un seul. La quantité inconnue est appelée soit « la chose » soit « la racine », et l'emploi que nous faisons de ce dernier terme pour désigner la solution d'une équation provient de là. Le carré de l'inconnue est appelé « la puissance ». Toutes quantités connues sont des nombres.

L'ouvrage comprend cinq parties. Dans la première, Alkarismi donne sans aucune démonstration, des règles pour la résolution des équations du second degré qu'il divise en six classes correspondant aux formes

$$ax^2=bx,\ ax^2=c,\ bx=c,\ ax^2+bx=c,\ ax^2+c=bx \text{ et } ax^2=bx+c$$

a, b, c sont des nombres positifs, et dans toutes les applications il fait $a = 1$. Il ne considère que les racines réelles et positives, mais il reconnaît l'existence de deux racines, ce qui, autant que nous pouvons le savoir n'avait jamais été fait par les Grecs. Il est à remarquer que lorsque les deux racines sont positives, il ne prend généralement que celle qui contient le radical avec le signe moins.

Il donne ensuite des démonstrations géométriques de ces règles en opérant comme dans la proposition 4 du livre II d'Euclide. Par exemple, pour résoudre l'équation $x^2 + 10x = 39$, ou une équation quelconque de la forme $x^2 + px = q$, il donne deux méthodes et nous allons en exposer une (*fig.* 22) :

Supposons que AB représente la valeur de x et construisons sur cette droite le carré ABCD. Prolongeons DA jusqu'en H et DC jusqu'en F, de sorte que AH = CF = 5 $\left(\text{ou } \frac{1}{2}p\right)$, et complétons le carré. Alors les aires AC, HB et BF représentent les quantités x^2, $5x$ et $5x$. Par suite le premier membre de l'équation est représenté par la somme des aires AC, BH et BF. Ajoutons aux deux

membres de l'équation le carré KG dont l'aire est 25 $\left(\text{ou } \frac{1}{4} p^2\right)$; nous obtenons un nouveau carré dont l'aire est, par hypothèse, égale à 39 + 25, c'est-à-dire à 64 $\left(\text{ou } q + \frac{1}{4} p^2\right)$ et dont le côté est par conséquent 8. Le côté de ce carré DH qui est égal à 8 surpasse AH qui vaut 5 de la valeur de la quantité inconnue qui est dès lors égale à 8 — 5 ou 3.

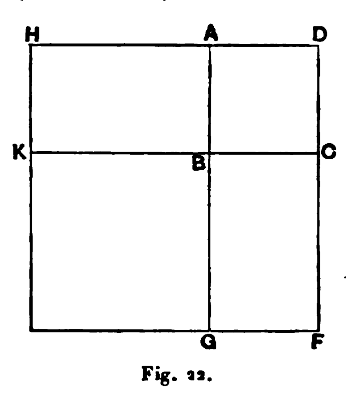


Fig. 22.

Dans la troisième partie du livre, Alkarismi considère le produit de $(x \pm a)$ par $(x \pm b)$. Dans la quatrième partie, il établit les règles pour l'addition et la soustraction d'expressions comprenant l'inconnue, son carré ou sa racine carrée; il donne des règles pour le calcul des racines carrées, et termine par les théorèmes exprimés par les formules

$$a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 b} \quad \text{et} \quad \sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}.$$

Dans la cinquième et dernière partie, il donne quelques problèmes dont voici un exemple : trouver deux nombres dont la somme est égale à 10 et dont la différence des carrés est 40.

Dans tous ces anciens ouvrages, il n'y a pas de distinction bien nette entre l'arithmétique et l'algèbre et, à vrai dire, la première de ces sciences est une partie de la seconde. C'est le livre d'Alkarismi qui a fourni aux Italiens leurs premières notions, non seulement d'algèbre, mais encore d'une arithmétique basée sur le système décimal. Cette arithmétique a été longtemps connue sous le nom d'*algorithme* ou art d'Alkarismi pour la distinguer de celle de Boëce. Cette appellation demeura en usage jusqu'au dix-huitième siècle.

Tabit ibn Korra. — L'œuvre commencée par Alkarismi fut poursuivie par *Tabit ibn Korra* né à Harran, en 836, mort en 901 et l'un des savants les plus brillants qu'aient produit les Arabes. Comme nous l'avons déjà dit, il publia des traductions des princi-

paux ouvrages d'Euclide, d'Apollonius, d'Archimède et de Ptolémée. Il composa également plusieurs traités originaux qui sont tous perdus, à l'exception d'un fragment d'algèbre relatif aux équations du troisième degré qu'il résolvait à l'aide de la géométrie, à peu près comme nous l'indiquerons plus loin.

L'algèbre continua à se développer. Les questions qui faisaient l'objet des méditations des Arabes se rapportaient à la résolution des équations ou à l'étude des propriétés des nombres. Les deux algébristes les plus éminents qui vinrent ensuite, furent Alkayami et Alkarki qui florissaient au commencement du onzième siècle.

Alkayami. — Le premier, *Omar Alkayami* est à citer à cause de la façon dont il a traité géométriquement les équations du troisième degré : il obtenait une racine en déterminant l'abscisse du point d'intersection d'une conique et d'un cercle [1]. Les équations qu'il a considérées sont des formes suivantes dans lesquelles a et c représentent des entiers positifs.

$x^3 + b^2x = b^2c$, dont la racine, dit-il, est l'abscisse du point d'intersection de $x^2 = by$ et $y^2 = x(c - x)$.

$x^3 + ax^2 = c^3$, dont la racine est l'abscisse du point d'intersection de $xy = c^2$, et $y^2 = c(x + a)$.

$x^3 \pm ax^2 + b^2x = b^2c$ ayant ponr racine l'abscisse du point d'intersection de $y^2 = (x \pm a)(c - x)$ et $x(b \pm y) = bc$.

Il donna une équation du quatrième degré, à savoir

$$(100 - x^2)(10 - x)^2 = 8100$$

dont la racine est déterminée par le point d'intersection de

$$(10 - x)y = 90 \quad \text{et} \quad x^2 + y^2 = 100.$$

On a prétendu aussi qu'Akayami avait affirmé l'impossibilité de résoudre en nombres entiers l'équation $x^3 + y^3 = z^3$; en d'autres termes, il aurait su que la somme de deux cubes ne peut jamais être un cube. En admettant qu'il ait énoncé cette proposition, il est maintenant impossible de dire s'il en a donné une démonstration exacte, ou bien s'il l'a reconnue par une induction hardie, ce qui serait plus vraisemblable ; mais le fait qu'un pareil théorème

(1) Son traité d'algèbre a été publié par Fr. Wœpcke. Paris, 1851.

lui ait été attribué, montre les progrès extraordinaires accomplis en algèbre par les Arabes.

Alkarki. — L'autre mathématicien de cette époque que nous avons mentionné fut *Alkarki* (¹) (vers 1000). Il donna les expressions des sommes des première, seconde et troisième puissances des n premiers nombres entiers ; il résolut diverses équations dont quelques-unes de la forme $ax^{2p} \pm bx^p \pm c = 0$; et s'occupa des quantités irrationnelles montrant par exemple que $\sqrt{8} + \sqrt{18} = \sqrt{50}$.

Même lorsque les méthodes algébriques des Arabes sont presque générales, les applications qu'ils en donnent roulent dans tous les cas, sur des problèmes numériques, et l'algèbre est tellement confondue avec l'arithmétique qu'il est difficile d'isoler les deux sujets. D'après leurs traités d'arithmétique et les observations que l'on trouve disséminées dans divers ouvrages d'algèbre, nous pouvons dire que les méthodes qu'ils employèrent pour effectuer les quatre opérations fondamentales étaient analogues à celles actuellement en usage ; mais les problèmes qui servaient d'application étaient identiques à ceux que l'on trouve dans les livres modernes et résolus par des méthodes semblables, telle la règle de trois. Quelques légers perfectionnements furent introduits dans la notation, comme par exemple un trait pour séparer dans une fraction le numérateur du dénominateur ; de là vient l'emploi de la ligne placée entre deux symboles pour indiquer la division (²). Alhossein (980-1037) avait une règle pour vérifier l'exactitude des résultats de l'addition et de la multiplication : c'est la règle qui est enseignée dans nos traités d'arithmétique sous le nom de preuve par 9.

Nous ne nous arrêterons pas à étudier les idées des Arabes en astronomie, ou à discuter la valeur de leurs observations, mais nous remarquerons en passant qu'ils acceptèrent les théories d'Hipparque et de Ptolémée, sans les faire progresser d'une manière sensible. Nous pouvons cependant ajouter que Al-Mamoun provoqua la mesure de la longueur d'un degré de latitude et qu'il détermina l'obliquité de l'écliptique avec autant de précision que les mathématiciens dont nous allons maintenant parler.

(¹) Son algèbre a été publiée, par Fr. Wœpcke, 1853, et son arithmétique a été traduite en allemand, par Ad. Hochheim. Halle, 1878.

(²) Voir plus loin, p. 247.

Albategni. Albuzjani. — *Albategni*, né à Batan, en Mesopotamie, en 877 et mort à Bagdad en 929, figure parmi les plus anciens astronomes Arabes. Il écrivit la *Science des Etoiles* (¹) qui doit être mentionnée parce qu'elle contient la découverte du déplacement de l'apogée du Soleil. Dans cet ouvrage, les angles sont déterminés par la « demi-corde de l'arc double », c'est-à-dire par le sinus de l'angle (en prenant le rayon vecteur comme unité). Avait-il connaissance de l'introduction des sinus faite antérieurement par Arya-Bhata et Brahmagupta ? c'est ce que l'on ignore ; mais il faut se rappeler qu'Hipparque et Ptolémée avaient déjà fait usage de la corde des arcs. Albategni était également en possession de la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique donnant le côté d'un triangle en fonction des deux autres côtés et de l'angle compris.

Peu de temps après la mort d'Albategni, *Albuzjani* qui est aussi connu sous le nom d'*Abul-Wafa*, né en 940, mort en 998 ; découvrit certaines fonctions trigonométriques et construisit des tables, des tangentes et des cotangentes. Il était célèbre non seulement comme astronome — ayant découvert les variations lunaires — mais comme l'un des géomètres les plus remarquables de son temps.

Alhazen. Abd-al-Gehl. — Les Arabes se contentèrent tout d'abord de prendre les ouvrages d'Euclide et d'Apollonius pour leurs livres classiques en géométrie, sans chercher à les commenter, mais *Alhazen*, né à Bassora, en 987 et mort au Caire en 1038 donna en 1036, une collection (²) de problèmes un peu dans le genre des *Data* d'Euclide. Outre des commentaires sur les définitions d'Euclide et sur l'*Almageste*, Alhazen écrivit encore un ouvrage sur l'Optique (³) dans lequel se trouve le plus ancien exposé scientifique du phénomène de la réfraction atmosphérique. Il renferme aussi quelques questions ingénieuses traitées par la géométrie, entre autres, la solution géométrique du problème qui consiste à trouver en quel point d'un miroir concave doit tomber un rayon lumineux partant d'un point donné pour aller se réfléchir en un autre point donné.

(¹) L'ouvrage a été publié, par REGIOMONTANUS, Nuremberg, 1537.
(²) Traduite par L. A. SÉDILLOT et publiée à Paris, en 1836.
(³) Publié à Bâle, en 1572.

Postérieurement, un autre géomètre *Abd-al-gehl* composa (vers 1100) un traité sur les sections coniques et trois petits traités de géométrie.

C'est peu après Abd-al-gehl que florissait Bhaskara le troisième grand mathématicien Hindou. Tout nous porte à croire qu'il connaissait les travaux de l'Ecole Arabe dont nous venons de parler. et aussi que ses écrits furent aussitôt répandus en Arabie.

Les Ecoles Arabes continuèrent à prospérer jusqu'au quinzième siècle, mais sans produire aucun autre mathématicien d'un génie exceptionnel, et sans faire progresser les méthodes déjà employées; il nous paraît par suite inutile de mentionner une foule d'écrivains dont les travaux n'eurent en réalité aucune influence sur les progrès de la science en Europe.

De cette étude rapide, on peut conclure que les travaux des Arabes (en y comprenant ceux des auteurs qui écrivirent en Arabie et qui vivaient sous la domination des Mahométans d'Orient) en arithmétique, en algèbre et en trigonométrie, dénotent une très grande supériorité. Ils surent comprendre l'importance de la géométrie et de ses applications à l'astronomie, mais ne reculèrent pas les bornes de cette science. On peut aussi ajouter qu'ils ne firent aucun progrès notable en statique, en optique ou en hydrostatique, bien qu'il soit hors de doute qu'ils aient eu une connaissance complète de l'hydraulique pratique.

L'impression générale qui ressort de cette étude est que les Arabes s'assimilèrent rapidement les idées des autres, notamment des maîtres de la Grèce et des mathématiciens Hindous, mais que, comme les anciens Chinois et les Egyptiens, ils furent incapables de faire progresser la science d'une façon notable. Leurs écoles ont eu une existence d'environ 650 ans, et si on compare les œuvres qu'elles produisirent avec celles de la Grèce ou de l'Europe moderne, on constate en définitive, une véritable infériorité.

CHAPITRE X

INTRODUCTION EN EUROPE DES OUVRAGES ARABES

(1150 — 1450 ENVIRON)

Dans l'avant dernier chapitre, nous avons suivi le développement des mathématiques en Europe jusque vers la fin du onzième siècle ; dans le dernier nous avons esquissé leur histoire chez les Hindous et chez les Arabes jusqu'à la même date : nous allons nous occuper maintenant des trois siècles qui suivent. Cette période est caractérisée par l'introduction en Europe des livres classiques Arabes, des ouvrages grecs qui furent connus grâce aux Arabes, et par l'assimilation des idées nouvelles qui se répandirent ainsi.

C'est par l'Espagne, et non directement par l'Arabie, que les écrits des Arabes pénétrèrent pour la première fois dans l'Europe occidentale. Les Maures s'étaient établis en Espagne en 747 et aux dizième et onzième siècles leur civilisation était très avancée. Bien que leurs relations politiques avec les califes de Bagdad fussent peu amicales, ils accueillirent avec empressement les travaux des grands mathématiciens Arabes. De cette façon, les traductions des écrits d'Euclide, d'Archimède, d'Appollonius, de Ptolémée et d'autres auteurs grecs peut-être, furent lues et commentées dans les trois grandes écoles mauresques de Grenade, Cordoue et Séville, en même temps que les œuvres des algébristes arabes.

Il paraît probable que la science des Maures fut limitée à ce qu'ils trouvèrent dans ces ouvrages, mais comme ils dissimulaient avec un soin jaloux, toutes leurs connaissances aux chrétiens, il

est impossible de préciser ce point et aussi de dire avec exactitude à quel moment les ouvrages Arabes furent introduits en Espagne.

Le onzième siècle. — Le plus ancien écrivain maure dont l'histoire fasse mention est *Geber ibn Aphla,* qui naquit à Séville et mourut à Cordoue dans la seconde moitié du onzième siècle. Il écrivit sur l'astronomie et la trigonométrie. Il connaissait ce théorème : dans un triangle sphérique les sinus des angles sont proportionnels aux sinus des côtés opposés (1).

Arzachel (2). — A peu près à la même époque, vivait à Tolède, en 1080, un autre arabe *Arzachel.* Il émit cette idée que les planètes avaient un mouvement elliptique, mais par intolérance scientifique, ses contemporains se refusèsent à discuter une opinion contraire à celle de Ptolémée dans son *Almageste.*

Le douzième siècle. — Dans le courant du douzième siècle des copies des ouvrages dont on faisait usage en Espagne pénétrèrent dans la partie occidentale de la chrétienté. La première tentative pour arriver à la connaissance de la science arabe et mauresque fut faite par un moine anglais, *Adelhard de Bath* (3), qui sous le déguisement d'un étudiant mahométan, suivit quelques cours à Cordoue, vers 1120, et se procura une copie des *Eléments* d'Euclide. Cette copie traduite en latin, fut la base de toutes les éditions connues en Europe jusqu'en 1533, époque où on découvrit le texte grec. On peut juger de la rapidité avec laquelle la connaissance de cet ouvrage se répandit en se rappelant que Roger Bacon le connaissait avant la fin du treizième siècle et qu'avant l'expiration du quatorzième, les cinq premiers livres étaient régulièrement enseignés dans quelques universités, si non dans toutes. Les énoncés d'Euclide semblent avoir été connus avant l'époque d'Adelhard, et peut-être déjà vers l'an 1000, bien que les copies

(1) Ses œuvres ont été traduites en latin, par GERARD et publiées à Nuremberg, en 1533.

(2) Voir un mémoire, par M. STEINSCHNEIDER dans le *Bulletino di Bibliografia*, de BONCOMPAGNI, 1887, vol. XX.

(3) Sur l'influence de ADELHARD et de BEN EZRA, voir le *Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik*, dans le *Zeitschrift für Mathematik*, vol. XXV, 1880.

en fussent rares. Adelhard se procura aussi un manuscrit ou un commentaire de l'ouvrage d'Alkarismi et le traduisit en latin. Il composa également un livre classique sur l'usage de l'abaque.

Ben Ezra. — Dans ce même siècle parurent d'autres traductions des livres classiques arabes, ou des commentaires sur ces ouvrages. Parmi ceux qui contribuèrent le plus à initier l'Europe au savoir des Maures nous pouvons mentionner *Abraham Ben Ezra*. Ben Ezra naquit à Tolède, en 1097 et mourut à Rome, en 1167. C'était un des plus distingués rabbins juifs qui séjournèrent en Espagne où, on doit se le rappeler, ils étaient tolérés et même protégés par les Maures, en raison de leurs connaissances en médecine. Outre des tables astronomiques et un ouvrage d'astrologie, Ben Ezra composa un traité d'arithmétique [1] dans lequel il expose le système de numération des arabes avec neuf symboles et un zéro, donne les opérations fondamentales, et explique la règle de trois.

Gérard [2]. — Un autre européen que la réputation des écoles arabes attira à Tolède fut *Gérard* qui naquit à Crémone, en 1114 et mourut en 1187. Il fit une traduction de l'édition arabe de l'*Almageste*, des ouvrages d'Alhazen et aussi de ceux d'Alfarabius, dont le nom nous aurait été sans cela complètement inconnu : on pense que les symboles numériques des arabes étaient employés dans cette traduction des œuvres de Ptolémée, qui fut faite en 1136. Gérard écrivit aussi un court traité d'algorithme dont le manuscrit existe à la bibliothèque Bodléienne à Oxford. Il connaissait une des éditions arabes des *Eléments* d'Euclide et en donna une traduction latine.

Jean Hispalensis. — Jean Hispalensis de Séville, était contemporain de Gérard. Il fut d'abord rabbin, mais se convertit au catholicisme et fut baptisé sous le nom que nous venons d'indiquer. Il traduisit plusieurs ouvrages Arabes et Maures et composa un traité d'algorithme où on trouve les plus anciens exemples d'ex-

[1] O. Terquem en a donné une analyse dans le *Journal* de Liouville, 1841.
[2] Voir Boncompagni, *Della vita e delle opere di Gherardo Cremonese*. Rome, 1851.

traction de racines carrées de nombres écrits avec la notation décimale.

Le treizième siècle. — Durant le treizième siècle, il y eut en Europe une sorte de renaissance de l'enseignement, mais son action ne se fit sentir, croyons-nous, que sur une certaine classe. Les premières années de ce siècle sont mémorables à cause du développement que prirent plusieurs universités et de l'apparition de trois mathématiciens remarquables : Leonard de Pise, Jordanus et Roger Bacon, le moine franciscain d'Oxford.

Léonard (1). — *Leonard Fibonacci* (c'est-à-dire filius Bonaccii) généralement connu sous le nom de *Leonard de Pise*, naquit dans cette ville en 1175. Son père Bonacci était marchand et fut envoyé par ses concitoyens à Bougie, en Barbarie, pour prendre la direction de la douane ; c'est là que Léonard fut élevé et instruit. Il put ainsi se familiariser avec le système de numération des Arabes et prendre connaissance de l'algèbre d'Alkarismi dont il a été question dans le dernier chapitre. Il paraîtrait que Léonard fut chargé de quelques services dépendant des douanes qui le mirent dans l'obligation de voyager. Il retourna en Italie, vers 1200, et en 1202, publia un livre intitulé *Algebra et almuchabala* (titre imité de celui de l'ouvrage d'Alkarismi) mais généralement connu sous le titre de *Liber Abaci*. Il y explique le système de numération des arabes en faisant ressortir son grand avantage sur celui des Romains.

Il fait ensuite une exposition de l'algèbre et signale la commodité qu'offre la géométrie pour obtenir des démonstrations sures des formules algébriques. Il montre comment se résolvent les équations simples ; donne la solution de quelques équations du second degré, et signale quelques méthodes pour résoudre les équations indéterminées ; à l'appui de ses règles, il donne comme exemples des problèmes sur les nombres. Toute l'algèbre est sans symbolisme et dans un seul cas il emploie des lettres comme sym-

(1) Voir *Leben und Schriften Leonardos da Pisa*, par J. Giesing, Döbeln, 1886 ; et Cantor, chap. XLI, XLII ; voir aussi deux articles, par Fr. Wœpcke dans le *Atti dell' Academia pontificia de nuovi Lincei*, pour 1861, vol. XIV, pp. 342-348. La plupart des écrits de Leonard ont été édités et publiés, par B. Boncompagni, de 1854 à 1862.

boles algébriques. La propagation de cet ouvrage fut immense et pendant au moins deux siècles, il demeura la source où de nombreux auteurs puisèrent leurs inspirations.

Le *Liber Abaci* présente un intérêt tout spécial dans l'histoire de l'arithmétique parce qu'il introduisit pratiquement dans l'Europe chrétienne l'usage des symboles numériques arabes. Du langage de Léonard, il ressort qu'ils étaient jusque là inconnus à ses compatriotes ; il raconte qu'ayant séjourné plusieurs années en Barbarie, il apprit le système arabe, le trouva bien plus commode que celui usité en Europe et, qu'en conséquence, il le publia « afin que la race latine (1) ne demeurât pas plus longtemps privée de cette connaissance ». En outre Léonard avait beaucoup lu et avait voyagé en Grèce, en Sicile et en Italie, de sorte que toutes les présomptions concordent pour faire supposer que le système n'était pas communément employé en Europe.

Bien que Léonard ait introduit dans les affaires commerciales l'usage des symboles numériques arabes, il est probable que les voyageurs et les marchands en Orient ne les ignoraient pas complètement, car le règlement des affaires entre les chrétiens et les mahométans se faisait assez directement pour que chacun put apprendre quelque chose du langage ou des pratiques ordinaires de l'autre. Nous pouvons difficilement supposer que les marchands italiens ne savaient pas comment quelques-uns de leurs meilleurs clients tenaient leurs comptes, et il faut se rappeler que beaucoup de chrétiens, après avoir été en esclavage chez les mahométans, s'étaient échappés ou avaient été mis en liberté après avoir payé rançon.

C'est cependant grâce à Léonard que le système arabe se propagea et devint d'un usage général ; au milieu du treizième siècle il était employé par un grand nombre de marchands Italiens concuremment avec l'ancien.

La plupart des mathématiciens devaient déjà le connaître par les ouvrages de Ben Ezra, Gerard et Jean Hispalensis. Mais peu de temps après l'apparition du livre de Léonard, Alphonse de Castille (en 1252) fit paraître quelques tables astronomiques basées sur des

(1) D'après Dean Peacock, l'exemple le plus anciennement connu de l'emploi du mot *Italiens* pour désigner les habitants de l'Italie se présente vers le milieu du XIIIe siècle : à la fin de ce siècle l'usage de ce mot était général.

observations faites en Arabie, calculées par les Arabes, et pour lesquelles, comme on le croit généralement, ils avaient employé leur système de notation. Les tables d'Alphonse circulèrent beaucoup parmi les hommes qui s'intéressaient à la science, et probablement contribuèrent à généraliser l'usage de ce système dans le monde scientifique. Vers la fin treizième siècle il était admis d'une façon générale que tout homme de science devait le connaître : ainsi Roger Bacon écrivant à cette époque recommande l'algorithme (c'est-à-dire l'arithmétique basée sur la notation arabe) comme une étude nécessaire aux Théologiens qui doivent, dit-il, « être experts dans l'art des nombres. »

Nous pouvons donc admettre que vers l'an 1300, ou 1350 au plus, le système arabe était familier et aux mathématiciens et aux marchands italiens.

La réputation de Léonard était si grande que l'Empereur Frédéric II s'arrêta à Pise en 1225, pour présider une sorte de tournoi mathématique où on devait mettre à l'épreuve le talent de Léonard dont on lui avait dit merveille. Les compétiteurs avaient été informés à l'avance des questions posées ; quelques unes étaient dues à Jean de Palerme qui figurait dans la suite de Frederic. C'est le premier exemple que nous offre l'histoire de ces défis si communs dans le seizième et dans le dix-septième siècles et dans lesquels on proposait certains problèmes particuliers. La première question proposée consistait à trouver un nombre carré qui, augmenté ou diminué de 5, restait toujours un carré. Léonard donna une réponse juste à savoir $\frac{41}{12}$. La seconde question était de trouver, au moyen des méthodes employées par Euclide dans son dizième livre, une ligne dont la longueur x devait satisfaire à la condition

$$x^3 + 2x^2 + 10x = 20.$$

Léonard montra géométriquement que le problème était impossible, mais il donna une valeur approchée de la racine de cette équation, à savoir

$$1 \; \frac{22}{60} \; \frac{7}{60^2} \; \frac{22}{60^3} \; \frac{33}{60^4} \; \frac{4}{60^5} \; \frac{40}{60^6} \text{ ce qui est égal à } 1,3688081075.....$$

valeur exacte jusqu'à la neuvième décimale [1].

[1] Voir un article de FR. WOEPCKE dans le *Journal* de Liouville, 1854, p. 401.

Une autre question s'énonçait ainsi : Trois hommes A, B, C possèdent en commun une certaine somme u, leurs parts respectives étant entre elles comme les trois nombres entiers 3, 2, 1. A prend dans la masse une somme x, en garde la moitié et dépose le reste entre les mains d'une certaine personne D ; B prend à son tour dans la masse y, dont il garde les $\frac{2}{3}$ et donne le surplus à D ; enfin C prend ce qui reste, soit z, en garde par devers lui les $\frac{5}{6}$, et donne le reste à D. Il se trouve que les dépôts faits entre les mains de D et appartenant à A, B et C sont égaux. Trouver d'après cela u, x, y et z.

Léonard fit voir que le problème était indéterminé et donna pour l'une des solutions $u = 47$, $x = 33$, $y = 13$, $z = 1$.

Les autres compétiteurs échouèrent dans la résolution de ces questions.

Le principal ouvrage de Léonard est le *Liber Abaci* dont il a été question plus haut. On trouve dans ce livre une démonstration de la formule bien connue ;

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (bc - ad)^2$$
$$= (ad + bc)^2 + (bd - ac)^2.$$

Il composa également une géométrie qu'il intitulait *Practica Geometriæ* et qui fut publiée en 1220. C'est une bonne compilation dans laquelle il introduisit un peu de trigonométrie ; entre autres propositions et exemples il donne l'aire du triangle en fonction des côtés. Dans la suite il publia un *Liber Quadratorum* dans lequel il était question de problèmes analogues à la première des questions proposées lors du tournoi scientifique ([1]). Il composa encore un traité sur des problèmes déterminés d'algèbre qui sont tous résolus par la règle de fausse position comme nous en avons donné un exemple plus haut.

Frédéric II. — L'empereur *Frédéric II* qui naquit en 1194, monta sur le trône en 1210 et mourut en 1250 ; non seulement il

([1]) Fr. Wœpcke a donné dans le *Journal* de Liouville, 1855, p. 54, l'analyse de la méthode qu'employait Léonard pour traiter les problèmes sur les nombres carrés.

s'intéressait à la science mais il fit tous ses efforts pour répondre dans l'Europe occidentale les œuvres des mathématiciens arabes. L'Université de Naples reste comme un exemple de sa munificence. Nous avons déjà dit que la présence des Juifs en Espagne avait été tolérée en raison de leurs connaissances médicales et scientifiques ; et en fait les noms de médecin et d'algébriste [1] furent à peu près synonymes pendant longtemps. Aussi les médecins juifs étaient-ils admirablement placés pour obtenir des copies des ouvrages arabes et pour les traduire. Frédéric profita de cette circonstance pour s'entourer de juifs instruits chargés de traduire les livres arabes, qu'il s'était procurés ; il n'est toutefois pas douteux que, s'il leur accorda ainsi sa protection, ce fut surtout pour être désagréable au pape avec lequel il était alors en lutte. Dans tous les cas, à la fin du treizième siècle, des copies des œuvres d'Euclide, d'Archimède, d'Apollonius, de Ptolémée et de plusieurs auteurs arabes virent le jour de cette manière et à la fin du siècle suivant elles n'étaient plus rares.

Nous pouvons donc dire qu'à partir de cette époque le développement de la science en Europe se fit indépendamment des Ecoles arabes.

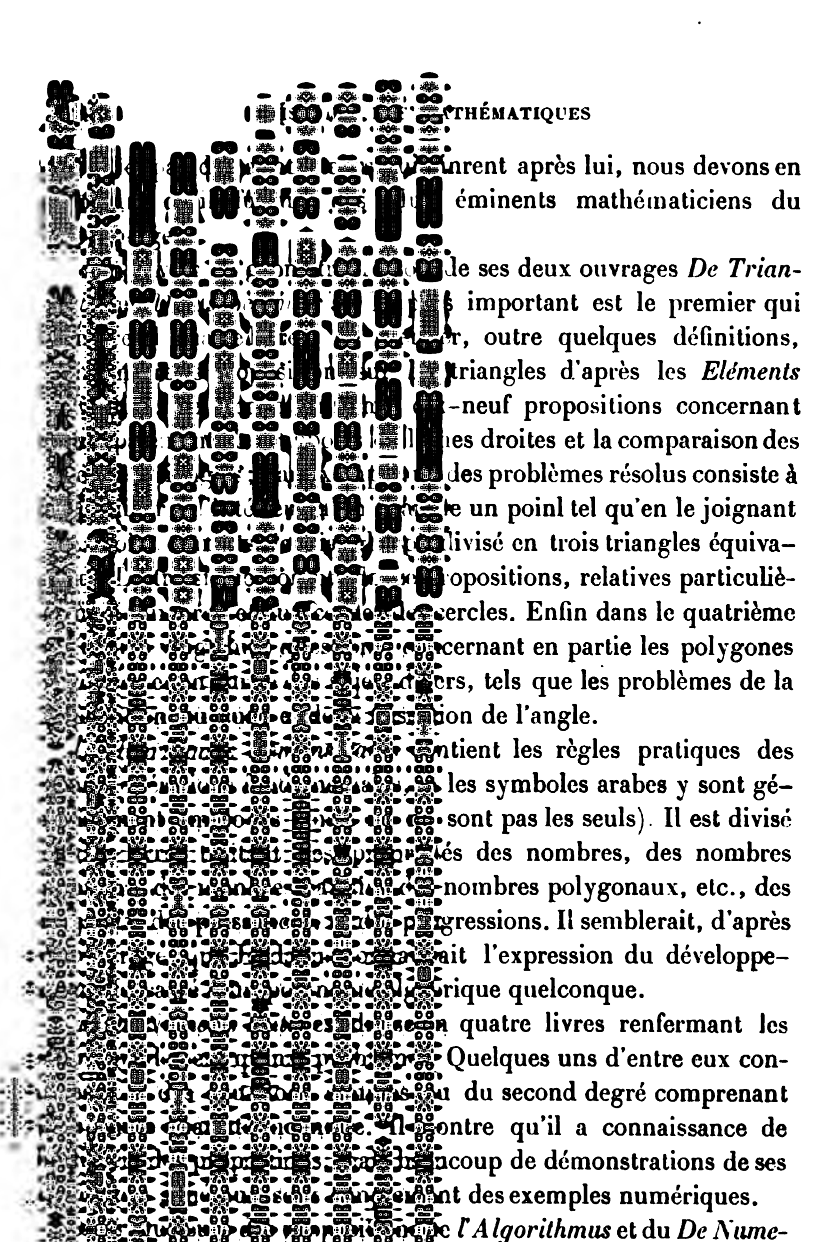
Jordanus [2]. — Parmi les contemporains de Léonard se trouvait un mathématicien allemand dont les œuvres restèrent presque inconnues jusque dans ces dernières années. C'était *Jordanus Nemorarius*, appelé quelquefois *Jordanus de Saxonia* ou *Teutonicus*. Nous avons peu de détails sur sa vie, nous savons cependant qu'il devint général de l'ordre des Dominicains en 1222. On lui attribue les ouvrages énumérés dans la note qui se trouve au bas de cette page [3] et si nous admettons qu'ils n'ont été ni augmentés ni

[1] Par exemple le lecteur peut se rappeler que dans *Don Quichotte*, (IIe partie, chap. XV) quand, une nuit, *Sancho Pança* tombe de cheval et a les côtes brisées, un *algebriste* est appelé pour bander ses blessures.

[2] Voir Cantor, chap. XLIII, XLIX où se trouvent réunies les références sur Jordanus.

[3] Le Prof. Curtze, qui a étudié d'une façon toute spéciale le sujet, estime que les ouvrages suivants sont dus à Jordanus.

Geometria vel de Triangulis, publiée par M. Curtze, en 1887, dans le vol. VI des *Mitteilungen des Copernicus-Vereins zu Thorn* ; *De isoperimetris* ; *Arithmetica Demonstrata*, publiée par Faber Stapulensis, à Paris, en 1496, seconde



...rent après lui, nous devons en ... éminents mathématiciens du

...de ses deux ouvrages *De Trian-* ... important est le premier qui ...r, outre quelques définitions, ... triangles d'après les *Eléments* ... -neuf propositions concernant ...es droites et la comparaison des ... des problèmes résolus consiste à ... e un poinl tel qu'en le joignant ... divisé en trois triangles équiva- ... ropositions, relatives particuliè- ... ercles. Enfin dans le quatrième ... cernant en partie les polygones ... rs, tels que les problèmes de la ... on de l'angle.

... ntient les règles pratiques des ... les symboles arabes y sont gé- ... sont pas les seuls). Il est divisé ... és des nombres, des nombres ... nombres polygonaux, etc., des ... gressions. Il semblerait, d'après ... ait l'expression du développe- ... rique quelconque.

... quatre livres renfermant les ... Quelques uns d'entre eux con- ... du second degré comprenant ... ontre qu'il a connaissance de ... coup de démonstrations de ses ... t des exemples numériques.

... *l'Algorithmus* et du *De Nume-*

... ublié par J. Schöner, à Nuremberg, ... P. Treutlein, en 1879 et inséré en ... XXXVI des *Zeitschrift für Mathe-* ... P. Apian, en 1533, à Nuremberg ... ou trois traités sur l'*Astronomie* de

ris Datis les lettres sont employées pour désigner à la fois les quantités connues et inconnues et il s'en sert aussi dans les démonstrations des règles de l'arithmétique aussi bien qu'en algèbre. Comme exemple nous citerons la question suivante [1], dans laquelle il se propose de déterminer deux quantités, connaissant leur somme et leur produit.

Dato numero per duo diviso si, quod ex ductu unius in alterum producitur, datum fuerit, et utrumque eorum datum esse necesse est.

Sit numerus datus *abc* divisus in *ab* et *c*, atque ex *ab* in *c* fiat *d* datus, itemque ex *abc* in se fiat *e*. Sumatur itaque quadruplum *d*, qui fit *f*, quo dempto de *e* remaneat *g*, et ipse erit quadratum differentiæ *ab* ad *c*. Extrahatur ergo radix ex *g*, et sit *h*, eritque *h* differentia *ab* ad *c*, cumque sic *h* datum, erit et *c* et *ab* datum.

Huius operatio facile constabit hoc modo. Verbi gratia sit *x* divisus in numeros duos, atque ex ductu unius eorum in alium fiat XXI; cuius quadruplum, et ipsum est LXXXIIII, tollatur de quadrato X, hoc est C, et remanent XVI, cuius radix extrahatur, quæ erit quator, et ipse est differentia. Ipsa tollatur de *x* et reliquum, quod est VI, dimidietur, eritque medietas III, et ipse est minor portio et maior VII.

Il est à noter que Jordanus, comme Diophante et les Hindous, indique une addition par la juxtaposition.

Traduite en notation moderne son argumentation est la suivante. Soient $a + b$ (que nous représentons par γ) et c les deux nombres;

Alors $\gamma + c$ est donné, par suite $(\gamma + c)^2$ est connu, représentons ce carré par e.

Le produit γc est également donné, représentons-le par d.

Représentons encore par f le produit connu $4\gamma c = 4d$. Or $(\gamma - c)^2$ est égal à $e - f$ et, par suite est connu; désignons-le par g.

On a $\gamma - c = \sqrt{g}$, quantité connue que nous représentons par h.

Enfin $\gamma + c$ et $\gamma - c$ sont connus, et, par suite γ et c peuvent se calculer de suite.

Il est curieux qu'il ait eu l'idée de prendre, pour l'une des quantités inconnues, la somme $a + b$.

Dans l'application numérique qu'il donne il prend pour somme 10 et pour produit 21.

[1] Tirée de *De Numeris Datis*, livre I, prop, 3.

Sauf un exemple que l'on trouve dans les écrits de Léonard, les ouvrages cités ci-dessus sont les plus anciens modèles connus parmi les mathématiciens européens d'une algèbre syncopée dans laquelle les lettres sont employées comme symboles algébriques. Il est probable que l'*Algorithmus* resta généralement ignoré jusqu'à son impression en 1534, et il est douteux qu'à une pareille date les œuvres de Jordanus aient exercé une influence considérable sur le développement de l'algèbre. En fait, il arrive constamment dans l'histoire des mathématiques que des améliorations dans la notation ou dans les méthodes se produisent longtemps avant d'être adoptées d'une façon générale ou avant que les avantages qu'elles présentent soient reconnus. C'est pourquoi une même découverte peut être faite plusieurs fois à des époques et dans des circonstances différentes : une telle amélioration n'est adoptée et ne devient partie intégrante de la Science, que si elle est réclamée par l'état général des connaissances, ou si elle est présentée par ceux qui savent fixer l'attention par leur insistance ou leurs connaissances. Jordanus en employant des lettres ou des symboles pour représenter les quantités que l'on rencontre en analyse était de beaucoup en avance sur ses contemporains. Il y eut des tentatives faites par d'autres mathématiciens postérieurs pour introduire une semblable notation, mais ce n'est qu'après avoir été découverte plusieurs fois et indépendamment qu'elle devint d'un usage général.

Il ne nous semble pas nécessaire d'entrer dans des détails sur la mécanique, l'optique et l'astronomie de Jordanus. La mécanique au moyen-âge était très peu avancée.

Pendant une période d'environ deux cents ans, il n'y eut en Europe aucun mathématicien comparable à Léonard et à Jordanus.

Durant le treizième siècle les plus fameux centres d'instruction en Europe occidentale étaient Paris et Oxford, et nous devons maintenant parler des hommes les plus remarquables de ces Écoles.

Holywood (1). — Nous commencerons par mentionner *Jean de Holywood*, dont le nom est souvent écrit sous la forme latine de *sacro-Bosco*. Holywood naquit dans le Yorkshire et fut instruit à

(1) Voir Cantor, chap. XLV.

Oxford, mais après avoir obtenu le grade de maître-ès-arts il se rendit à Paris où il enseigna jusqu'à sa mort en 1244 ou 1246. Ses leçons sur l'algorithme et l'algèbre sont les plus anciennes que nous puissions mentionner. Son ouvrage sur l'arithmétique fit autorité pendant plusieurs années ; il contient des règles sans démonstrations et fut imprimé à Paris en 1496. Il écrivit aussi un traité sur la sphère qui fut publié en 1256 : ce traité se répandit fort loin, fut longtemps consulté et montre avec quelle rapidité se propageaient les connaissances mathématiques. En dehors de ces ouvrages, deux opuscules de lui intitulés *De Computo Ecclesiastico* et *De Astrolabio* existent encore.

Roger Bacon (1). — Un autre contemporain de Léonard et de Jordanus fut Roger Bacon qui fit, pour la science physique, un travail à peu près semblable à celui que ces derniers avaient fait pour l'arithmétique et l'algèbre. *Roger Bacon* naquit près d'Ilchester en 1214 et mourut à Oxford le 11 juin 1294. Il était fils d'un royaliste dont la majeure partie des biens avait été confisquée à la fin des guerres civiles : très jeune encore il entra comme étudiant à Oxford, et il aurait pris les ordres, dit-on, en 1233. En 1234 il se rendit à Paris, alors la capitale intellectuelle de l'Europe occidentale, où il vécut quelques années se consacrant spécialement à l'étude des langues et de la physique ; il dépensa là en achats de livres et en frais d'expériences tout ce qui lui restait de son patrimoine et toutes ses économies. Peu après 1240, il retourna à Oxford, où il travailla d'une façon assidue pendant dix ou douze ans, s'occupant surtout d'enseigner les sciences. Son cabinet de travail était extraordinairement encombré, car tout ce qu'il gagnait passait en achat de manuscrits ou d'instruments. Il nous raconte qu'à Paris et à Oxford il dépensa en totalité, de cette manière, environ 2 000 livres sterling, somme qui de nos jours équivaudrait à 20 000 livres sterling au moins.

Bacon lutta avec énergie pour substituer les mathématiques et la

(1) Voir Roger Bacon, *Sa Vie, Ses Ouvrages*, par E. Charles. Paris, 1861 et le mémoire de J. S. Brewer mis en tête des *Opera Medita*, série Rolls. Londres, 1859. Une critique dépréciant quelque peu le premier de ces ouvrages se trouve dans Roger Bacon, *eine Monographie*, par L. Schneider. Augsbourg, 1873.

linguistique à la logique dans l'enseignement universitaire, mais les influences du temps étaient trop fortes. Son éloge enthousiaste des « divines mathématiques » qui devraient former le fondement d'une instruction libérale et qui « seules peuvent purifier l'intelligence et conviennent à l'étudiant pour le préparer à acquérir toute connaissance » tombait dans des oreilles qui ne voulaient rien entendre. Nous pouvons apprécier la faiblesse des notions de géométrie insérées dans le quadrivium, quand il nous raconte que peu d'étudiants à Oxford étudiaient la géométrie au delà de la proposition 5 du livre I d'Euclide ; nous aurions peut-être pu formuler une conclusion identique d'après le caractère de l'ouvrage de Boëce.

A la fin usé, abandonné et ruiné, Bacon conseillé par son ami Grosseteste, le grand évêque de Lincoln, renonça au monde et prononça ses vœux de Franciscain. La société au milieu de laquelle il se trouva alors lui fut singulièrement antipathique et il passa son temps à écrire sur des sujets scientifiques et peut-être à faire des conférences. Le supérieur de l'ordre eut connaissance de ce qui se passait et en 1267 il lui défendit de faire des conférences ou de publier quoi que ce soit, sous peine des punitions les plus sévères, et en même temps il l'envoya en résidence à Paris, où il pouvait être surveillé d'une façon plus étroite.

Clément IV, lorsqu'il était en Angleterre, avait entendu parler de l'intelligence de Bacon, et étant devenu pape en 1266, il l'engagea à publier ses écrits. L'ordre des Franciscains lui permit à contre cœur de le faire, mais en lui refusant toute assistance. Bacon se procura avec difficulté assez d'argent pour acheter du papier et louer des livres, puis, dans le court espace de quinze mois, il composa en 1267 son *Opus Majus* avec deux suppléments qui résumaient tout ce qui était alors connu en physique et posaient les principes sur lesquels devait être basée l'étude de cette science, celle de la philosophie et de la littérature. Comme principe fondamental il affirmait que l'étude des sciences naturelles devait reposer uniquement sur l'expérience ; et dans la quatrième partie, il expliquait en détail comment l'astronomie et la physique dépendaient en définitive des mathématiques et progressaient seulement quand leurs principes fondamentaux étaient exprimés sous une forme mathématique. Les mathématiques, disait-il, devraient être regardées comme l'alphabet de toute philosophie.

Les conclusions auxquelles il était arrivé ainsi dans cet ouvrage et dans ses autres écrits sont à peu près conformes aux idées modernes, mais à l'époque où il vivait, elles étaient trop avancées pour être appréciées ou peut-être même pour être comprises, et il fut donné aux générations suivantes de reprendre son œuvre et de lui accorder la réputation, dont il ne jouit pas de son vivant. En astronomie il posa les principes pour réformer le calendrier, expliqua le phénomène des étoiles filantes, et observa que le système de Ptolémée resterait peu scientifique aussi longtemps qu'il demeurerait basé sur la supposition que le mouvement naturel d'une planète est un mouvement circulaire, et aussi, que la nature complexe des explications qu'il entraînait rendait peu probable l'exactitude de la théorie. En optique il énonça les lois de la réflexion de la lumière et, d'une façon générale, celles de la réfraction ; il les utilisa pour donner une explication approchée de l'arc-en-ciel et des verres grossissants. La plupart de ses expériences en chimie concernaient la transmutation des métaux et ne conduisirent à aucun résultat. Il donna la composition de la poudre, mais il est certain qu'elle n'est pas de son invention, bien que ce soit lui qui en ait fait mention pour la première fois en Europe. D'un autre côté, quelques unes de ses conclusions semblent être des conjectures plus ou moins ingénieuses, et certaines de ses affirmations sont sûrement fausses.

Dans les années qui suivirent immédiatement la publication de son *Opus Majus* il écrivit de nombreux ouvrages pour développer les principes qu'il avait formulés. Beaucoup d'entre eux sont publiés aujourd'hui, mais nous n'avons pas connaissance d'une édition complète de ses œuvres. Ils concernent uniquement les mathématiques appliquées et la physique.

Clément ne prêta aucune attention au grand travail qu'il avait demandé ; il obtint cependant pour Bacon l'autorisation de retourner en Angleterre. A la mort de Clément, le général de l'ordre des Franciscains fut élu pape sous le nom Nicolas IV. Les recherches de Bacon n'avaient jamais reçu l'approbation de ses supérieurs, et on lui ordonna alors de retourner à Paris où, nous dit-on, il fut immédiatement acccusé de magie : en 1280 il fut condamné à un emprisonnement perpétuel, et on ne lui rendit sa liberté qu'un an environ avant sa mort.

Campanus. — Le seul autre mathématicien de ce siècle qui mérite d'être mentionné est *Giovanni Campano*, ou *Campanus* pour employer la forme latine, chanoine de Paris. Une copie de la traduction d'Adelhard des *Eléments* d'Euclide tomba entre les mains de Campanus qui la publia comme étant de lui [1] ; il y ajouta un commentaire dans lequel il discutait les propriétés du pentagone régulier étoilé. Outre quelques autres ouvrages d'importance moindre il composa la *Théorie des planètes*, qui était une traduction libre de l'*Almageste*.

Le quatorzième siècle. — Le fait dominant dans l'histoire du quatorzième siècle de même que dans celle du siècle précédent est l'introduction et l'étude des livres classiques mathématiques arabes et des ouvrages grecs connus par l'entremise des Arabes.

Bradwardine [2]. — Un mathématicien de cette époque qui eut peut-être assez de réputation pour que nous puissions le mentionner ici est *Thomas Bradwardine*, Archevêque de Canterbury. Bradwardine naquit à Chichester vers 1290. Il fit ses études à Oxford, au Collège Merton et ensuite professa à cette université. De 1335 jusqu'à sa mort il s'occupa principalement des questions politiques intéressant l'Eglise et l'Etat : il prit une part importante à l'invasion de la France, à la prise de Calais et à la victoire de Crécy. Il mourut à Lambeth en 1349. Ses œuvres mathématiques, écrites probablement lors de son séjour à Oxford, sont le *Tractatus de Proportionibus*, imprimé à Paris en 1495 ; l'*Arithmetica Speculativa*, imprimée à Paris en 1502 ; la *Geometria Speculativa*, imprimée à Paris en 1511 ; et un traité *De quadratura Circuli*, imprimé à Paris en 1495. Tous ces ouvrages donnent probablement une juste idée de l'enseignement des mathématiques dans les universités anglaises.

Oresme [3]. — *Nicolas Oresme* a eu une certaine influence sur le développement des mathématiques. Il naquit à Caen en 1323,

(1) L'ouvrage fut imprimé par Radolt, à Venise, en 1482. Voir J. L. Heiberg dans le *Zeitschrift für Mathematik*, vol. XXXV, 1890.

(2) Voir Cantor, vol. II, p. 102 et suivantes.

(3) Voir *Die mathematischen Schriften des Nicole Oresme*, par M Curtze Thorn, 1870.

devint le confident intime de Charles V, qui le choisit comme tuteur de Charles VI, et fut ensuite nommé évêque de Lisieux, où il mourut le 11 juillet 1382. Il écrivit *l'Algorismus Proportionum* dans lequel il introduisit l'idée des indices fractionnaires, et aux yeux de ses contemporains, il était aussi remarquable comme économiste et comme théologien que comme mathématicien; mais nous ne nous proposons pas d'analyser ses écrits. L'ouvrage sur lequel est principalement fondée sa réputation traite de questions sur les monnaies et sur le change commercial. Au point de vue mathématique, il est à citer à cause de l'emploi des fractions ordinaires et de l'introduction de symboles pour les représenter.

Vers le milieu de ce siècle tous les mathématiciens connaissaient la géométrie euclidienne (telle que l'exposait Campanus), l'algorithme, et aussi l'astronomie de Ptolémée. A cette époque on commença à ajouter à l'explication des symboles arabes, qui figurait sur les calendriers, les règles de l'addition, de la soustraction, de la multiplication et de la division « de algorismo ». Les calendriers les plus importants et d'autres traités insérèrent également un exposé des règles de proportion avec des applications pourtant sur diverses questions pratiques.

Dans la dernière moitié de ce siècle, il y eut un soulèvement général des universités contre la tyrannie intellectuelle des scolastiques. Il fut en grande partie dû à Pétrarque qui, pour sa génération, était célèbre plutôt comme humaniste que comme poète, et qui fit tout ce qui était en son pouvoir pour détruire la scolastique et encourager l'érudition. Le résultat de ces influences sur l'étude des mathématiques peut être constaté par les changements qui furent alors introduits dans l'étude du quadrivium. Le mouvement partit de l'Université de Paris, où un réglement à cet effet fut adopté en 1366, et un an ou deux après, une réglementation similaire fut mise en vigueur à Oxford et Cambridge ; il n'y est malheureusement fait mention d'aucun livre classique. Nous pouvons cependant nous former une opinion sur la nature des études qu'on exigeait en mathématiques, par l'examen des statuts des Universités de Prague, de Vienne et de Leipzig.

Les règlements de Prague datés de 1384, imposaient aux candidats au grade de bachelier la lecture du traité de la sphère d'Holywood, et les candidats au grade de maître-es-arts devaient con-

naître les six premiers livres d'Euclide, l'optique, l'hydrostatique, la théorie du levier et l'astronomie. Les cours portaient sur l'arithmétique, l'art de compter avec les doigts, et l'algorithme des nombres entiers; sur les almanachs qui probablement désignaient une sorte d'astrologie élémentaire; et sur *l'Almageste*, c'est-à-dire l'astronomie de Ptolémée. On a cependant des raisons de croire que dans cette université les études mathématiques étaient plus sérieuses que dans les autres.

A Vienne, en 1389, un candidat pour le grade de maître-ès-arts devait connaître les cinq premiers livres d'Euclide, la perspective ordinaire, les partages proportionnels, la mesure des superficies et la *Théorie des Planètes*. Cette théorie des planètes était celle de Campanus qui a écrit son traité d'après celui de Ptolémée.

Cet ensemble constituait un programme mathématique fort raisonnable mais le lecteur ne doit pas oublier que dans les universités au moyen âge le « retoquage » n'était pas connu. On imposait à l'étudiant la rédaction d'une composition ou une conférence sur un certain sujet, mais bien ou mal faite il obtenait son grade, et il est probable que, seuls, les quelques étudiants qui s'intéressaient aux mathématiques travaillaient réellement les sujets mentionnés ci-dessus.

Le quinzième siècle. — Quelques faits puisés un peu partout dans l'histoire du quinzième siècle tendent à montrer que les règlements qui régissaient l'étude du quadrivium n'étaient pas sérieusement appliqués.

Les listes des conférences faites dans les années 1437 et 1438 à l'université de Leipzig (fondée en 1409 et dont les règlements sont à peu près identiques à ceux de Prague mentionnés ci-dessus) existent encore et montrent que les seules leçons qui y furent données sur les mathématiques pendant ces années roulaient sur l'astrologie. Les archives de Bologne, Padoue et Pise semblent établir que là aussi l'astrologie était le seul sujet scientifique enseigné dans le quinzième siècle, et même jusqu'en 1598 on exigeait du professeur de mathématiques à Pise, qu'il fît des conférences sur le *Quadripartitum*, ouvrage d'astrologie qui paraît (probablement à tort) avoir été écrit par Ptolémée. Les seules conférences de mathématiques qui d'après les registres d'Oxford ont été faites entre les

années 1449 et 1463 se rapportaient à l'astronomie de Ptolémée, ou à des commentaires de cette ouvrage, et aux deux premiers livres d'Euclide. Et même beaucoup d'étudiants allaient-ils aussi loin ? La chose est douteuse. Il résulterait d'une édition des *éléments* d'Euclide publiée à Paris en 1536, qu'après 1452 les candidats au grade de maitre-ès-arts à l'Université de Paris devaient faire le serment qu'ils avaient suivi des leçons se rapportant aux six premiers livres de cet ouvrage.

Beldomandi. — Le seul écrivain de ce temps qui mérite d'être mentionné ici est *Prodocimo Beldomandi* de Padoue, né vers 1380 ; il écrivit une arithmétique algorithmique publiée en 1410 qui contient la formule de sommation des séries géométriques, et quelques ouvrages de géométrie ([1]).

Vers le milieu du quinzième siècle l'imprimerie s'était répandue partout et les facilités qu'on eut ainsi de propager les connaissances furent assez grandes pour révolutionner la science. Nous voici arrivés à une époque où les résultats obtenus par les géométres arabes et grecs sont connus en Europe et il paraîtra convenable de clore ici cette période et de commencer celle de la Renaissance.

L'histoire mathématique de la Renaissance s'ouvre avec Regiomontanus; mais avant d'aborder l'histoire générale il nous paraît à propos de résumer les principaux faits se rapportant au développement de l'arithmétique durant le Moyen-Age et la Renaissance. Nous y consacrons le chapitre suivant.

([1]) Pour de plus amples détails voir le *Bulletino di bibliografia*, de Boncompagni, vol. XII, XVIII.

CHAPITRE XI

DÉVELOPPEMENT DE L'ARITHMÉTIQUE (1)

(1300-1637 ENVIRON)

Nous avons vu dans le dernier chapitre qu'à la fin du treizième siècle l'arithmétique arabe était bien connue en Europe et employée concurremment avec l'ancienne arithmétique de Boëce.

Il nous paraît avantageux d'abandonner l'ordre chronologique et de résumer brièvement l'histoire de cette science pendant les années qui suivirent : après avoir décrit les perfectionnements qu'elle a reçus, nous espérons pouvoir exposer avec clarté dans le prochain chapitre l'ordre des découvertes.

L'ancienne arithmétique était divisée en deux parties : l'arithmétique pratique ou art du calcul, qui était enseignée au moyen de l'abaque et peut-être de la table de multiplication, et l'arithmétique théorique comprenant les rapports et les propriétés des nombres, qu'on exposait d'après la méthode de Boëce. Cette dernière partie était réservée aux mathématiciens de profession et elle fut enseignée jusqu'au milieu du quinzième siècle ; quant à la première, elle était encore en usage au commencement du dix-septième siècle chez les petits négociants d'Angleterre (2), d'Allemagne et de France.

(1) Voir l'article sur l'Arithmétique, par G. PEACOCK, dans l'*Encyclopædia Metropolitana*, vol. I. Londres, 1845 ; *Arithmetical Books*, par A. DE MORGAN. Londres, 1847 ; et un article par P. TREUTLEIN DE KARLSRUHE, dans le supplément (pp. 1-100) des *Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik*, 1877.

(2) Voir, par exemple, CHAUCER, *The Miller's Tale*, v. 22-25 ; SHAKESPEARE *The Winter's Tale*, Act. IV, Sc. 2 ; *Othello*, Act. I, Sc. 1. Nous ne sommes pas assez au courant des littératures française et allemande pour savoir si il y est fait mention de l'usage de l'abaque. Nous pensons que la division de l'Échi-

L'arithmétique arabe était appelée *algorithme* ou art d'Alkarismi pour la distinguer de l'ancienne arithmétique dite de Boëce. Les livres classiques d'algorithme débutaient par l'exposition du système de notation des Arabes, et donnaient les règles de l'addition, de la soustraction, de la multiplication et de la division ; les principes sur les proportions étaient ensuite appliqués à divers problèmes pratiques, puis les ouvrages se terminaient d'habitude par des règles générales pour résoudre des problèmes simples relatifs au commerce. En fait l'algorithme était une arithmétique commerciale, bien qu'à l'origine elle ait renfermé tout ce qui était alors connu en algèbre.

Ainsi l'algèbre a son origine dans l'arithmétique ; et pour beaucoup de personnes le nom d'*Arithmétique universelle*, sous lequel on la désignait quelquefois donnait, une idée bien plus juste de son objet et de ses méthodes que les définitions savantes des mathématiciens modernes — meilleure assurément que la définition de Sir William Hamilton qui l'appelle la science du temps pur, ou encore que celle de De Morgan pour qui elle est le calcul des suites. Il n'est pas douteux que logiquement il y a une différence marquée entre l'arithmétique et l'algèbre, attendu que la première est la théorie des grandeurs discontinues, tandis que l'autre est celle des grandeurs continues ; mais cette distinction est d'origine tout à fait récente et l'idée de continuité n'apparaît pas en mathématiques avant l'époque de Képler.



Il va de soi que les règles fondamentales de cette algorithme ne furent pas au début démontrées rigoureusement — Ce fut l'œuvre d'un enseignement plus avancé — mais, jusqu'au milieu du dix-septième siècle, il y eut quelques discussions sur les principes formulés ; depuis lors, très peu d'arithméticiens ont tenté de justifier les procédés employés, et la plupart se sont contentés d'énoncer des règles en les appliquant à de nombreux exemples numériques.

Nous avons fréquemment fait allusion au système de notation numérique des Arabes, il est donc convenable que nous disions

quier de la Haute-Cour de justice tire son nom de la table devant laquelle siégeaient originairement les juges et les fonctionnaires de la Cour ; elle était couverte d'un tapis noir divisé en carrés ou cases d'échec par des lignes blanches, et apparemment employé comme abaque.

quelques mots sur l'histoire des symboles, dont nous nous servons.

Leur origine est obscure et a été très discutée ([1]). Il paraît probable en définitive que les symboles 4, 5, 6, 7 et 9 (et peut-être 8) viennent des lettres initiales des mots correspondants de l'alphabet Indo-Bactrien en usage dans le nord de l'Inde, 150 ans peut-être avant Jésus-Christ ; que les symboles 2 et 3 ont été originairement deux et trois traits de plume parallèles ; et semblablement que le symbole 1 représente un simple trait de plume. Des signes analogues étaient en usage dans les Indes avant la fin du second siècle de notre ère. L'origine du symbole 0 est inconnue : il n'est pas impossible qu'il ait d'abord été un point mis pour marquer un espace vide, ou bien il peut représenter une main fermée, mais ce sont là de simples conjectures ; on a des raisons de croire qu'il fut introduit dans les Indes vers la fin du cinquième siècle de notre ère, mais le plus ancien écrit où on le trouve daterait du VIIIe siècle.

Les symboles employés dans les Indes au huitième siècle et longtemps après sont appelés chiffres Devanagari : ils sont figurés dans la première ligne du tableau ci-après. Les Arabes d'Orient en modifièrent légèrement la forme et, à leur tour, les Maures y firent quelques retouches. Il est possible que les Arabes d'Espagne aient tout d'abord écarté le 0 et ne l'aient remis en usage qu'après avoir constaté combien son omission était gênante. Les symboles définitivement adoptés par les Arabes sont appelés chiffres gobar, et on peut se faire une idée des formes qu'ils affectèrent le plus communément, d'après la seconde ligne du tableau ci-dessous. De l'Espagne ou de la Barbarie, les chiffres gobar passèrent dans l'Europe occidentale.

Nous reproduisons les formes sous lesquelles on les trouve écrits à différentes époques et qui ont précédé celle sous laquelle ils nous sont familiers ([2]). Toutes les suites de chiffres du

([1]) Voir A. P. Pihan, *Signes de numération*. Paris, 1860 : Fr. Woepcke, *La propagation des chiffres Indiens*. Paris, 1863 ; A. C. Burnell, *South Indian Palaeography*. Mangalore, 1874 ; Is. Taylor, *The Alphabet*, Londres, 1883 ; et Cantor.

([2]) Le premier, second et quatrième exemples sont empruntés à Is. Taylor, *Alphabet*. Londres, 1883, vol. II, p. 266 ; les autres sont pris dans l'ouvrage de Leslie, *Philosophy of Arithmetic*, pp. 114-115.

tableau sont écrites de gauche à droite et dans l'ordre 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

Chiffres Devanagari (Indiens) vers 950.

Chiffres Gobar (Arabes) vers 1100 (?)

D'un missel, vers 1385, d'origine allemande.

Chiffres européens (probablement italiens) vers 1400.

Du *Mirrour of the world*, imprimé par Caxton en 1480.

D'un calendrier écossais pour 1482, probablement d'origine française.

A partir de 1500 les symboles employés ne diffèrent pratiquement pas des nôtres (1).

L'évolution ultérieure des chiffres gobar en Orient se fit presque en dehors de l'influence européenne.

A des différences insignifiantes près, les divers auteurs les écrivirent de la même façon, quelquefois en substituant un signe à l'autre ; sans entrer dans des détails nous reproduisons leur forme actuelle, en faisant observer que le symbole représentant 4 est généralement en écriture cursive :

١, ٢, ٣, ٤, ٥, ٦, ٧, ٨, ٩, ١٠

Abandonnant maintenant l'histoire des symboles, nous allons étudier le développement de l'arithmétique algorithmique. Nous avons déjà dit comment les hommes de science et en particulier les astronomes, avaient eu connaissance du système arabe vers le milieu du treizième siècle. Le commerce européen, durant les treizième et quatorzième siècles, était en grande partie entre les mains des Ita-

(1) Voir par exemple, *De Arte Supputandi*, de Tonstall. Londres 1522 ; ou *Grounde of Artes*, de Record. Londres, 1540, et *Whetstone of Witte*. Londres, 1557.

liens, et les avantages évidents du système algorithmique conduisirent à son adoption générale en Italie. Le changement cependant ne s'effectua pas sans une opposition considérable : ainsi un édit promulgué à Florence en 1299 interdisait aux banquiers l'emploi des chiffres arabes, et en 1348 les autorités de l'université de Padoue décidèrent qu'une liste serait tenue pour la vente des livres avec les prix marqués « non per cifras sed per literas claras ».

L'extension rapide dans le reste de l'Europe de l'arithmétique algorithmique et des chiffres arabes semble devoir être due autant aux fabricants d'almanachs et de calendriers qu'aux marchands et aux hommes de science. Au moyen âge ces calendriers étaient très répandus. Il y en avait de deux sortes. Les uns étaient composés spécialement pour les usages ecclésiastiques : ils contenaient les dates des différentes fêtes, les époques de jeûne de l'Eglise pour une période de sept ou huit ans, et aussi des notes sur les rites du culte. Presque chaque monastère et chaque église de quelque importance avait un de ces calendriers, et on en trouve encore plusieurs spécimens. Les autres étaient spécialement écrits pour l'usage des astrologues et des médecins et certains contenaient des observations sur des sujets scientifiques variés, principalement la médecine et l'astronomie ; ces almanachs étaient assez communs à cette époque, mais, comme ils n'entraient que par hasard dans une bibliothèque de corporation, les exemplaires qui restent sont très rares. Il était d'usage d'employer les symboles arabes dans les ouvrages ecclésiastiques ; d'un autre côté leur emploi exclusif dans les tables astronomiques et leur origine orientale — qui leur prêtait quelque chose de magique — les fit aussi adopter pour les calendriers dressés en vue de recherches scientifiques. Ainsi ces symboles étaient généralement employés dans les deux espèses d'almanachs, et il existe peu de spécimens de calendriers, si même on en trouve, parus après l'an 1300, dans lesquels on ne donnait pas l'explication de leur usage. Vers le milieu du quatorzième siècle, les règles de l'arithmétique *de algorismo* s'y trouvaient quelquefois ajoutées et nous pouvons considérer que vers l'an 1400 les symboles arabes étaient généralement connus en Europe et étaient employés dans la plupart des ouvrages scientifiques et astronomiques.

En dehors de l'Italie et jusque vers l'an 1550 beaucoup de négociants continuèrent à tenir leurs comptes avec les chiffres romains ;

il en fut ainsi dans les monastères et les collèges jusque vers 1650, mais il est probable que, même dans ces deux cas, on faisait à partir du quinzième siècle les opérations par les méthodes algorithmiques. En Angleterre, soit dans les registres des paroisses, soit dans les archives généalogiques des châteaux, on ne trouve, avant le seizième siècle, aucun exemple d'une date ou d'un nombre écrit en chiffres arabes ; ils sont pourtant employés en 1490 dans l'état des revenus du chapitre de Saint-André, en Ecosse, pour la mention d'une rentrée. Les chiffres arabes furent introduits à Constantinople par Planude ([1]) à peu près à l'époque où ils pénétraient en Italie.

L'histoire de l'arithmétique commerciale moderne commence donc en Europe avec son emploi par les négociants italiens et nous devons son précoce développement et ses perfectionnements aux marchands et aux écrivains Florentins. Ce sont eux qui inventèrent le système de tenue des livres par double entrée, consistant à inscrire chaque transaction du côté crédit sur un grand livre et du côté débit sur un autre.

Ce sont eux aussi qui classèrent en différents groupes les problèmes auxquels on pouvait appliquer les méthodes arithmétiques : règle de trois, intérêts, profits et pertes, etc. Ils réduisirent aussi au nombre de sept les opérations fondamentales de l'arithmétique, à savoir : la numération, l'addition, la soustraction, la multiplication, la division, l'élévation aux puissances et l'extraction des racines, en souvenir, dit Pacioli, des sept dons de l'Esprit Saint. Brahmagupta avait donné vingt procédés de calcul différents en déclarant « que leur connaissance complète était essentielle à tous ceux qui désiraient devenir calculateurs ». Quoiqu'on pense de la raison qui a poussé Pacioli à en réduire le nombre, la simplification qui en résulta fut avantageuse. On peut ajouter que des écoles d'arithmétique furent créées dans plusieurs villes de l'Allemagne, surtout à partir du quatorzième siècle et qu'elles contribuèrent beaucoup à familiariser les négociants de l'Europe septentrionale et occidentale avec l'arithmétique commerciale et algorithmique.

Les opérations de cette arithmétique ne laissèrent pas d'être tout d'abord très embarrassantes. Les principaux perfectionnements

([1]) Voir ci-dessus, p. 121.

[illegible] l'algorithme italienne primitive
[illegible] atre opérations fondamentales ;
[illegible] ddition, la soustraction, l'égalité
[illegible] la multiplication et la division ;
[illegible] l'usage des décimales.
[illegible] rès l'autre.
[illegible] l'addition et la soustraction en
[illegible] de moderne consistant à opérer
[illegible] n, introduite par un Anglais du
[illegible] inconnue. L'ancienne méthode
[illegible] usage jusque vers 1600 ; de nos
[illegible] use pour les calculs d'approxi-
[illegible] onserver seulement un certain
[illegible]

[illegible] plusieurs manières d'effectuer
[illegible] outes quelque peu laborieuses,
[illegible] tiplication, si elles n'étaient pas
[illegible] cas employées que rarement.
[illegible] e, et la vérification de l'exactitude
[illegible] e par neuf fut imaginée par les
[illegible] multiplication ont été successi-
[illegible] et Tartaglia en donnent plu-
[illegible] ble de multiplication — allant au
[illegible] néral. Avec cette table réduite
[illegible] ultiplication de tous les nombres
[illegible] ésignée sous le nom de *regula*
[illegible] entité :

$$[illegible]\ (5 - b) + 10\,(a + b)$$

[illegible] sous cette forme : supposons
[illegible] ouverte, 6 par la main ouverte
[illegible] ouverte avec deux doigts fermés,
[illegible] igts fermés et enfin 9 par la main
[illegible] ; pour multiplier un nombre
[illegible] ultiplicande par une main et le
[illegible] nformément à la convention ci-
[illegible] es doigts ouverts dans l'une des
[illegible] verts dans l'autre, en ayant soin

de compter le pouce comme un doigt : on ajoute au résultat dix fois le nombre total des doigts fermés et on a le produit cherché. Il paraîtrait que c'est à Florence que l'on a fait pour la première fois la multiplication par la méthode que nous employons encore.

La difficulté que présentait la multiplication des grands nombres à tous ceux qui n'étaient pas des mathématiciens expérimentés conduisit à la découverte de plusieurs moyens mécaniques pour effectuer l'opération.

Le plus célèbre d'entre eux est celui des baguettes de Neper inventées en 1617. En principe il est le même que celui qui fut longtemps en usage à la fois dans les Indes et en Perse, et qui a été décrit dans les journaux de plusieurs voyageurs et notamment dans les *Travels of Sir John Chardin in Persia*, Londres, 1686.

Pour utiliser cette méthode, on prépare un certain nombre de bandes rectangulaires en os, en bois, en métal ou en carton et on divise leur surface en petits carrés par des lignes transversales. Chaque bande mesure environ 7 centimètres de long et 8 millimètres de large. On inscrit un chiffre quelconque dans le premier carré en haut de chaque bande et les produits obtenus en multipliant ce chiffre par 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, et 9 sont respectivement inscrits dans les huit carrés qui suivent ; quand le produit est un nombre de deux chiffres, le chiffre des dizaines est inscrit un peu au-dessus et à gauche de celui des unités dont il est séparé par la diagonale du carré. Les bandes sont généralement disposées dans une boîte.

La figure 23 de la page 198 représente neuf de ces bandes placées côte à côte et la figure 24 représente la bande 7, supposée enlevée de la boîte.

Soit à multiplier 2985 par 317, on opérera comme il suit.

Les bandes dans les premiers carrés desquelles se lisent les chiffres 2, 9, 8 et 5 sont enlevées de la boîte et placées côte à côte comme le montre la figure 25. Le résultat de la multiplication de 2985 par 7 est donné dans le tableau ci-après

$$\begin{array}{r} 2985 \\ 7 \\ \hline 35 \\ 56 \\ 63 \\ 14 \\ \hline 20895 \end{array}$$

[illegible] septième ligne de la figure 25, [illegible] supérieur et inférieur qui s'y [illegible] t 1653 et 4365; de plus les [illegible] s de telle sorte que le 4 se [illegible] le 3 sous le 5 et le 6 sous le 3 [illegible]

[illegible] onne le résultat cherché.

[illegible] ssivement de cette manière le [illegible] et 3 et la réponse cherchée [illegible] 317) est obtenu par une ad-[illegible]

7
1/4
2/1
2/8
3/5
4/2
4/9
5/6
6/3

Fig. 24.

2	9	8	5
/4	1/8	1/6	1/0
/6	2/7	2/4	1/5
/8	3/6	3/2	2/0
1/0	4/5	4/0	2/5
1/2	5/4	4/8	3/0
1/4	6/3	5/6	3/5
1/6	7/2	6/4	4/0
1/8	8/1	7/2	4/5

Fig. 25.

[illegible] me suit :

[illegible] /7
[illegible] I
[illegible] / 3

[illegible] per dans son ouvrage *Rabdo-* [illegible] mplement à remplacer chaque [illegible], qu'il appelait « une baguette » [illegible] es mêmes divisions et les mêmes [illegible] tes ci-dessus. Non seulement [illegible], mais elles étaient d'un manie-[illegible] osition d'ensemble était telle que [illegible] ait simplifiée.

Si la multiplication était considérée comme difficile la division fut tout d'abord regardée comme une opération que seuls les mathématiciens exercés pouvaient aborder. La méthode communément employée par les Arabes et les Persans pour effectuer la division d'un nombre par un autre sera suffisamment expliquée par un exemple concret. Supposons que l'on demande de diviser 17 978 par 472. Une feuille de papier est divisée en autant de colonnes verticales qu'il y a de chiffres dans le nombre à diviser. Le dividende est inscrit au haut de la feuille et le diviseur à la partie inférieure, le premier chiffre de chacun de ces nombres étant placé

1	7	9	7	8
4	7	2		
		0		

Fig. 26.

1 1	7 2	9	7	8
	5 2	9 1	7	8
	3	8	7 6	8
	3	8	1	8
4	4 7	7 2	2	
		0	3	

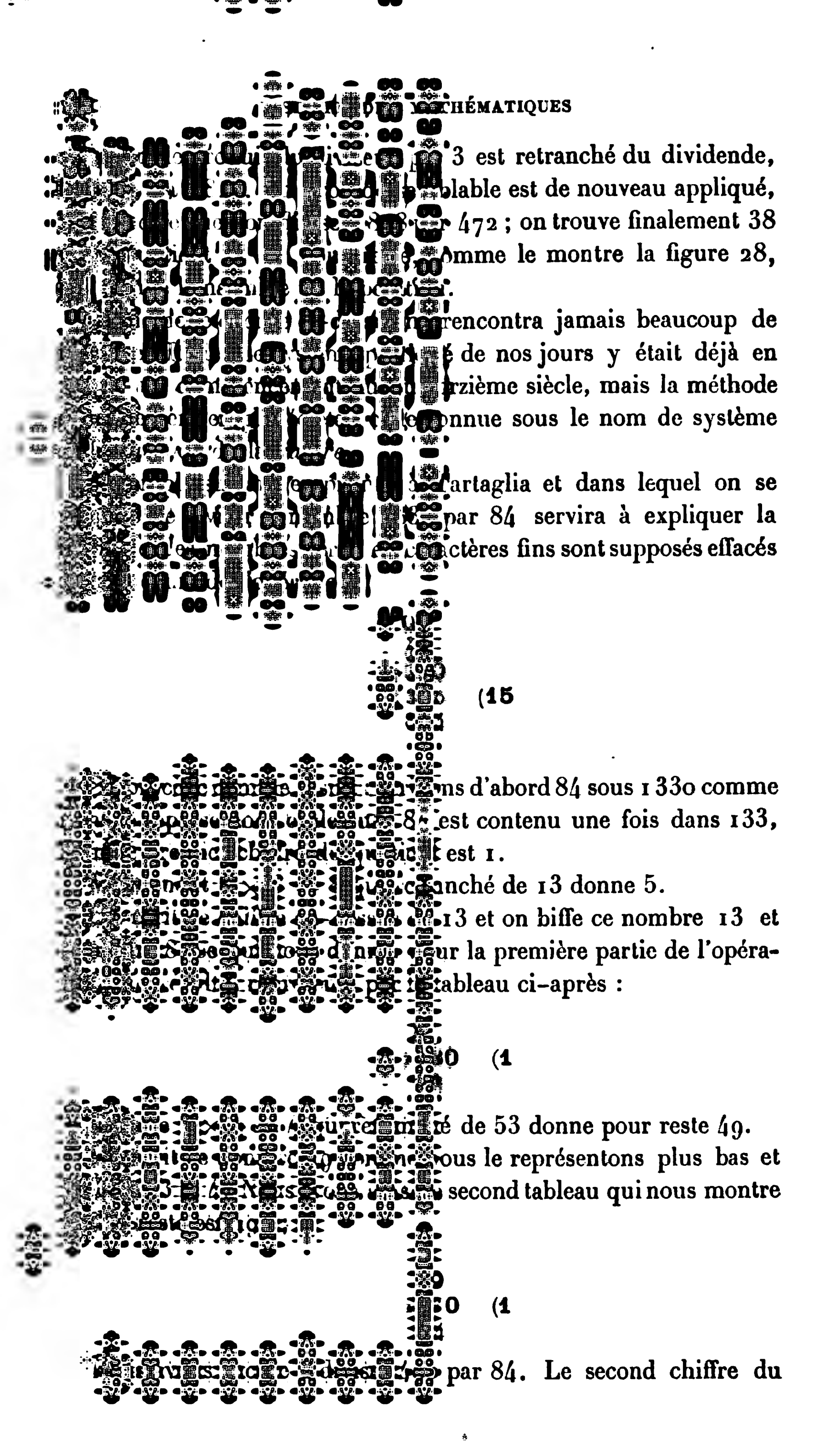
Fig. 27.

1 1	7 2	9	7	8
	5 2	9 1	7	8
	3	8	7 6	8
	3 3	8 2	1	8
		6 5	1 6	8
			5 1	8 6
			4	2
4	4 7	4 7 2	7 2	2
		0	3	8

Fig. 28.

sur le côté gauche. Considérons alors la colonne de gauche ; 4 n'est pas contenu dans 1, par suite le premier chiffre du quotient est zéro, que l'on écrit au-dessus du dernier chiffre du diviseur, comme le représente la figure 26.

Ensuite on écrit de nouveau (voir la figure 27) le nombre 472 immédiatement au-dessus de sa première position, mais en avançant tous les chiffres d'un rang vers la droite, et l'on efface le premier nombre écrit. On trouve que 4 est contenu 4 fois dans 17, mais comme après essai on constate que 4 est trop fort pour le premier chiffre du dividende, on choisit 3 ; ce chiffre 3 est par suite écrit sous le dernier chiffre du diviseur à côté du 0. La figure 27 montre



… 3 est retranché du dividende,
… blable est de nouveau appliqué,
… 472 ; on trouve finalement 38
… omme le montre la figure 28,

… rencontra jamais beaucoup de
… de nos jours y était déjà en
… zième siècle, mais la méthode
… nnue sous le nom de système

… artaglia et dans lequel on se
… par 84 servira à expliquer la
… ctères fins sont supposés effacés

(15

… ns d'abord 84 sous 1 330 comme
… est contenu une fois dans 133,
… est 1.
… nché de 13 donne 5.
… 13 et on biffe ce nombre 13 et
… ur la première partie de l'opéra-
… ableau ci-après :

(1

… é de 53 donne pour reste 49.
… ous le représentons plus bas et
… second tableau qui nous montre

(1

… par 84. Le second chiffre du

quotient est 5, et en retranscrivant le diviseur, le tableau de l'opération est :

```
  4
 59
1330  (15
 844
  8
```

5 × 8 = 40 et en retranchant ce produit de 49 on trouve 9.

Ecrivons ce chiffre 9 à la droite du 4, biffons 49 et 8 et nous avons le résultat suivant :

```
 49
 59
1330  (15
 844
  8
```

Enfin 5 × 4 = 20 qui retranché de 90 donne pour reste 70.

Inscrivons 70 et biffons 90 et 4, nous obtenons le dernier tableau de l'opération avec le reste 70 :

```
  7
 49
 590
1330  (15
 844
  8
```

Les trois zéros extrêmes que l'on voit dans l'exemple de Tartaglia ne sont pas nécessaires, ils n'influent en rien sur le résultat; de même il est évident qu'un chiffre du dividende peut être déplacé d'un ou deux rangs dans la même colonne verticale, si on le juge convenable pour la marche de l'opération.

Les écrivains du moyen âge connaissaient la méthode actuellement en usage, mais ils considéraient comme plus simple le procédé par *ratures* que nous venons de décrire. Dans certains cas ce dernier est très incommode comme on peut le voir par l'exemple suivant pris dans Pacioli. Il s'agit de diviser 23400 par 100 et le résultat s'obtient comme le montre le tableau ci-après :

```
   0
  040
 03400
 23400  (234
 10000
  100
   1
```

ployée dans les Indes et c'est peut-
A peu près vers 1600 elle cessa
le se maintint encore partiellement
l'autres contrées. Nous pourrions
peuvent être employés, et le sont
ent de la division d'un nombre

liquer l'addition et la soustrac-
étique de Widman, publiée en
ir la première fois d'une façon
mboles opératoires, par Stifel en
rai en disant que Viète en 1591
nu qui utilisa ces signes d'une
et que ce ne fut pas avant le
siècle qu'ils devinrent des sym-
gne = pour indiquer l'égalité ([2])
7.

([3]) sans lesquels un grand nom-
us avons constamment à effectuer
, est due à Neper de Merchiston.
r la première fois au public dans
thmorum Canonis Descriptio pu-
anglaise parut l'année d'après ([4]),
uniqué un sommaire de ses ré-
ouvrage Neper montre comment
de la comparaison des termes
arithmétique et d'une progression
leur usage par des exemples et
les des logarithmes des sinus et
mpris dans le premier quadrant,
La définition du logarithme d'une
défini aujourd'hui par le sym-
$\frac{10^7}{n}\Big)$.

s l'*Encyclopædia Britannica*, neuvième

HERMANN, 1895.

Cet ouvrage est pour nous des plus intéressants, car il constitue la première œuvre de valeur ayant contribué au progrès des mathématiques et qui soit due à un auteur britannique.

La méthode employée pour calculer les logarithmes a été expliquée dans la *Constructio*, ouvrage posthume publié en 1619 : elle semble avoir été très laborieuse et était basée soit sur le calcul direct des puissances et des racines, soit sur la formation de moyennes géométriques. La méthode reposant sur le calcul d'une valeur approchée d'une série convergente a été introduite par Newton, Cotes et Euler.

Neper avait décidé de changer la base de son système pour une autre qui fût une puissance de 10, mais il mourut avant d'avoir mis son dessein à exécution.

La rapide constatation faite en Europe des avantages que présentait l'emploi des logarithmes dans les calculs pratiques fut principalement due à Briggs, qui, l'un des premiers, reconnut la valeur de l'invention de Neper. Briggs ayant constaté de suite que la base employée par Neper pour le calcul de ses logarithmes était très incommode, alla le voir en 1616, et l'engagea à la remplacer par une base décimale. Neper reconnut que ce serait un perfectionnement.

Une fois de retour, Briggs se mit immédiatement à préparer des tables à base décimale, et en 1617 il fit paraître une table des logarithmes des nombres de 1 à 1000, calculés avec quatorze chiffres décimaux.

Il paraîtrait qu'indépendamment de Neper, J. Bürgi avait construit avant 1611 une table des antilogarithmes d'une suite naturelle de nombres ; elle fut publiée en 1620. La même année, une table des logarithmes à sept chiffres décimaux des sinus et des tangentes des angles du premier quadrant fut calculée par Edmond Gunter, professeur à Coresham. Quatre ans plus tard celui-ci imaginait une sorte de règle à calcul, ou, comme il l'appelait, « une ligne de nombres » qui permettait de trouver mécaniquement le produit de deux nombres.

Dans la dernière des années dont il vient d'être question, c'est-à-dire en 1624, Briggs fit paraître ses tables des logarithmes des nombres ainsi que celles des logarithmes de plusieurs fonctions trigonométriques. Ses logarithmes des nombres naturels sont égaux

à ceux correspondant à la base 10, multipliés par 10^8, et ceux des sinus des angles aux logarithmes à base 10 multipliés par 10^{12}. Le calcul des logarithmes de 70 000 nombres qui avaient été omis dans les tables de Briggs de 1624 fut effectué par Adrien Vlacq et le travail parut en 1628 : avec cette addition la Table donne les logarithmes de tous les nombres de 1 à 101 000.

L'*Arithmetica Logarithmica* de Briggs et Vlacq forme en substance un ouvrage semblable aux Tables existantes : certaines parties ont été calculées de nouveau à différentes époques, mais aucune table d'une égale étendue et aussi parfaite, basée en entier sur de nouveaux calculs n'a été publiée depuis. Ces tables furent complétées par la *Trigonometrica Britannica* de Briggs, qui contient non seulement des tables des logarithmes des fonctions trigonométriques, mais aussi des tables de leurs valeurs naturelles : cet ouvrage fut publié après sa mort en 1633. Une table des logarithmes, correspondant à la base *e*, des nombres de 1 à 1 000 et des sinus, tangentes et sécantes des angles compris dans le premier quadrant avait déjà été publiée à Londres, vers 1619, par Jean Speidell, mais bien entendu, dans la pratique des calculs, elle n'offrait pas les mêmes avantages que celle des logarithmes à base 10.

Vers 1630, l'usage des Tables de logarithmes était général.

IV) L'introduction de la notation décimale pour les fractions est également (selon nous) due à Briggs. En 1585, Stevin avait employé une notation à peu près semblable, car il écrit un nombre tel que 25.379 [1] sous la forme 25, 3′ 7″ 9‴ ou encore comme il suit 25 ⓪ 3 ① 7 ② 9 ③ ; Neper, en 1617, avait employé la première notation lorsqu'il faisait ses essais pour construire ses réglettes ; et Rudolff s'était servi d'une notation à peu près identique. Bürgi employait également les fractions décimales, écrivant 1.414 sous la forme $\overset{\circ}{1}414$. Mais les écrivains que nous venons de mentionner n'avaient utilisé cette notation que parce qu'elle leur fournissait une façon concise de faire connaître les résultats, ils n'en faisaient pas usage dans les opérations. La même notation se trouve cependant dans les tables publiées par Briggs en 1617 et semblerait avoir été adoptée par lui dans tous ses ouvrages ; bien qu'il

(1) Nous avons conservé ici la façon d'écrire les nombres décimaux usitée en Angleterre : 25.379 et non 25,379 comme en France.

soit difficile de parler sur ce point avec une certitude absolue, il ne nous semble pas douteux qu'il employait également cette notation dans la pratique de ses opérations. Dans l'ouvrage posthume de Neper *Constructio*, publié en 1619, elle est définie et employée d'une façon systématique dans la pratique des calculs, et comme cet ouvrage a été écrit après entente avec Briggs, vers 1615-6, et a été probablement revu par ce dernier avant sa publication, ceci, nous semble-t-il, vient à l'appui de notre opinion que l'invention en est due à Briggs, qui en aurait fait part à Neper. Dans tous les cas elle n'a pas été employée sous une forme pratique par Neper en 1617, et si à cette époque il la connaissait, on doit supposer qu'il considérait son emploi en arithmétique courante comme peu avantageux. Avant le seizième siècle les fractions s'écrivaient communément au moyen de la notation sexagésimale.

Dans l'ouvrage de Neper de 1619 le point était disposé comme de nos jours [1], mais Briggs soulignait les chiffres décimaux, et aurait écrit un nombre tel que 25.379 sous la forme de $25\underline{379}$. Des écrivains postérieurs ajoutèrent une autre ligne et écrivirent ainsi $25|\underline{379}$. Ce ne fut que vers le commencement du dix-huitième siècle qu'on employa d'une façon générale la notation usitée de nos jours, et même encore cette notation varie légèrement suivant les pays. La notation décimale devint d'un usage général parmi les hommes pratiques avec l'introduction du système métrique décimal français.

(1) En Angleterre bien entendu.

CHAPITRE XII

LES MATHÉMATIQUES PENDANT LA RENAISSANCE (¹)

(1450-1637 ENVIRON)

Nous revenons maintenant à l'histoire générale des mathématiques dans l'Europe Occidentale. Les mathématiciens s'étaient à peine assimilé les connaissances qu'ils devaient aux Arabes et aux traductions arabes des auteurs grecs, que les réfugiés, qui s'échappèrent de Constantinople après la chûte de l'empire d'Orient, apportèrent en Italie les œuvres originales et les traditions de la science grecque. Ainsi vers le milieu du quinzième siècle les étudiants d'Europe pouvaient prendre connaissance des principales découvertes des Ecoles grecque et arabe.

L'invention de l'imprimerie à peu près à la même époque rendit relativement facile la diffusion de la science. Il semble inutile de faire remarquer qu'avant l'imprimerie, un écrivain ne pouvait avoir qu'un nombre très limité de lecteurs ; mais nous oublions peut-être trop aisément que lorsqu'au moyen-âge un écrivain « publiait » un ouvrage, celui-ci n'arrivait à la connaissance que de bien peu des contemporains de l'auteur. Il n'en avait pas été ainsi dans les temps classiques, car, à cette époque et jusqu'au quatrième siècle de notre ère Alexandrie était regardée comme le centre où conver-

(¹) Là où nous ne donnons aucune référence spéciale, voir les parties XII, XIII, XIV et les premiers chapitres de la partie XV des *Vorlesungen* de CANTOR. Au sujet des mathématiciens italiens de cette période, voir aussi GUIL. LIBRI, *Histoire des Sciences mathématiques en Italie*, 4 vol. Paris, 1838-1841.

geaient et d'où partaient tous les nouveaux ouvrages et toutes les découvertes. D'un autre côté, il n'existait au moyen-âge aucun centre commun où les hommes de science pouvaient se réunir et c'est peut-être à cela qu'il faut attribuer en partie le développement lent et irrégulier des mathématiques pendant cette période.

L'introduction de l'imprimerie marque le commencement de la vie moderne dans le monde scientifique aussi bien que politique ; car elle arrive au moment où l'Ecole européenne (née de la scolastique et dont l'histoire a été tracée dans le chapitre VIII) s'assimilait les résultats des Ecoles indienne et arabe (dont nous avons étudié l'histoire et l'influence dans les chapitres IX et X) et des Ecoles grecques (dont nous avons donné l'histoire dans les chapitres de II à V).

Les deux derniers siècles de cette période de notre histoire, qui appartiennent à la Renaissance, furent marqués par une grande activité dans toutes les branches des connaissances. La création d'un nouveau groupe d'universités (comprenant celles d'Ecosse) d'un type un peu moins complexe que celui des universités du moyen-âge, décrites précédemment, témoigne du désir général que l'on avait de s'instruire. La découverte de l'Amérique en 1492, et les discussions qui précédèrent la Réforme, inondèrent l'Europe d'idées nouvelles, qui, avec l'invention de l'imprimerie, furent répandues au loin ; mais les progrès en mathématiques étaient au moins aussi marqués que ceux de la littérature et de la politique.

Pendant la première partie de cette période, l'attention des mathématiciens se concentra principalement sur l'algèbre syncopée et la trigonométrie : l'exposition de ces sujets est discutée dans le premier paragraphe de ce chapitre, mais l'importance relative des mathématiciens de cette période n'est pas très facile à déterminer. Les années qui forment le milieu de la Renaissance se distinguèrent par le développement de l'algèbre syncopée : c'est ce qui fait l'objet du second paragraphe de ce chapitre. La fin du seizième siècle vit la création de la dynamique ; c'est ce qui fait le sujet de la première section du chapitre XIII. Vers la même époque et dans les premières années du dix-septième siècle, la géométrie pure attira particulièrement l'attention ; c'est ce qui forme le sujet de la seconde section du chapitre XIII.

DÉVELOPPEMENT DE L'ALGÈBRE SYNCOPÉE ET DE LA TRIGONOMÉTRIE

Regiomontanus (1). — Parmi les nombreux écrivains distingués de ce temps, Jean Regiomontanus est le plus ancien et l'un des plus habiles. Il naquit à Kœnigsberg le 6 juin 1436, et mourut à Rome le 6 juillet 1476. Son vrai nom était *Jean Müller*, mais, suivant la coutume du temps, il faisait paraître ses publications sous un pseudonyme latin tiré de son lieu de naissance. Pour ses amis, ses voisins et tous ceux qui ont eu relations avec lui il peut avoir été Jean Müller, mais le monde scientifique et littéraire ne le connaissait que sous le nom de Regiomontanus, de même qu'il ne connaissait Zepernik que sous le nom de Copernic, et Schwarzerd, sous celui de Melanchton. Ce serait montrer du pédantisme, ou vouloir provoquer une certaine confusion, que de citer un auteur par son nom véritable, lorsqu'il est universellement désigné par un autre ; c'est pourquoi dans tous les cas et autant que possible nous emploierons seulement le nom, latinisé ou non, sous lequel un écrivain est généralement connu.

Regiomontanus étudia les mathématiques, sous la direction de Purbach, à l'université de Vienne, alors l'un des principaux centres d'études mathématiques de l'Europe. Son premier ouvrage, en collaboration avec Purbach, est une analyse de l'*Almageste*. Il fait usage des fonctions trigonométriques *sinus* et *cosinus* et donne une table des sinus naturels. Purbach mourut avant que le livre fût terminé et celui-ci ne fut publié à Venise qu'en 1496. Après ce premier ouvrage, Regiomontanus en écrivit un autre sur l'astrologie ; il fut publié en 1490 avec quelques tables astronomiques et une table des tangentes naturelles.

(1) Sa vie fut écrite par P. Gassendi. La Haye, seconde édition 1655. Ses lettres qui renferment beaucoup d'informations curieuses sur les mathématiques de son temps, furent réunies et publiées par C. G. Von Murr. Nuremberg, 1786. On trouvera une étude sur ses œuvres dans *Regiomontanus, ein geistiger Vorläufer des Copernicus*. par A. Ziegler. Dresde, 1874 ; voir aussi Cantor, chap. LV.

Regiomontanus quitta Vienne en 1462 et voyagea pendant quelques années en Italie et en Allemagne. En 1471 il se fixa à Nuremberg, où il créa un observatoire, ouvrit une imprimerie et probablement se livra à l'enseignement. C'est là qu'il écrivit trois traités sur l'astronomie et qu'il construisit un aigle mécanique qui battait des ailes et salua l'empereur Maximilien I[er] à son entrée dans la ville : cette œuvre, qui montre son habileté en mécanique, était regardée comme une des merveilles de l'époque. De Nuremberg, Regiomontanus se rendit à Rome sur une invitation du pape Sixte IV, qui voulait le charger de la réforme du calendrier. Il y fut assassiné peu de temps après son arrivée.

Regiomontanus fut un des premiers à tirer parti de la découverte des textes originaux des mathématiciens grecs, pour se familiariser avec leurs méthodes de raisonnement et s'assimiler leurs découvertes ; il rapporte avoir vu au Vatican une copie de l'algèbre de Diophante et c'est là la plus ancienne mention de cet ouvrage, qui ait été faite dans l'Europe moderne. Il connaissait également très bien les œuvres des mathématiciens arabes.

On peut se rendre compte du bénéfice qu'il a retiré de son étude des géomètres anciens d'après son traité *De Triangulis* écrit en 1464. C'est la plus ancienne exposition moderne systématique de la trigonométrie plane et sphérique, bien que les seules fonctions trigonométriques qu'on y trouve soient le sinus et le cosinus. L'ouvrage est divisé en cinq livres. Les quatre premiers sont consacrés à la trigonométrie plane, et en particulier à la détermination de triangles dépendant de trois conditions données. Le cinquième traite de la trigonométrie sphérique. L'ouvrage fut imprimé en 1533 à Nuremberg, près d'un siècle après la mort de Regiomontanus.

Comme exemple des problèmes de l'époque, nous reproduisons en entier une de ses propositions. Il s'agit de déterminer un triangle dans lequel on connaît la différence de deux côtés, la perpendiculaire abaissée du sommet commun à ces deux côtés sur la base, et la différence des deux segments déterminés sur la base par le pied de cette perpendiculaire (prop. 23. Livre II).

Voici la solution donnée par Regiomontanus :

Sit talis triangulus ABG, cujus duo latera AB et AG differentia habeant nota HG, ductaque perpendiculari AD duorum casuum BD et DG, differentia sit EG : hæ duæ differentiæ sint datæ, et ipsa perpen-

dicularis AD data. Dico quod omnia latera trianguli nota concludentur. Per artem rei et census hoc problema absolvemus. Detur ergo differentia laterum ut 3, differentia casuum 12, et perpendicularis 10. Pono pro basi unam rem, et pro aggregato laterum 4 res, nec proportio basis ad congeriem laterum est ut HG ad GE, scilicet unius ad 4. Erit ergo BD $\frac{1}{2}$ rei minus 6, sed AB erit 2 res demptis $\frac{3}{2}$. Duco AB in se, producuntur 4 census et $2\frac{1}{4}$ demptis 6 rebus. Item BD in se facit $\frac{1}{4}$ census et 36 minus 6 rebus : huic addo quadratum de 10 qui est 100. Colliguntur $\frac{1}{4}$ census et 136 minus 6 rebus æquales videlicet 4 censibus et $2\frac{2}{4}$ demptis 6 rebus. Restaurando itaque defectus et auferendo utrobique æqualia, quemadmodum ars ipsa prœcipit, habemus census aliquot æquales numero, unde cognitio rei patebit, et inde tria latera trianguli more suo innotescet :

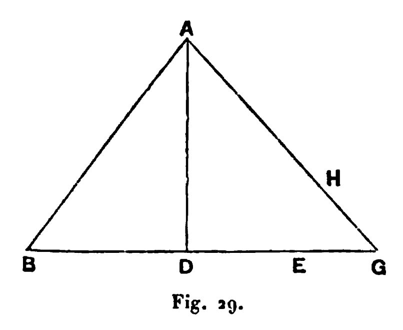


Fig. 29.

Pour expliquer ce texte nous devons dire que Regiomontanus appelle toujours la quantité inconnue *res*, et son carré *census* ou *zensus* ; mais en employant ces termes techniques il écrit les mots en entier. Il commence par dire qu'il va résoudre le problème au moyen d'une équation du second degré (per artem rei et census) ; et qu'il supposera que la différence des côtés du triangle est égale à 3, que la différence des segments de la base est égale à 12, et enfin que la hauteur du triangle est égale à 10. Il prend alors pour inconnue (unam rem ou x) la base du triangle, et par conséquent la somme des côtés sera $4x$.

La longueur BD sera alors égale à $\frac{1}{2}x - 6$ $\left(\frac{1}{2}\text{ rei minus } 6\right)$, et la longueur AB sera égale à $2x - \frac{3}{2}$ $\left(2\text{ res demptis }\frac{3}{2}\right)$; par suite

$\overline{AB}^2$ (AB in se) aura pour expression $4x^2 + 2\frac{1}{4} - 6x$ (4 census et $2\frac{1}{4}$ demptis 6 rebus), et BD^2 vaudra $\frac{1}{4}x^2 + 36 - 6x$.

A $\overline{BD}^2$ il ajoute $\overline{AD}^2$ (quadratum de 10) qui est 100, et fait remarquer que la somme est égale à $\overline{AB}^2$. Cette égalité lui donnera, dit-il, la valeur de x^2 (census), d'où on peut déduire x (cognitio rei) et le triangle est ainsi déterminé.

Ce raisonnement se traduit comme il suit en langage algébrique moderne :

Nous avons

$$\overline{AG}^2 - \overline{DG}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{DB}^2,$$

d'où

$$\overline{AG}^2 - \overline{AB}^2 = \overline{DG}^2 - \overline{DB}^2.$$

Mais d'après les conditions numériques données

$$AG - AB = 3 = \frac{1}{4}(DG - DB),$$

par suite

$$AG + AB = 4(DG + DB) = 4x;$$

donc

$$AB = 2x - \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad BD = \frac{1}{2}x - 6,$$

$$\left(2x - \frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}x - 6\right)^2 + 100,$$

équation nous donnant x. Tous les éléments du triangle peuvent ensuite être calculés.

Il est bon de faire remarquer que Regiomontanus visait simplement à donner un raisonnement général et les nombres ne sont pas choisis avec l'intention de traiter un problème particulier. Ainsi dans sa figure il ne cherche nullement à prendre la longueur GE égale à quatre fois GH, et comme il trouve en définitive x égal à $\frac{1}{3}\sqrt{321}$, le point D tombe en réalité sur le prolongement de la base. Les lettres A, B, G employées pour dénoter le triangle, sont, bien entendu, dérivées de celles de l'alphabet grec qu'il employait.

Quelques unes de ses solutions sont compliquées sans nécessité,

mais il ne faut pas oublier qu'à cette époque l'algèbre et la trigonométrie n'étaient pas symboliques, et qu'il est très difficile d'exprimer à chaque instant, en langage ordinaire, ce qu'une formule contient.

On remarquera aussi, d'après l'exemple qui précède, que Regiomontanus n'hésitait pas à appliquer l'algèbre à la solution des problèmes de géométrie. On en trouve un autre exemple dans la discussion qu'il donne d'une question prise dans le *Siddhanta* de Brahmagupta : le problème consistait à construire un quadrilatère inscrit dans un cercle connaissant les longueurs de ses côtés. Dans sa solution (1) Regiomontanus fait intervenir l'algèbre et la trigonométrie.

Jusqu'à une époque récente l'*Algorithmus Demonstratus* de Jordanus, dont il a été parlé plus haut, et qui fût imprimé en 1534, avait été attribué à Regiomontanus. Ce dernier connaissait cet ouvrage qui est relatif à l'algèbre et à l'arithmétique, et il se peut que le texte qui nous est parvenu contienne quelques additions qui lui sont dues.

Regiomontanus était un des plus éminents mathématiciens de son époque et nous avons insisté avec quelques détails sur ses ouvrages qui doivent être considérés comme types des productions mathématiques les plus avancées du temps. Quant à ses contemporains nous nous bornerons presque à mentionner les noms des plus connus ; tous ne tiennent qu'un rang secondaire et nous ne pourrions nous arrêter plus longtemps sur chacun d'eux sans sacrifier certaines parties plus intéressantes de notre sujet.

Purbach (2). — Nous pouvons commencer par citer *George Purbach* d'abord le maître, puis l'ami de Regiomontanus. Né près de Lintz le 30 mai 1423, et mort à Vienne le 8 avril 1461, il écrivit un ouvrage sur les mouvements des planètes, publié en 1460 ; une arithmétique publiée en 1511 ; une table des éclipses publiée en 1514 ; et une table des sinus naturels publiée en 1541.

Cusa (3). — Nous pouvons mentionner ensuite *Nicolas von Cusa*

(1) Elle a été publiée par C. G. Von Murr a Nuremberg, en 1786.
(2) Sa vie a été écrite par P. Gassendi, La Haye, seconde édition 1655.
(3) Sa vie a été écrite par F. A. Scharpff. Tübingen, 1871 ; et ses œuvres réunies éditées par H. Petri, furent publiées à Bâle, en 1565.

qui naquit en 1401 et mourut en 1464. Bien que fils d'un pauvre pêcheur et sans relations, il s'éleva rapidement dans l'Eglise et devint cardinal, encore qu'il ait été « un réformateur avant la réforme ». Ses écrits mathématiques sont relatifs à la réforme du calendrier et à la quadrature du cercle : dans cette dernière question sa construction revient à prendre $\frac{3}{4}(\sqrt{3}+\sqrt{6})$ pour la valeur de π. Il combattit en faveur de la rotation diurne de la terre.

Chuquet. — Citons également ici un traité sur l'arithmétique, intitulé *Le Triparty* (¹) écrit en 1484 par *Nicolas Chuquet*, un bachelier en médecine de l'Université de Paris. Cet ouvrage montre que le programme des mathématiques enseignées à cette époque était un peu plus développé qu'on le croyait généralement il y a quelques années. On y trouve l'usage le plus ancien du signe radical avec indices pour indiquer l'extraction de racines, l'indice 2 pour la racine carrée, l'indice 3 pour la racine cubique, et ainsi de suite, il contient également une exposition nette de la règle des signes. Les mots plus et moins sont indiqués par les contractions $\bar{p}$, $\bar{m}$. L'ouvrage est écrit en français.

Introduction (²) des signes + et —. — En Angleterre et en Allemagne les algoristes étaient moins liés par les précédents et par la tradition qu'en Italie, et ils introduisirent dans la notation quelques perfectionnements, qui vraisemblablement auraient été difficilement imaginés par un Italien. Parmi ces modifications, la plus importante fut l'introduction, sinon l'invention, des symboles encore en usage de nos jours, pour l'addition, la soustraction et l'égalité.

Les plus anciens exemples de l'emploi régulier des signes + et —, dont nous ayons connaissance, remontent au quinzième siècle. *Jean Widman* d'Eger né vers 1460, inscrit à Leipzig en 1480, et

(¹) Voir un article, par A. Marre, dans le *Balletino di bibliografia*, de Boncompagni, pour 1880, vol. XIII, pp. 555-659.

(²) Voir les articles par P. Treutlein (*Die Deutsche Coss*) dans le *Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik*, pour 1879; par de Morgan, dans les *Cambridge Philosophical Transactions*, 1871, vol. XI, pp. 203-212 ; et par Boncompagni, dans le *Bulletino di bibliografiia*, pour 1876, vol. IX, pp. 188-210.

de médecin, écrivit une *arith-*
zig en 1489 (et imitée d'un
sept ans auparavant) : dans
simplement comme marques
du mot correspondant surplus
et s'est encore conservé dans

présentent généralement que
merce : c'est pourquoi on a
marques de magasin, d'entre-
vendues dans des sortes de
ne fois remplies, devaient peser
ntners (2) ; si l'une de ces
exemple il manquait à son poids
Widman la désignait comme
elle dépassait le poids normal
pesant $4c + 5$ *lbs.*
me s'ils étaient familiers à ses
de penser que ces marques
es lorsqu'elles arrivaient dans
là que le cas où la caisse pesait
celui qui se présentait le plus
placé entre deux nombres était
une certaine relation entre eux,
qui se produisait le plus fré-
rticale était originairement une
ne — pour établir une distinc-
t se présenter.

ale dans le symbole indiquant
n peu plus courte que la ligne
arque chez Stifel et chez tous
nt le symbole : quelques presses
sous leurs formes les plus an-
eptième siècle. Xylander d'un
erticale plus longue que la ligne
peu près la forme +.

et 1, Maccab. X, verset 41.
rammes.

Une autre hypothèse est que le symbole usité pour *plus* est dérivé de l'abréviation latine & employée pour *et*; tandis que celui pour *moins* provient du trait, qui est souvent employé dans les anciens manuscrits pour indiquer une omission ou qui se place sur un mot écrit en abrégé pour indiquer que certaines lettres ont été laissées de côté. Cette explication a été souvent présentée *à priori*, mais elle a trouvé récemment de puissants défenseurs dans les professeurs Zangmeister et Le Paige, qui admettent aussi que l'introduction de ces symboles pour *plus* et *moins* peut remonter au quatorzième siècle.

Les explications de l'origine de nos symboles pour *plus* et *moins*, que nous venons de donner, sont les plus plausibles de toutes celles mises en avant jusqu'ici, mais la question est difficile et on ne peut pas la considérer comme résolue. D'après une autre hypothèse le signe + est une contraction de 𝔭 la lettre initiale de *plus*, en vieil allemand, tandis que — est la forme limite de *m* (pour moins) quand on l'écrit rapidement. De Morgan [1] de son côté a proposé une autre origine : les Hindous indiquaient parfois la soustraction par un point, et ce point peut avoir, pense-t-il, été allongé comme un trait de façon à donner le signe pour *moins*; tandis que l'origine du signe pour *plus* dérive du premier auquel on a superposé comme il est expliqué ci-dessus, une barre verticale; mais il nous est revenu que récemment il avait abandonné cette théorie, pour ce qui a été appelé « l'explication du magasin. »

Nous pourrions peut-être ajouter ici que jusqu'à la fin du seizième siècle le signe + reliant deux quantités telles que *a* et *b* était également employé dans ce sens, que si *a* était pris comme réponse à une certaine question, l'une des quantités données se trouvait trop petite de *b*. C'était là une relation se présentant constamment dans les solutions des questions par la règle de fausse supposition.

Enfin nous répèterons encore que ces signes dans Widman sont seulement des abréviations et non des symboles d'opération, il les considérait comme ayant peu ou pas d'importance et sans nul doute aurait été bien surpris si on lui avait dit que par leur introduction il préparait une révolution dans les procédés de l'Algèbre.

(1) Voir ses *Arithmetical, Books* Londres, 1847, p. 19.

L'*Algorithmus* de Jordanus ne fut pas publié avant 1534, l'ouvrage de Widman était peu connu hors de l'Allemagne, et c'est à Pacioli qu'il faut attribuer l'introduction de l'usage général de l'algèbre syncopée, c'est-à-dire l'emploi d'abréviations pour certaines quantités algébriques se présentant le plus souvent ou pour certaines opérations, mais en observant néanmoins les règles de la syntaxe.

Pacioli (1). — *Lucas Pacioli,* quelquefois connu sous le nom de *Lucas de Burgo* et parfois, mais plus rarement, sous celui de *Lucas Paciolus,* naquit à Burgo en Toscane vers le milieu du quinzième siècle. Nous connaissons peu de choses sur sa vie, si ce n'est qu'il fut moine franciscain, qu'il enseigna les mathématiques à Rome, Pise, Venise et Milan; et que dans cette dernière cité il occupa le premier une chaire de mathématiques fondée par Sforza; il mourut à Florence vers l'an 1510.

Son principal ouvrage fut imprimé à Venise en 1494 et est intitulé *Summa de arithmetica, geometria, proporzioni e proporzionalita.* Il comprend deux parties, la première ayant trait à l'arithmétique et à l'algèbre, la seconde à la géométrie. C'est le plus ancien livre d'arithmétique et d'algèbre qui ait été imprimé. Il est basé principalement sur les écrits de Leonard de Pise, et son importance dans l'histoire des mathématiques est en grande partie due à ce fait, qu'il fut beaucoup répandu.

En arithmétique Pacioli donne des règles pour les quatre opérations élémentaires et une méthode pour l'extraction des racines carrées. Il traite fort bien toutes les questions relatives à l'arithmétique commerciale en donnant de nombreux exemples, et en particulier s'occupe avec beaucoup de détails des lettres de change et de la théorie de la tenue des livres en partie double. Cette partie constitue la première exposition systématique d'une arithmétique algorithmique et nous y avons déjà fait allusion dans le chapitre XI. Cet ouvrage et l'ouvrage semblable de Tartaglia constituent les deux autorités classiques sur le sujet. La plupart des problèmes sont résolus par la méthode de fausse supposition, mais on y rencontre plusieurs erreurs numériques.

(1) Voir H. Staigmüller, dans le *Zeitschrift für Mathematik*, 1889, vol. XXXIV; également Libri, vol. III, pp. 133-145; et Cantor, chap. LVII.

L'exemple suivant nous donnera une idée du genre de problèmes d'arithmétique discutés.

J'achète pour 1440 ducats à Venise 2400 pains de sucre, dont le poids net est 7200 livres; je paye pour le salaire de l'agent 2 %; aux peseurs et aux chargeurs en tout 2 ducats; après cela je dépense en achat de caisses, cordes, toile et pour le salaire des emballeurs une somme de 8 ducats; pour la taxe ou droit d'octroi sur le premier montant de mon achat, 1 ducat pour cent; après cela pour droit et taxe au bureau des exportations, 3 ducats pour cent; pour inscription des adresses sur les caisses et enregistrements de leur passage 1 ducat; pour le trois-mâts barque jusqu'à Rimini, 13 ducats; en cadeaux au capitaine et en pourboire pour l'équipage en différentes occasions, 2 ducats; en achat de provisions pour moi et un domestique durant un mois 6 ducats; en dépenses occasionnées par plusieurs petits voyages par voie de terre faits çà et là, pour les barbiers, le lavage du linge, et en bottes pour moi et mon domestique, 1 ducat; à mon arrivée à Rimini je paye au capitaine du port pour droit de port en monnaie de la cité, 3 lires; aux porteurs, pour le débarquement sur terre, et le transport en magasin, 5 lires; comme taxe d'entrée 4 soldi la charge, qui est représentée en nombre par 32 (suivant la coutume); pour un baraquement à la foire 4 soldi par charge; plus tard je trouve que les mesures employées à la foire diffèrent de celles usitées à Venise, et qu'un poids de 140 lires là est équivalent au poids de 100 lires à Venise; de plus 4 lires de leur monnaie d'argent équivalent à 1 ducat or. Je demande par suite combien il me faut vendre cent lires Rimini afin de réaliser un gain de 10 % sur mon marché, et qu'elle est la somme que je recevrai en monnaie vénitienne?

En algèbre il discute avec quelques détails les équations simples et du second degré, et des problèmes sur les nombres conduisant à des équations de cette nature. Il fait mention de la classification arabe des équations cubiques, mais en ajoutant que la solution qu'ils en donnent semble être aussi impossible que celle de la quadrature du cercle. La règle suivante est celle qu'il donne (1) pour résoudre une équation du second degré de la forme $x^2 + x = a$ elle est exprimée en langage ordinaire et non syncopée, elle servira donc d'exemple pour montrer l'inconvénient de la méthode :

« Si res et census numero coæquantur, a rebus
dimidio sumpto censum producere debes,
addereque numero, cujus a radice totiens
tolle semis rerum, census latusque redibit. »

(1) Edition de 1494, p. 145.

Il se borne à signaler les racines positives des équations.

Bien que beaucoup des matières dont nous venons de parler soient empruntées au *Liber Abaci* de Leonard, cependant la notation dont il se sert est supérieure à celle de ce dernier. Pacioli imite Leonard et les Arabes en appelant la quantité inconnue la *chose*, en italien *cosa* — ce qui fait que l'algèbre a été quelquefois appelée l'art de la chose — ou en latin *res*, et il la dénote quelquefois par *co* ou R ou R*j*. Il appelle le carré de la quantité inconnue *census* ou *zensus* et le désigne parfois par *ce* ou Z ; de même le cube de la quantité inconnue ou *cuba*, est représenté par *cu* ou C ; la quatrième puissance, ou *censo di censo* s'écrit tout au long comme nous venons de le faire ou *ce di ce* ou encore *ce ce*. Il est à noter que toutes ses équations sont numériques, c'est-à-dire qu'il n'eut pas l'idée de représenter les quantités connues par des lettres comme l'avait fait Jordanus et comme cela se pratique en algèbre moderne; mais Libri cite deux exemples, dans lesquelles il représente dans une proportion un nombre par une lettre. Il indique l'addition et l'égalité par les lettres initiales des mots *plus* et *æqualis*, mais il évite généralement l'introduction d'un symbole pour *moins* en écrivant ses quantités dans le membre de l'équation où elles seront prises positivement, bien que dans quelques endroits il emploie $\bar{m}$ pour *moins* ou *de* pour *demptus*.

C'est là un commencement d'algèbre syncopée.

On ne trouve rien de frappant dans les résultats auxquels il arrive dans la seconde partie de son ouvrage, c'est-à-dire la partie géométrique, pas plus que dans deux autres traités de géométrie, qu'il écrivit et qui furent imprimés à Venise en 1508 et 1509. Il faut remarquer cependant que, de même que Regiomontanus, il fit intervenir l'algèbre pour s'aider dans la recherche des propriétés géométriques des figures.

Le problème suivant donnera un exemple du genre de questions géométriques qu'il traitait.

Sachant que le rayon du cercle inscrit dans un triangle vaut 4 centimètres et que les segments déterminés sur l'un des côtés par le point de contact correspondant ont respectivement pour longueurs 6 centimètres et 8 centimètres, calculer les autres côtés.

Pour résoudre la question il suffit de remarquer que

$$rp = S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

ce qui donne

$$4p = \sqrt{p\,(p - 14) \times 6 \times 8}$$

d'où $p = 21$; par conséquent les côtés cherchés sont 21 — 6 et 21 — 8, c'est-à-dire 15 et 13.

Mais Pacioli ne fait pas usage de cette formule (qu'il connaissait) ; il donne une laborieuse construction géométrique, puis fait intervenir l'algèbre pour trouver les longueurs des divers segments des lignes dont il a besoin. Son exposé nous paraît trop long pour être reproduit ici, mais l'analyse suivante est suffisamment complète pour permettre de le reconstituer.

Soit ABC le triangle et D, E, F les points de contact des côtés avec le cercle inscrit de centre O. Soient H le point d'intersection de OB et DF, K le point d'intersection de OC et DE. Désignons par L et M les pieds des perpendiculaires abaissées de E et F sur BC. Traçons EP parallèle à AB et coupant BC en P. Alors Pacioli détermine successivement les grandeurs des lignes suivantes : 1°, OB ; 2°, OC ; 3°, FD ; 4°, FH ; 5° ED ; 6°, EK. Puis il forme une équation du second degré dont les racines lui fournissent les valeurs de MB et MD. Il obtient d'une façon semblable les valeurs de LC et LD. Il calcule ensuite successivement les valeurs de EL, FM, EP et LP et par les triangles semblables obtient la valeur de AB qui est égale à 13.

Cette démonstration fut, même soixante ans plus tard, citée par Cardan comme « incomparablement simple et parfaite, et la vraie couronne des mathématiques ».

Nous en avons fait mention pour donner un exemple des méthodes embarrassées et peu élégantes alors courantes. Les problèmes énoncés sont tout à fait semblables à ceux du *De Triangulis* de Regiomontanus.

Leonard de Vinci. — La réputation de *Leonard de Vinci* comme artiste a éclipsé ses titres à la renommée comme mathématicien, mais on peut dire qu'il a préparé la voie à une conception plus juste de la mécanique et de la physique, et par sa réputation et son influence, il attira un peu l'attention sur ce sujet ; il fut un ami intime de Pacioli. Leonard était le fils naturel d'un jurisconsulte de Vinci en Toscane, il naquit en 1452, et mourut en France en 1519

[illegible] Ier. Plusieurs de ses manuscrits [illegible] évolutionnaires françaises à la fin [illegible] turi, à la requête de l'Institut, fit [illegible] ui traitaient des sujets de physique [illegible]

[illegible] ses et importantes œuvres artis- [illegible] hématiques se rapportent princi- [illegible] draulique et à l'optique ; ses con- [illegible] s sur des expériences. L'exposition [illegible] de l'optique contient fort peu de [illegible] nferme de nombreuses et de sé- [illegible] ieux traitées sont celles relatives à [illegible] action de forces quelconques, aux [illegible] un corps suivant la position de son [illegible] des poutres, et à l'orbite décrite [illegible] force centrale ; il traita également [illegible] oyen des moments virtuels. On lui [illegible] du triangle des forces, mais il est [illegible] question n'étaient pas très nettes. [illegible] que son œuvre mathématique est [illegible] en idées émises sans discussion [illegible] érifier, ou, dans tous les cas, qu'il [illegible]

[illegible] fut un autre artiste de la même [illegible] mathématicien. Il naquit à Nurem- [illegible] le 6 avril 1528. Son principal [illegible] lié en 1525 et contient une étude [illegible] géométrie, et quelques solutions [illegible] raductions latines en 1532, 1555 [illegible]

[illegible] a vie de *Nicolas Copernic*, né à [illegible] à Frauenbergen le 7 mai 1543 et [illegible] ment de la terre et des planètes

[illegible] *thématiques*, de Léonard de Vinci, par [illegible]

[illegible] H. Staigmüller. Stuttgart, 1891.

autour du soleil appartient à l'astronomie plutôt qu'aux mathématiques. Cependant nous pouvons ajouter que Copernic écrivit sur la trigonométrie ; les résultats de ses recherches ont été publiés à Wittenberg en 1542, sous forme d'un livre classique ; ils sont clairement exposés, mais ils ne renferment rien de neuf. Il est évident d'après cette publication et d'après son astronomie qu'il était bien au courant de la littérature mathématique, et qu'il en avait la parfaite intelligence. Nous avons mentionné son hypothèse sur le mouvement de la terre comme une simple conjecture de sa part : il l'a en effet émise pour expliquer, d'une façon simple, les phénomènes naturels. Galilée en 1632 fut le premier qui essaya de donner un commencement de preuve à l'appui de cette hypothèse.

Recorde. — Le signe employé actuellement pour indiquer l'égalité fut introduit par *Robert Recorde* (1). Recorde naquit à Tenby dans le Pembrokeshire vers 1510 et mourut à Londres en 1558. Il entra à Oxford et en 1531 devint membre agrégé du Collège d'All Souls ; de là il se rendit à Cambridge, où il prit un grade en médecine en 1545. Il retourna alors à Oxford, où il professa, mais finalement il s'établit à Londres et devint médecin d'Edouard VI et de Marie Tudor. Sa fortune fut courte, car au moment de sa mort il était enfermé pour dettes dans la prison du Banc de la Reine.

En 1540 il publia une arithmétique, intitulée le *Grounde of Artes* (le Jardin des Arts), dans laquelle il emploie le signe + pour indiquer l'excès et le signe — pour indiquer le déficit ; « + *whyche betokeneth too much, as this line — plaine without a crosse line, betokeneth too little* (2). » Dans ce livre l'égalité de deux rapports est indiquée par deux lignes égales et parallèles dont deux extrémités opposées sont réunies diagonalement, c'est-à-dire par **Z**. Quelques années plus tard, en 1557, il écrivit une algèbre à laquelle il donna le titre de *Whetstone of Witte*. Cet ouvrage est intéressant par ce qu'il contient le plus ancien exemple du signe = pour indiquer l'égalité et il dit qu'il a choisi ce symbole particulier pour cette raison que « *noe 2 thynges can be moare equalle* » (3)

(1) Voir notre *History of the Study of Mathematics at Cambridge*, pp. 15-19. Cambridge, 1889.

(2) + qui indique trop, comme cette ligne — tracée sans un trait transversal indique trop peu.

(3) Deux choses ne peuvent pas être plus égales.

que deux lignes parallèles. M. Charles Henry a cependant signalé que dans les manuscrits du moyen-âge ce signe est une abréviation reconnue pour le mot *est* ; et cela semblerait indiquer une origine plus probable. Dans cet ouvrage Recorde montre comment on peut extraire la racine carrée d'une expression algébrique.

Il écrivit aussi une astronomie. Ces ouvrages donnent une idée nette des connaissances du temps.

Rudolff. Riese. — Vers la même époque en Allemagne, Rudolff et Riese reprirent la question de l'arithmétique et de l'algèbre. Leurs recherches servirent de base à l'ouvrage bien connu de Stifel. *Christophe Rudolff* [1] publia son algèbre en 1525 ; elle est intitulée *Die Coss*, et s'appuie sur les écrits de Pacioli et peut-être de Jordanus. Rudolff introduisit le signe √ pour indiquer la racine carrée, ce symbole étant une corruption de la lettre initiale du mot *radix* (racine), de même √√√ indiquait la racine cubique, et √√ la racine quatrième. *Adam Riese* [2] naquit près de Bamberg (Bavière) en 1489, de parents pauvres ; après avoir travaillé quelques années comme mineur, il put se livrer à l'étude des sciences, et mourut à Annaberg le 30 mars 1559. Il écrivit un traité de géométrie pratique, mais son ouvrage le plus important est une arithmétique bien connue (qui est en même temps une algèbre), publiée en 1536 et basée sur le livre de Pacioli. Riese employait les symboles + et —.

Stifel [3]. — Les méthodes usitées par Rudolff et Riese et leurs découvertes furent rassemblées et exposées d'une façon générale dans un ouvrage de Stifel qui se répandit au loin.

Michel Stifel, connu quelquefois sous le nom latin de *Stiffelius*, naquit à Esslingen en 1486 et mourut à Iéna le 19 avril 1567. Il fut tout d'abord moine augustin, mais il accepta les doctrines de Luther, dont il était un ami personnel. Il nous raconte dans son algèbre que ce qui détermina finalement sa conversion fut la re-

[1] Voir E. WAPPLER, *Geschichte der deutschen Algebra im XV Jahrhunderte*. ZWICKAU, 1887.

[2] Voir deux ouvrages, par B. BERLET, *Ueber Adam Riese*, Annaberg, 1855 ; et *Die Coss von Adam Riese*. Annaberg, 1860.

[3] Les références sur STIFEL sont données par CANTOR, chap. LXII.

marque que le pape Léon X était la bête mentionnée dans la Révélation. Pour le montrer, il était seulement nécessaire d'additionner les nombres représentés par les lettres du nom Leo decimus (la lettre *m* devait être écartée attendu qu'elle est clairement là pour *mysterium*) et il s'en faut exactement de dix que le résultat soit 666, ce qui prouverait péremptoirement qu'il s'agissait de Léon X. Luther accepta sa conversion, mais il lui dit franchement que ce qu'il avait de mieux à faire était de chasser de son esprit toutes les absurdités qui y germaient relativement au nombre de la bête.

Malheureusement pour lui, Stifel ne suivit pas ce sage conseil. Pensant avoir découvert la vraie manière d'interpréter les prophéties de la Bible, il annonça que la fin du monde surviendrait le troisième jour d'octobre de l'année 1533. Les paysans d'Holzdorf, village dont il était pasteur, confiants dans sa réputation scientifique, le crurent. Quelques uns s'adonnèrent à des exercices religieux, d'autres gaspillèrent leurs biens, mais tous abandonnèrent le travail. Le jour annoncé une fois passé, beaucoup de paysans se trouvèrent ruinés : furieux d'avoir été trompés ils se saisirent de l'infortuné prophète qui fut trop heureux de trouver un refuge dans la prison de Wittenberg, d'où il put sortir quelque temps après, grâce à l'intervention personnelle de Luther.

Stifel écrivit un petit traité sur l'algèbre, mais son principal ouvrage mathématique est son *Arithmetica Integra* publiée à Nuremberg en 1544, avec une préface de Melanchton.

Dans les deux premiers livres de son *Arithmetica Integra* il traite des radicaux et des incommensurables en adoptant la forme euclidienne. Le troisième livre relatif à l'algèbre, est à remarquer car il a appelé l'attention générale sur la pratique alors adoptée en Allemagne où l'on se servait des signes + et — pour indiquer l'addition et la soustraction. On relève quelques faibles indices montrant que ces signes ont été employés occasionnellement par Stifel comme symboles d'opération et non uniquement comme abréviations ; cette application était probablement nouvelle. Non seulement il employait les abréviations usuelles pour les mots italiens représentant la quantité inconnue et ses puissances ; mais dans un cas au moins, lorsqu'il se trouvait en présence de plusieurs quantités inconnues, il les représentait respectivement par les lettres A, B, C, ... etc. Il réintroduisait ainsi la notation algébrique générale tombée en désuétude

depuis le temps de Jordanus. On a dit que Stifel fut le réel inventeur des logarithmes, mais il est aujourd'hui certain que cette assertion repose sur une fausse interprétation d'un passage dans lequel il compare les progressions géométriques et arithmétiques. On a dit encore que Stifel avait indiqué une formule permettant d'écrire les coefficients des divers termes du développement de $(1 + x)^n$ connaissant ceux du développement de $(1+ x)^{n-1}$.

En 1553 Stifel fit paraître une édition de l'ouvrage de Rudolff, *Die Coss*, dans lequel il introduisait un perfectionnement dans la notation algébrique de l'époque. Les symboles ordinairement employés alors pour désigner la quantité inconnue et ses puissances étaient des lettres qui représentaient les mots abrégés. Parmi les plus usitées se trouvaient R ou R*j* pour *racine* ou *res* (x), Z ou C pour *zensus* ou *census* (x^2). C ou K pour *cubus* (x^3) etc. Ainsi

$$x^2 + 3x - 4$$

s'écrivait ainsi

$$1Zp.\ 5Rm.\ 4;$$

p et *m* signifiant plus et moins. On employait également d'autres lettres et d'autres symboles : ainsi Xylander (1575) aurait écrit la même expression comme il suit :

$$1Q + 5N - 4.$$

Viète et même Fermat ont employé quelquefois une notation semblable à cette dernière. La modification faite par Stifel consistait à introduire les symboles 1 A, 1 AA, 1 AAA, pour la quantité inconnue, son carré et son cube ; on voyait ainsi immédiatement et d'un coup d'œil les liaisons qui existaient entre eux.

Tartaglia. — *Niccolo Fontana* généralement connu sous le nom de *Nicolas Tartaglia*, c'est-à-dire Nicolas le bègue, naquit à Brescia en 1500 et mourut à Venise le 14 décembre 1557. Après la prise de la ville par les Français en 1512, beaucoup d'habitants se réfugièrent dans la cathédrale, où ils furent massacrés par les soldats. Son père, qui était courrier de la poste à Brescia, resta parmi les morts. L'enfant lui-même eut le crâne fendu en trois endroits, la machoire et le palais transpercés. Il fut abandonné parmi les morts, mais sa mère qui avait pu pénétrer dans la cathé-

drale lui ayant trouvé encore un reste de vie, réussit à l'emporter et à le sauver. Privée de toutes ressources, la pauvre femme se rappela que les chiens blessés ont l'habitude de lécher leurs plaies, et c'est à un remède de ce genre que Tartaglia attribue sa guérison ; mais sa blessure du palais amena une gêne dans la parole et c'est de là que lui vint son surnom. Sa mère put se procurer la somme d'argent nécessaire pour lui permettre de rester une quinzaine de jours à l'école et il en profita pour dérober un livre avec lequel il apprit seul à lire et à écrire ; mais il était si pauvre, nous raconte-t-il, qu'il n'avait pas de quoi s'acheter du papier et qu'il utilisait les pierres tombales comme ardoises pour travailler à ses exercices.

Il débuta dans la vie publique en professant à Vérone, mais un peu avant 1535, il fut désigné pour occuper une chaire de mathématiques à Venise. Il y vivait quand il accepta un défi d'un certain *Antoine del Fiore* (ou *Florido*), ce qui contribua à le rendre fameux.

Fiore avait appris de son maître, un nommé *Scipion Ferro* (qui mourut à Bologne en 1526), une solution empirique de l'équation cubique de la forme $x^3 + qx = r$.

Cette solution était antérieurement inconnue en Europe et il est probable qu'elle avait été trouvée par Ferro dans un ouvrage arabe. Tartaglia, en réponse à une requête de Colla en 1530, avait avancé qu'il pouvait effectuer la solution d'une équation numérique de la forme $x^3 + px^2 = r$.

Fiore, pensant que Tartaglia était un imposteur, lui envoya un défi, dont les conditions étaient les suivantes : chacun des compétiteurs devait déposer un certain enjeu entre les mains d'un notaire et celui qui donnerait la solution du plus grand nombre de problèmes, dans une série de trente questions proposées par l'autre, entrerait en possession des enjeux ; un délai de trente jours était d'ailleurs accordé à chacun d'eux pour résoudre les questions. Tartaglia savait que son adversaire connaissait la solution d'une équation cubique d'une certaine forme particulière, et, supposant que les questions qui lui seraient proposées dépendraient toutes de la solution d'équations de ce genre, se proposa le problème d'en trouver une solution générale, et parvint certainement à la solution de quelques unes sinon de toutes. On pense que sa solution repo-

sait sur une construction géométrique [1], et conduisait à la formule qui est souvent, bien qu'à tort, attribuée à Cardan,

Le moment du concours arrivé, toutes les questions proposées à Tartaglia dépendaient, comme il l'avait pensé, de la solution d'une équation cubique, et il parvint dans l'espace de deux heures à les ramener à des cas particuliers de l'équation $x^3 + qx = r$, dont il connaissait la solution. Son compétiteur échoua dans la solution de tous les problèmes qui lui étaient proposés et qui, cela va sans dire, se ramenaient tous à des équations numériques de la forme $x^3 + px^2 = r$. Tartaglia fut par conséquent proclamé le vainqueur et il composa quelques vers en l'honneur de sa victoire.

Les principaux ouvrages de Tartaglia sont les suivants :

1° Sa *Nova Scienza* publiée en 1537 : dans ce livre il étudie la chute des corps sous l'influence de la gravité; et il détermine la portée d'un projectile, en constatant qu'elle est maximum quand l'angle de projection est de 45°, mais ce résultat semble avoir été la conséquence d'une heureuse conjecture.

2° Ses *Inventioni*, ouvrage publié en 1546 et contenant entre autres sa solution des équations cubiques.

3° Son *Trattato de numeri e misuri*, consistant en une arithmétique, publiée en 1556, et en un traité sur les nombres, paru en 1560; il montre dans cet ouvrage comment les coefficients de x dans le développement de $(1 + x)^n$ peuvent se déduire, en faisant usage d'un triangle arithmétique [2], de ceux du développement de $(1 + x)^{n-1}$ pour les cas où l'on fait n successivement égal à 2, 3, 4, 5, ou 6.

Les autres ouvrages furent réunis en une seule édition et publiés de nouveau à Venise en 1606.

Le traité sur l'arithmétique et les nombres est un de ceux qui font principalement autorité pour nous renseigner sur l'ancien algorithme italien. Il est prolixe, mais il nous fait une claire exposition des différentes méthodes arithmétiques alors en usage; il renferme de nombreuses notes historiques qui, autant que nous pouvons les vérifier, sont dignes de confiance, et que nous avons grandement utilisés dans le dernier chapitre. Il contient un nombre considérable de problèmes sur toutes espèces de questions pouvant

(1) Voir plus loin.
(2) Voir plus loin.

se présenter en arithmétique commerciale, et on y trouve plusieurs tentatives pour établir des formules algébriques s'appliquant à des problèmes particuliers.

Ces problèmes donnent incidemment nombre de bonnes informations sur la vie ordinaire et les coutumes commerciales du temps. Nous trouvons ainsi que l'intérêt de l'argent pour les placements offrant toute sécurité variait de 5 à 12 % l'an ; tandis que l'intérêt pour les transactions commerciales était de 20 % l'an et plus. Tartaglia montrait le côté défectueux de la loi défendant l'usure, en expliquant comment elle était tournée dans les questions de fermage. Les fermiers endettés étaient mis par leurs créanciers dans l'obligation de vendre toutes leurs récoltes immédiatement après la moisson ; le marché se trouvant ainsi encombré, les prix de vente étaient très faibles, et les prêteurs d'argent achetaient à marché ouvert à des conditions extrêmement avantageuses. Les fermiers devaient alors emprunter le grain pour les semailles, à la condition de le remplacer par une quantité égale ou d'en payer le prix dans le courant du moi de mai, quand le cours du blé était le plus élevé. De même Tartaglia, à qui les magistats de Vérone avaient demandé d'établir une échelle mobile permettant de fixer le prix du pain d'après le cours du blé, entre dans une discussion sur les principes qu'on appliquait à son époque pour régler cette question. Dans un autre endroit il donne les règles usitées pour la préparation des médicaments.

Pacioli avait donné dans son arithmétique quelques problèmes plaisants, et Tartaglia l'imita en insérant une large collection de récréations mathématiques. Il s'en excuse à moitié en disant qu'il n'était pas rare à la fin du repas de proposer à la compagnie et comme sujet d'amusement des questions d'arithmétique, c'est pourquoi il ajoute quelques problèmes agréables. Il donne plusieurs questions relatives à la manière de deviner un nombre pensé par un membre de la compagnie, sur les liens de parenté créés par les mariages entre parents, ou sur les difficultés provenant de legs contradictoires.

D'autres récréations sont du genre de celles qui suivent : « trois jolies dames ont pour maris des hommes jeunes, agréables et galants, mais jaloux. Voyageant de compagnie, ils trouvent sur les bords d'une rivière qu'il faut traverser un petit bateau ne pou-

[illegible] à la fois. On demande comment
[illegible] du que, pour éviter tout scandale,
[illegible] ns la société d'un homme, à moins
[illegible]

[illegible] passagers 15 Turcs et 15 chrétiens
[illegible] te déclare que le salut du bâti-
[illegible] la moitié des passagers soit préci-
[illegible] oix de ceux qui vont être sacrifiés,
[illegible] rond et il est convenu qu'en com-
[illegible] point déterminé, chaque neuvième
[illegible] rd. De quelle façon doit-on les
[illegible] t seuls désignés par le sort? »
[illegible] ase contenant 24 onces de baume.
[illegible] un bois un marchand auquel ils
[illegible] Arrivés dans un endroit sûr, ils
[illegible] atin, mais ils constatent alors que
[illegible] ivement que 5, 11 et 13 onces.
[illegible] s'y prendre pour faire trois part

[illegible] es-uns sont d'origine orientale —
[illegible] es récréations mathématiques de
[illegible] de Montucla (1).

[illegible] glia fut troublée par une querelle,
[illegible] Cardan ; celui-ci publia la solution

[illegible] d'autres problèmes semblables se trou-
[illegible] *and Problems*, dont une traduction fran-
[illegible] né à Bouligneux, en 1640 et mort en
[illegible] l'un, qui mérite d'être mentionné ici,
[illegible] *ysiques*, 2 volumes, Paris, 1696. JEAN-
[illegible] 5 et mort à Paris en 1799, publia une
[illegible] OZANAM. Son histoire des essais faits
[illegible] 754, et son histoire des mathématiques
[illegible] 2 volumes, 1758, sont des ouvrages in-
[illegible]

[illegible] sa vie dans la *Nouvelle biographie gé-*
[illegible] lui une autobiographie dont une ana-
[illegible] eux volumes, à Londres, en 1854. Tous
[illegible] sont réunis par SPONIUS, et publiés en
[illegible] ur l'arithmétique et la géométrie sont
[illegible] prétend qu'il existe au Vatican plu-
[illegible] ont pas encore été publiés.

d'une équation cubique, qu'il avait obtenue de Tartaglia en promettant de la tenir secrète. *Jérôme Cardan* naquit à Pavie le 24 septembre 1501, et mourut à Rome le 21 septembre 1576. Sa vie n'est que le récit d'une série d'actes inconséquents les plus extraordinaires. Joueur, peut-être meurtrier, il était aussi un fanatique de la science, résolvant des problèmes qui avaient longtemps déjoué toutes les recherches ; à un moment de sa vie il se livrait à des intrigues considérées comme scandaleuses, même au seizième siècle, à un autre moment il s'abandonnait à des divagations astrologiques et à une autre époque enfin il déclarait que la philosophie était le seul sujet digne de fixer l'attention de l'homme. C'était le génie frisant de près la démence.

Cardan était fils naturel d'un jurisconsulte de Milan, et il suivit les cours des universités de Pavie et de Padoue.

Après avoir pris sés grades, il commença par exercer la médecine à Sacco et Milan de 1524 à 1550 ; ce fut pendant ce temps qu'il étudia les mathématiques et publia ses principaux ouvrages. Après avoir passé une année environ en France, en Ecosse et en Angleterre, il retourna à Milan comme professeur de sciences et peu après fut choisi pour occuper une chaire à Pavie. Là, son temps se partageait entre la débauche, l'astrologie et la mécanique. Ses deux fils étaient aussi mauvais et irascibles que lui-même : en 1560, l'aîné fut exécuté pour avoir empoisonné sa femme, et vers la même époque Cardan dans un accès de colère coupa les oreilles du plus jeune qui avait commis quelques méfaits ; cette action répréhensible ne lui attira aucune punition, le pape Grégoire XIII l'ayant pris sous sa protection. En 1562, Cardan se rendit à Bologne, mais son nom rappelait une vie si scandaleuse que les membres de l'Université s'arrangèrent pour l'empêcher de faire des cours, et ne désarmèrent que sous la pression de Rome. En 1570, il fut emprisonné pour hérésie parce qu'il avait publié l'horoscope de Jésus-Christ, et quand il fut relaché, il se vit si généralement détesté qu'il se détermina à abandonner sa chaire. Il quitta Bologne en 1571, et peu après se rendit à Rome. Cardan était l'astrologue le plus renommé de son temps et, lors de son séjour à Rome, il reçut une pension pour les services qu'il rendait comme astrologue à la cour pontificale. Cette dernière profession lui fut fatale, car, ayant annoncé qu'il devait mourir un certain jour,

particulier, il se vit dans l'obligation de se suicider pour maintenir sa réputation intacte.

C'est là, du moins, la légende accréditée.

Le principal ouvrage mathématique de Cardan est l'*Ars Magna*, publié à Nuremberg en 1545. Cardan s'intéressait beaucoup à la lutte engagée entre Tartaglia et Fiore, et, comme il avait déjà commencé à écrire son livre, il demanda à Tartaglia de lui communiquer sa méthode de résolution de l'équation cubique. Tartaglia refusa, sur quoi Cardan l'injuria dans les termes les plus violents, mais peu après il lui écrivit en lui disant qu'un certain noble Italien, ayant entendu parler de sa réputation, était très désireux de faire sa connaissance, et il l'engageait à venir de suite à Milan. Tartaglia s'y rendit, et, bien que n'ayant trouvé aucun gentilhomme qui l'attendît, il céda néanmoins aux instances de Cardan et lui donna la règle tant désirée ; Cardan de son côté prit l'engagement par serment de ne jamais la révéler et même de ne pas la confier au papier excepté en caractères chiffrés. La règle est énoncée en quelques vers irréguliers qui existent encore. Cardan affirme qu'on ne lui communiqua que le résultat, et que la démonstration est de lui, mais le fait est douteux. Il parait avoir aussitôt enseigné la méthode, et l'un de ses élèves, Ferrari, ramena l'équation du quatrième degré à une équation cubique et la résolut ainsi.

Quand l'*Ars Magna* fut publié en 1545, sa mauvaise foi devint manifeste. Tartaglia en éprouva naturellement une profonde irritation, et, après une controverse acrimonieuse, il envoya à Cardan un cartel le provoquant pour une lutte mathématique. Les préliminaires furent arrêtées et le lieu de la réunion devait être une certaine Eglise de Milan, mais le jour fixé arrivé, Cardan fit défaut et envoya Ferrari à sa place. Des deux côtés on se déclara vainqueur, bien que nous pensions que c'est Tartaglia qui réussit le mieux dans les épreuves imposées ; dans tous les cas la dissolution de la réunion fut provoquée par son compétiteur et il dut s'estimer heureux de pouvoir s'enfuir avant d'être assommé. Non seulement la fraude profita à Cardan, mais les écrivains modernes lui ont souvent attribué la solution en question, de telle sorte que Tartaglia n'eut même pas la réparation posthume qui lui était au moins due.

L'*Ars Magna* est un ouvrage bien plus avancé qu'aucune des

algèbres publiées antérieurement. Jusqu'à ce moment les algébristes s'étaient bornés à fixer leur attention sur les racines positives des équations. Cardan discuta les racines négatives et même imaginaires, et prouva que les dernières se présentaient toujours par couple, mais il se refusa à chercher une explication quant à la signification à attribuer à ces quantités « sophistiques » qui, disait-il, étaient ingénieuses bien qu'inutiles. Une grande partie de son analyse des équations cubiques semble être originale ; il montra que si les trois racines sont réelles, la solution de Tartaglia les donne sous une forme qui, contenant des quantités imaginaires, ne permet pas de les calculer. A l'exception de recherches, à peu près semblables à celles que publia Bombelli (1) quelques années plus tard, la théorie des quantités imaginaires attira peu l'attention des mathématiciens postérieurs, jusqu'à ce qu'Euler et Jean Bernoulli eussent repris cette question après un intervalle d'environ deux siècles. Gauss le premier posa les bases méthodiques et scientifiques du sujet, introduisit la notation des variables complexes, et employa le symbole i, qui avait été introduit par Euler, pour dénoter la racine carrée de (— 1) ; la théorie moderne est en grande partie basée sur ses recherches.

Cardan établit les relations entre les coefficients et les racines d'une équation. Il avait également connaissance du principe sur lequel repose « la règle des signes » de Descartes, mais, suivant la coutume alors en usage, il écrivait ses équations comme l'égalité de deux expressions, dans chacune desquelles tous les termes étaient positifs, de sorte qu'il ne lui était pas possible d'exprimer la règle d'une façon conçise. Il donna une méthode pour déterminer une racine approchée d'une équation numérique, basée sur ce fait que, si une fonction change de signe quand on remplace la variable par deux nombres différents, l'équation obtenue en égalant la fonction à zéro aura une racine comprise entre ces deux nombres.

La solution de l'équation du second degré de Cardan est géométrique et en substance la même que celle donnée par Alkarismi. Sa solution d'une équation cubique est également géométrique, et se comprendra d'après l'exemple suivant qu'il donne dans le chap. XI.

(1) Voir plus loin.

Pour résoudre l'équation $x^3 + 6x = 20$ (ou toute autre équation de la forme $x^3 + qx = r$), on prend deux cubes tels que le produit de leurs arêtes soit 2 $\left(\text{ou } \frac{1}{3} q\right)$ et ayant pour différence de leurs volumes 20 (ou r). Alors x sera égal à la différence entre les arêtes des cubes. Pour vérifier cette règle, il pose d'abord ce lemme géométrique : si on enlève d'une ligne AC une certaine portion CB, la différence entre les cubes construits sur AC et BC surpassera le cube construit sur AB de trois fois le parallélépipède droit ayant respectivement pour arêtes AC, BC et AB — cette proposition est équivalente à l'identité algébrique

$$(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab\,(a - b),$$

et le fait que x satisfait à l'équation est alors évident. Pour obtenir les longueurs des arêtes des deux cubes, il n'a qu'à résoudre une équation du second degré et il se sert à cet effet de la solution géométrique précédemment exposée.

De même que les mathématiciens précédents, il donne des démonstrations séparées de sa règle pour les différentes formes que l'équation est susceptible de prendre. Ainsi il établit une formule de résolution différente pour les équations de chacune des formes

$$x^3 + px = q,\ x^3 = px + q,\ x^3 + px + q = 0 \quad \text{et} \quad x^3 + q = px.$$

Peu de temps après Cardan, nombre de mathématiciens surgirent et s'occupèrent de la résolution des équations du 3[e] et 4[e] degré, mais leur importance n'est pas assez grande pour qu'on leur consacre une mention détaillée. Les plus célèbres d'entre eux sont peut être Ferrari et Rheticus.

Ferrari. — *Louis Ferraro*, généralement appelé *Ferrari*, et dont nous avons déjà cité le nom au sujet de la solution de l'équation biquadratique, naquit à Bologne le 2 février 1522 et mourut le 5 octobre 1565. Ses parents étaient pauvres et Cardan le prit à son service comme petit commissionnaire, mais il l'avait autorisé à suivre ses cours et il devint par la suite son élève le plus célèbre. On a fait de lui ce portrait « un petit garçon propre et rose, avec une voix douce, une face joyeuse et un agréable petit nez, aimant le plaisir, d'une grande intelligence » mais « avec les dispositions

d'un démon ». Ses manières, et de nombreux talents lui procurèrent une place au service du cardinal Ferrando Gonzague ; il s'arrangea de façon à y faire fortune. Ses dissipations influèrent sur sa santé, et, en 1565, il se retira à Bologne où il commença à faire des conférences sur les mathématiques. La même année il fut empoisonné, soit par sa sœur qui semble être la seule personne pour laquelle il eut un peu d'affection, soit par l'amant de celle-ci.

Tous les travaux de Ferrari se trouvent dans l'*Ars Magna* de Cardan ou dans l'*algèbre* de Bombelli, mais on ne peut rien lui attribuer d'une façon certaine à l'exception de la solution de l'équation biquadratique. Colla avait proposé comme un défi aux mathématiciens la solution de l'équation

$$x^4 + 6x^2 + 36 = 60x\,;$$

équation particulière, probablement trouvée dans quelque livre arabe. On ne connait rien au sujet de l'histoire de ce problème, si ce n'est que Ferrari réussit là où Tartaglia et Cardan avaient échoué.

Rhéticus. — *George Joachim Rheticus* né à Feldkirchen le 15 février 1514 et mort à Kaschau le 4 décembre 1576, était professeur à Wittenberg. Il étudia dans la suite sous la direction de Copernic, qui lui laissa le soin de publier ses ouvrages. Rhéticus construisit diverses tables trigonométriques, dont quelques unes furent publiées en 1596 par son élève Othon. Elles furent par la suite complétées et étendues par Viete et Pitiscus et servirent ainsi de fondements à celles encore en usage. Rhéticus trouva également les valeurs de sin 2θ et sin 3θ en fonction de sin θ et cos θ et il n'ignorait pas que les rapports trigonométriques peuvent se définir au moyen des rapports des côtés d'un triangle rectangle sans faire intervenir le cercle.

Nous ajoutons ici les noms de quelques autres mathématiciens célèbres qui vivaient à peu près à la même époque, bien que leurs ouvrages aient actuellement peu d'intérêt pour nous en dehors des amateurs d'antiquités.

François Morolico. — En latin *Maurolycus*, né à Messine, en 1494, de parents grecs et mort en 1575, traduisit de nombreux

ouvrages mathématiques latins et grecs et discuta les coniques considérées comme sections d'un cône. Ses œuvres ont été publiées à Venise en 1575.

Jean Borrel. — Né en 1492, et mort à Grenoble, en 1572, écrivit une algèbre basée sur celle de Stifel, et une histoire de la quadrature du cercle : ses ouvrages furent publiés à Lyon en 1559.

Guillaume Xylander. — Né à Augsbourg, le 26 décembre 1532, et mort le 10 février 1576 à Heidelberg où il était professeur depuis 1558 ; fit paraître en 1556 une édition des œuvres de Psellus, en 1562 une édition des *Eléments d'Euclide*, en 1575 une édition de l'*arithmétique* de *Diophante* ; il composa aussi quelques ouvrages de moindre importance qui furent réunis et publiés, en 1577.

Federigo Commandin. — Né en 1509 à Urbin et mort dans la même ville le 3 septembre 1575, publia en 1558 une traduction des œuvres d'Archimède ; en 1566 des extraits d'Apollonius et de Pappus ; en 1572 une édition des *Elements* d'Euclide ; et en 1574 des extraits choisis d'Aristarque, de Ptolémée, d'Héron et de Pappus, qu'il fit suivre de commentaires.

Jacques Peletier. — Né au Mans le 25 juillet 1517 et mort à Paris en juillet 1582, écrivit des livres classiques sur l'algèbre et la géométrie : la plupart des résultats de Stifel et de Cardan se trouvent dans le premier de ses ouvrages.

Adrien Romain. — Né à Louvain le 29 septembre 1561 et mort le 4 mai 1625, professeur de mathématiques et de médecine à l'université de Louvain, fut le premier qui établit la formule usuelle donnant le développement de sin (A + B). — Et enfin,

Barthélemy Pitiscus. — Né le 24 août 1561 et mort à Heidelberg où il était professeur de mathématiques, le 2 juillet 1613, publia en 1599 sa *Trigonométrie* : elle contient les expressions pour sin (A $\pm$ B) et cos (A $\pm$ B), en fonction des rapports trigonométriques des angles A et B.

Vers cette époque également plusieurs livres classiques parurent, qui contribuèrent à la classification méthodique des sujets, s'ils n'en étendirent pas les limites. Nous pouvons mentionner en particulier ceux de Ramus et de Bombelli.

Ramus [1]. — *Pierre Ramus* naquit à Cutti en Picardie en 1515, et fut tué à Paris lors du massacre de la Saint-Barthélemy le 24 août 1572. Il fit ses études à l'Université de Paris et, en prenant son grade de maître-ès-arts, il étonna et charma l'Université par le développement brillant de sa thèse contre Aristote.

Il fit des conférences — car il faut se rappeler que dans les premiers temps il n'y avait pas de professeurs — tout d'abord au Mans puis à Paris; dans cette dernière ville, il créa la première chaire de mathématiques. Outre quelques ouvrages sur la philosophie, il écrivit des traités sur l'arithmétique, l'algèbre, la géométrie (inspirée d'Euclide), l'astronomie (basée sur les travaux de Copernic) et la physique qui furent longtemps regardés sur le Continent comme les meilleurs classiques sur ces sujets. Ils ont été réunis dans une édition de ses œuvres publiées à Bâle en 1569.

Bombelli. — Presque immédiatement après l'apparition du grand ouvrage de Cardan, *Raphaël Bombelli* publia en 1572 une algèbre qui est une exposition méthodique de ce qu'on connaissait alors de cette science. Dans la préface, il trace l'historique de la question et fait allusion à Diophante qui, malgré la notice de Regiomontanus, était encore inconnu en Europe. Il discute les radicaux, réels et imaginaires. Il traite également la théorie des équations et montre que, dans le cas irréductible d'une équation cubique, les racines sont toutes réelles; il fait remarquer que le problème de la trisection d'un angle se ramène à la solution d'une équation cubique. Enfin il donne une collection abondante de problèmes.

L'ouvrage de Bombelli est à noter à cause de l'emploi de symboles qui font pressentir la notation par indices. Marchant sur les traces de Stifel, il introduit les symboles $\underset{\smile}{1}$, $\underset{\smile}{2}$, $\underset{\smile}{3}$..., pour désigner la quantité inconnue, son carré, son cube, et ainsi de suite.

(1) Voir les monographies, par CH. WADDINGTON. Paris, 1855; et par C. DESMAZE. Paris, 1864.

Par conséquent il écrivait $x^2 + 5x - 4$ comme il suit :

$$1\ \underset{\smile}{2}\ p.\ 5\ \underset{\smile}{1}\ m.\ 4$$

En 1586, Stevin employait d'une façon semblable ①, ②, ③..., et avait suggéré, bien qu'il n'en ait pas fait usage, une notation correspondante pour les indices fractionnaires. Il aurait écrit comme il suit l'expression précédente

$$1 ② + 5 ① - 4 ⓪.$$

Mais, que ces symboles fussent plus ou moins avantageux, ils n'étaient encore uniquement que des abréviations pour des mots, et étaient soumis à toutes les règles de la syntaxe. Ils constituaient simplement une sorte de sténographie permettant d'exprimer d'une façon concise les diverses périodes d'une solution et les résultats. Le premier perfectionnement fut la création de l'algèbre symbolique, dont le mérite revient principalement à Viète.

LE DÉVELOPPEMENT DE L'ALGÈBRE SYMBOLIQUE

Nous avons maintenant atteint un point, au-delà duquel il était difficile de faire progresser d'une façon sensible l'algèbre, aussi longtemps qu'elle resterait rigoureusement syncopée. Il est évident que Stifel et Bombelli ainsi que d'autres auteurs du seizième siècle avaient introduit quelques idées relatives à l'algèbre symbolique ou étaient sur le point de le faire. Mais, autant qu'il est possible d'attribuer le mérite de l'invention de l'algèbre symbolique à un seul homme, nous pouvons peut-être l'accorder à Viète, tandis que nous pouvons dire qu'Harriot et Descartes firent plus que n'importe quel écrivain pour en généraliser l'usage. Il est nécessaire de se rappeler cependant que ces innovations ne furent généralement connues qu'après un certain temps et ne devinrent familières aux mathématiciens que quelques années après avoir été publiées.

Viète (1). — *Franciscus Vieta* (*François Viète*) naquit en 1540 à Fontenay-le-Comte près de la Rochelle et mourut à Paris en

(1) Une exposition des œuvres de VIÈTE est donnée dans le vol. II, des *Tracts* de C. HUTTON. Londres, 1812-15.

1603. Ses parents le destinaient à la magistrature et il fut attaché pendant quelque temps au barreau de Paris : il devint ensuite membre du parlement provincial en Bretagne ; et finalement, en 1580, grâce à l'influence du duc de Rohan, il fut nommé maître des requêtes au Parlement de Paris. C'était un convaincu de la doctrine du droit divin des Rois et probablement un catholique zélé. Après 1580, il consacra la plus grande partie de ses loisirs aux mathématiques, bien que son grand ouvrage *In Artem Analyticam Isagoge* dans lequel il expliquait comment l'algèbre pouvait être appliquée à la résolution des problèmes de géométrie, ne fut pas publié avant 1591.

Sa réputation comme mathématicien était déjà considérable, lorsque l'ambassadeur des Provinces-Unies fit remarquer un jour à Henri IV que la France ne possédait aucun géomètre capable de résoudre un problème qui avait été proposé en 1593 par son compatriote Adrien Romain à tous les mathématiciens du monde et qui exigeait la solution d'une équation du 45[me] degré. Le roi fit venir Viète et lui fit part du défi. Viète vit que l'inconnue de l'équation représentait la longueur de la corde d'un cercle (ayant l'unité pour rayon) sous-tendant un angle au centre égal à $\frac{2\pi}{45}$ et, au bout de quelques minutes, il fit remettre au roi deux solutions du problème écrites au crayon. Comme complément d'explication, nous devons ajouter que Viète avait antérieurement découvert comment on pouvait former $\sin n\theta$ au moyen de $\sin \theta$ et $\cos \theta$. Viète à son tour proposa à Romain de construire un cercle tangent à trois cercles donnés. C'était le problème traité par Apollonius dans son *De Tactionibus,* livre perdu que Viète restitua par conjectures un peu plus tard. Romain résolut la question au moyen des sections coniques mais ne put trouver une solution par la géométrie euclidienne. Viète donna une solution euclidienne, qui fit une telle impression sur Romain que celui-ci entreprit le voyage de Fontenay-le-Comte, où se trouvait alors la Cour du roi de France, pour faire la connaissance de Viète, connaissance qui se transforma rapidement en une constante amitié.

Henri IV avait été vivement frappé de la haute sagacité de Viète. Une autre circonstance donna à celui-ci l'occasion de la manifester d'une manière brillante.

[illegible] le époque d'un chiffre, contenant
[illegible] périodiquement changés et qu'il
[illegible] léchiffrer. Une dépêche ayant été
[illegible] en lui demandant d'essayer de
[illegible] re. Viète y parvint, et pendant
[illegible] t avantageusement cette décou-
[illegible] rs engagée. Pilippe II était telle-
[illegible] ne pouvait être découvert, que,
[illegible] étaient connus, il se plaignit au
[illegible] recours à la sorcellerie « con-
[illegible] rétienne. »

[illegible] ges sur l'algèbre et la géométrie.
[illegible] *tem Analyticam Isagoge*, Tours
[illegible] et une collection de problèmes
[illegible] *De Numerosa Potestatum Resolu-*
[illegible] imprimés qu'à un petit nombre
[illegible] rivé, mais ils furent réunis par
[illegible] volume à Leyde en 1646. Viète
[illegible] *Recognitione et Emendatione* qui
[illegible] par Alexandre Anderson.

[illegible] ouvrage sur l'algèbre symbolique.
[illegible] s pour représenter à la fois les
[illegible] nconnues, une notation pour les
[illegible] antage de n'opérer que sur des
[illegible] ge un appendice intitulé *Logistice*
[illegible] addition et de la multiplication
[illegible] lévation d'un binôme à ses di-
[illegible] me. Viète laisse supposer qu'il
[illegible] cients de ces six développements
[illegible] étique, comme Tartaglia l'avait
[illegible] règle générale pour former ces
[illegible] quelconque, et Stifel avait déjà
[illegible] ait former le développement de
[illegible] du développement de $(1 + x)^{n-1}$
[illegible] mier qui donna l'expression gé-
[illegible] le développement de $(1 + x)^{n}$.
[illegible] nom de *Zetetica*, sur la résolution
[illegible] outé au *In Artem*.

Le *In Artem* est remarquable à cause de deux perfectionnements qu'on y trouve concernant la notation algébrique, bien que probablement Viète en ait pris l'idée dans d'autres auteurs.

L'un de ces perfectionnements consiste dans la représentation des quantités connues par les consonnes B, C, D,... etc., et des quantités inconnues par les voyelles A, E, I, etc. Il lui était possible de la sorte d'introduire dans un problème un certain nombre de quantités inconnues ; mais, sur ce point particulier, il semble avoir été devancé par Jordanus et par Stifel. L'usage actuel des lettres du commencement de l'alphabet a, b, c. etc, pour représenter les quantités connues et des lettres de la fin de l'alphabet, x, y, z,... etc.. pour désigner les inconnues, a été introduit par Descartes en 1637.

Voici en quoi consiste le second perfectionnement ; jusqu'à cette époque on avait l'habitude d'introduire de nouveaux symboles pour représenter le carré, le cube, etc., des quantités figurant déjà dans les équations ; ainsi si l'inconnue x était désignée par R ou N, le carré x^2 se désignait par Z ou C ou Q, le cube x^3 par C ou K, etc. Aussi longtemps qu'il en fut ainsi, le principal avantage de l'algèbre consistait à présenter une exposition concise des résultats en opérant graduellement. Mais quand Viète fit usage de la lettre A pour indiquer la quantité inconnue x, il employait quelquefois A *quadratus*, A *cubus*..., pour représenter x^2, x^3..., ce qui permettait de voir aussitôt la relation existant entre ces diverses puissances ; et plus tard les puissances successives de A furent communément désignées par les abréviations Aq, Ac, Aqq, etc. Ainsi Viète aurait écrit l'équation

$$3\mathrm{BA}^2 - \mathrm{DA} + \mathrm{A}^3 = \mathrm{Z}$$

ainsi

B 3 *in* A *quad.* — D *plano in* A + A *cubo æquatur* Z *solido.*

Il faut observer que les dimensions des constantes (B, D et Z) sont choisies de façon à rendre l'équation homogène, c'est la caractéristique de tout son ouvrage. Il faut également noter qu'il n'emploie pas un signe pour l'égalité et, en fait, le signe particulier = que nous utilisons aujourd'hui à cet effet était employé par lui pour représenter « la différence entre ». La notation de Viète n'était pas si commode que celle usitée antérieurement par Stifel, Bombelli et

[illegible] ement adoptée ; des exemples occa- [illegible] ochant de la notation avec indices, [illegible] on, dans les œuvres de Viète.

[illegible] étaient à peu près indispensables [illegible] de l'algèbre. Pour les deux, Viète [illegible] bonne fortune en en faisant saisir [illegible] atique, de trouver le moyen de les [illegible] le à une époque où l'opinion était [illegible]

[illegible] *one et Emendatione* traite princi- [illegible] tions. Viète y montra que le pre- [illegible] ébrique $\varphi(x) = 0$ peut être trans- [illegible] expliqua comment les coefficients [illegible] nction des racines. Il donna éga- [illegible] aide d'une équation donnée, une [illegible] es celles de la première augmen- [illegible] ultipliées par une quantité donnée : [illegible] se débarrasser du coefficient de x [illegible] é et du coefficient de x^2 dans une [illegible] ermit d'arriver à la solution algé- [illegible] es d'équation.

[illegible] bique est la suivante : Il réduit [illegible] $+ 3a^2x = 2b^3$. Posant ensuite [illegible] stitution $y^6 + 2b^3y^3 = a^6$, c'est- [illegible] e en y^3. Il peut alors trouver y et [illegible]

[illegible] quadratique est semblable à celle [illegible] ; la voici en substance : il commence [illegible] x^3, et l'équation se trouve alors [illegible] $+ b^3x = c^4$. Il fait ensuite passer [illegible] embre de droite, puis ajoutant de [illegible] quation devient

$$[\text{illegible}] - a^2) - b^3x + \frac{1}{4}y^4 + c^4.$$

[illegible] que le second membre de cette [illegible] bstituant à y cette valeur, il peut

...e qui lui donne deux
...acune peut être ré-

...traite de la résolution
...cet ouvrage se trouve
...pprochées des racines
...ge, bien que son prin-
...ppuie la règle de New-
...variablement rejetées.
...on de Viète.

...sont comprises dans
...ooten. Outre quelques
...générale du sinus (ou
...cosinus de ses sous-
...ches forment le com-

...ce temps les résul-
...connus des mathéma-
...es triangles sphériques

...la trisection de l'angle
...résolution d'une équa-
...ne controverse au sujet
...circonstance il ne paraît

...remarquables sans pré-
...l'algèbre et la trigono-
...s des figures. Il insista,
...qu'il était avantageux
...gènes, de telle sorte que,
...evait les représenter par
...ar des termes tels que *m*
...s quantités qu'ils repré-
...ger au sujet de l'ouvrage
...ce dernier et il réussit
...al était tombé. Il établit
...re du carré et celle du
...surfaces sont entre elles

$$[illegible] + \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2}}} \times \ldots\ldots \text{ est à } 1.$$

[illegible] essais tentés pour arriver à une [illegible] infinie.

[illegible] des géomètres grecs. Ce fut lui [illegible] laquelle il devait trouver des imi- [illegible] aux perdus. Il restitua l'ouvrage [illegible] *bus*.

[illegible] us par Viète en trigonométrie et [illegible] nt développés par *Albert Girard*, [illegible] Lorraine en 1595 et mort le 9 dé- [illegible]

[illegible] Haye un court traité de Trigono- [illegible] des tables des valeurs des fonctions [illegible] ontient l'exemple le plus ancien de [illegible], *sec.* pour sinus, tangente et sé- [illegible]

[illegible] en trigonométrie sphérique sont [illegible] iétés semblent avoir été décou- [illegible] par Girard et Snell. Girard donna [illegible] riangle sphérique en fonction de [illegible] Cavalieri fit de son côté. En 1627 [illegible] la géométrie de Marolois avec de [illegible]

[illegible] irard sont contenues dans l'ou- [illegible] *gèbre* publié à Amsterdam en [illegible] s ancien de l'usage des crochets ; [illegible] u signe négatif ; la constatation [illegible] équation est égal à son degré ; la [illegible] s imaginaires ; le théorème connu [illegible] on pour trouver la somme des [illegible] d'une équation, et probablement [illegible] membre d'une équation algébrique [illegible] facteurs linéaires. Les recherches

de Girard, ignorées de la plupart de ses contemporains, n'exercèrent aucune influence appréciable sur le développement des mathématiques.

L'invention des logarithmes par Neper de Merchiston en 1614 et leur introduction en Angleterre par Briggs et d'autres ont déjà été mentionnées dans le chapitre XI. Nous pouvons ajouter ici quelques mots sur ces mathématiciens.

Neper (¹). — *Jean Napier* ou *Neper* naquit à Merschiston en 1550 et mourut le 4 avril 1617. Il passa la plus grande partie de sa vie sur ses terres dans le voisinage d'Edinbourg, et prit une part active dans les controverses politiques et religieuses de l'époque; la grande occupation de sa vie a été de montrer que le pape représentait l'ante-christ, mais son amusement favori était l'étude des mathématiques et de la science.

Aussitôt que les exposants furent d'un usage commun en algèbre, l'introduction des logarithmes devait naturellement suivre; mais Neper raisonna sans employer, pour faciliter ses recherches, aucune notation symbolique et l'invention des logarithmes est le résultat d'efforts tentés pendant plusieurs années dans le but d'abréger les procédés de la multiplication et de la division. Il est vraisemblable que l'attention de Neper fut attirée sur ce sujet, en voyant le vif plaisir que semblaient prendre quelques-uns de ses contemporains, à se surpasser les uns les autres dans les développements donnés à leurs multiplications et à leurs divisions. Les tables trigonométriques de Rhéticus, publiées en 1596 et 1613, avaient été calculées d'une manière très laborieuse : Viète lui-même se plaisait à effectuer des calculs arithmétiques, dont beaucoup exigeaient des journées d'un travail ardu, et dont souvent les résultats ne servaient à rien d'utile; L. Van Ceulen (1539-1610) consacra en réalité sa vie à calculer une valeur numérique approchée de π, et finalement en 1610 il en obtenait une exacte jusqu'à 35 chiffres décimaux : pour citer un dernier exemple, P. A. Cataldi (1548-1626), qui est principalement connu pour son invention en 1613 des fractions

(¹) Voir les *Memoirs of Napier*, par MARK NAPIER. Edinbourg, 1834. Une édition de toutes ses œuvres a été publiée à Edinbourg, en 1839.

Une bibliographie de ses écrits est annexée à une traduction de l'ouvrage *Constructio*, par W. R. MACDONALD. Edinbourg, 1889.

… es à effectuer des calculs numé-

… avaux de Neper, nous pouvons … *Rabdologia*, ouvrage publié en … e perfectionnée de baguettes au … er mécaniquement le produit de … ar division. Il inventa aussi deux … iæ » avec lesquelles on pouvait … e. Nous pourrions ajouter qu'en … vrit certaines formules connues … et appelées « *la règle des parties* … des triangles sphériques rec-

… s est lié d'une façon inséparable … *nri Briggs* (1) naquit près d'Ha- … collège de St-Jean à Cambridge, … n 1581, et obtint une agrégation … ur occuper la chaire de géométrie … ou 1620 obtint la chaire de Savile … mort le 26 janvier 1631. Il peut … chaire de géométrie fondée par … ancienne qui ait été créée dans … vingt ans plus tôt, Sir Henri … onférences libres sur la géométrie … et en 1619 il dota les chaires de … tte université qui portent encore … à Oxford, Briggs fut le premier … trie. A Oxford il commença ses … ion du premier livre d'Euclide, … pousser ses conférences plus loin. … n fut créée en 1663 et les plus … ent furent Barrow et Newton.

… en Europe des logarithmes, pour … tres, est due principalement à

(1) … *of the Study of Mathematics at Cam-* …

Briggs qui entreprit le pénible travail de calculer et de préparer des tables de logarithmes. Il réussit à convaincre Kepler de l'avantage que présentait la découverte de Neper, et le développement des logarithmes fut rendu plus rapide par la propagande et la réputation de Kepler, qui les mit en vogue en Allemagne par ses tables de 1625 et de 1629, tandis que Cavalieri en 1624 et Edmond Wingate en 1626 rendaient respectivement le même service aux mathématiciens italiens et français.

Briggs se rendit encore utile en vulgarisant la méthode de division qui est encore généralement employée de nos jours.

Harriot. — *Thomas Harriot*, qui naquit à Oxford en 1560 et mourut à Londres, le 2 juillet 1621, travailla beaucoup à étendre et à codifier la théorie des équations. Il passa sa jeunesse en Amérique avec Sir Walter Raleigh : il y fit la première étude topographique de la Virginie et de la Caroline du Nord, dont les cartes furent dans la suite offertes à la reine Elisabeth. A son retour en Angleterre il s'établit à Londres et consacra presque tout son temps à des études mathématiques.

La majeure partie des propositions données par Viète se trouvent dans les écrits d'Harriot, mais on ne sait si elles ont été découvertes par lui indépendamment des travaux de Viète, ou s'il en avait connaissance. Dans tous les cas il est probable que ce dernier n'avait pas complètement démontré tout ce qui est contenu dans les propositions énoncées. Quelques conséquences de ces propositions avec des développements et une exposition systématique de la théorie des équations furent données par Harriot dans son ouvrage *Artis Analyticæ Praxis* imprimé en 1631. Cet ouvrage est plus analytique qu'aucune autre algèbre antérieure et marque un progrès à la fois dans le symbolisme et dans la notation, mais les racines négatives et imaginaires sont rejetées. Il fut beaucoup lu et doit être considéré comme un de ceux qui ont le plus contribué à répandre les méthodes analytiques. Harriot, le premier fit usage des signes $>$ et $<$ pour représenter « plus grand que » et « plus petit que ». Quand il désignait la quantité inconnue par a, il écrivait son carré aa, son cube aaa, et ainsi de suite. C'est là un perfectionnement bien net de la notation de Viète. Le même symbolisme était employé par Wallis jusqu'en 1685, mais concurremment

avec la notation moderne des exposants qui a été introduite par Descartes.

Nous croyons inutile de faire allusion aux autres recherches d'Harriot qui ont comparativement peu de valeur; des extraits de quelques-unes d'entre elles ont été publiés par S. P. Rigaud en 1833.

Oughtred. — Parmi ceux qui contribuèrent à faire adopter en Angleterre ces divers perfectionnements, et ces additions variées algorithmiques et algébriques, il faut citer *Guillaume Oughtred* (1), qui naquit à Eton le 5 mars 1575 et mourut dans sa cure d'Albury (Comté de Surrey) le 30 juin 1660. On a quelquefois dit que sa mort fut causée par l'émotion et le plaisir qu'il éprouva « en apprenant que la Chambre des Communes (ou Convention) avait voté le retour du roi » ; un critique récent ajoute qu'il faut se souvenir « comme explication, que c'était alors (Oughtred) un vieillard de quatre-vingt-six ans », mais la date seule de sa mort suffit peut-être pour discréditer cette légende. Oughtred fit ses études à Eton et au collège du roi à Cambridge ; fellow de ce dernier collège il y fit pendant quelque temps des conférences mathématiques.

Son ouvrage *Clavis Mathematicæ* publié en 1631 est un bon livre classique méthodique sur l'arithmétique, qui contient tout ce qui était alors connu sur le sujet. Il y introduisit le symbole × pour la multiplication. On y trouve aussi le symbole :: pour indiquer une proportion, antérieurement une proportion telle que $a : b = c : d$ était généralement écrite $a — b — c — d$; il l'écrivait $a. b :: c. d$. Wallis dit que quelques personnes trouvèrent le livre défectueux à cause du style, mais d'après lui, ceux qui pensaient ainsi faisaient preuve de peu de compétence, car dans Oughtred « les phrases sont abondantes mais non redondantes ». Pell fait une remarque à peu près semblable.

Oughtred écrivit aussi un traité de trigonométrie, publié en 1657, et dans lequel les abréviations pour *sinus, cosinus* etc, étaient employées. C'était là réellement un perfectionnement important mais les ouvrages de Girard et d'Oughtred, dans lesquels ces abréviations figurent, furent négligés et bientôt oubliés, et ces simplifica-

(1) Voir pp. 30-31 de notre *History of the Study of Mathematics at Cambridge*. Cambridge, 1889. Une édition complète des œuvres d'Oughtred a été publiée à Oxford, en 1677.

tions dans l'écriture des fonctions trigonométriques ne furent généralement adoptées que lorsqu'Euler les eut introduites à nouveau.

Nous pouvons nous résumer en disant qu'à partir de ce moment l'arithmétique, l'algèbre et la trigonométrie élémentaires ont été traitées d'une manière qui, en substance, ne diffère pas de celle exposée dans nos ouvrages contemporains; de plus les perfectionnements introduits dans la suite consistèrent en additions et non en remaniements ayant pour but de présenter ces sciences sur de nouvelles bases.

ORIGINE DES SYMBOLES LES PLUS COMMUNÉMENT EMPLOYÉS EN ALGÈBRE.

Il peut être utile de réunir ici dans un paragraphe spécial les remarques diverses qui ont déjà été faites sur l'introduction des symboles pour les opérations les plus usuelles de l'algèbre (1).

Les plus anciens Grecs, les Hindous et Jordanus indiquaient *l'addition* par une simple juxtaposition. Il faut observer que c'est encore l'usage en arithmétique ou l'on écrit $2\frac{1}{2}$ pour $2+\frac{1}{2}$. Les algébristes italiens, quand ils abandonnèrent l'expression de chaque opération par des mots écrits sans abréviation et introduisirent l'algèbre syncopée, indiquèrent généralement *plus* par sa lettre initiale P ou *p*, en traçant quelquefois une ligne à travers la lettre pour indiquer qu'il s'agissait d'une contraction ou d'un symbole d'opération et non d'une quantité. Cependant cette façon d'opérer n'était pas uniforme : Pacioli, par exemple, représentait *plus* parfois par $\bar{p}$ et d'autre fois par *e*; Tartaglia employait communément Φ. D'un autre côté les algébristes allemands et anglais introduisirent le signe + presqu'aussitôt qu'ils firent usage des procédés de l'algorithme, mais ils n'en parlaient que comme d'un *signum additorum* et l'employèrent seulement pour indiquer l'excès; ils s'en servirent aussi avec une signification spéciale dans

(1) Voir aussi deux articles, par C. Henry, dans les numéros de juin et juillet 1879 de la *Revue Archéologique*, vol. XXXVII, pp. 324-333, vol. XXXVIII, pp. 1-10.

… supposition. Widman l'em-
… tion pour excès : vers 1630 ce
… gébrique reconnue et était éga-
… ration.

… Diophante au moyen de la
… Hindous la représentaient par un
… nd ils introduisirent l'algèbre
… nt *moins* par M ou *m*, en tra-
… la lettre, mais cette pratique
… exemple, indiquait quelquefois
… *de* pour *demptus*. Les algé-
… uisirent le symbole actuel —
… *actorum*. Il est très probable
… ole pour *plus* fut superposée
… c les distinguer l'un de l'autre.
… a trouvèrent le signe — déjà
… mment une division, un rapport
… pour moins était d'un usage
… employé comme symbole d'o-

… rmi leurs contemporains em-
… deux quantités pour indiquer la
… nsi $a = b$ signifiait pour eux
… ui par $a - b$. D'un autre côté
… age du signe —.
… par qui le symbole courant —
… avec la signification actuelle.
… igne × pour indiquer la *mul-*
… introduisait dans le même but
… se bornait à juxtaposer les fac-
… ymbole employé antérieurement.
… ultiplication par le signe ⌢.
… ndiquée par la méthode arabe,
… me d'une fraction avec une ligne
… trois façons $a - b$, a/b ou $\frac{a}{b}$.
… nt pour indiquer soit une divi-
… 686 employait le signe ⌣.

Le signe : employé pour représenter un rapport se trouve dans les deux dernières pages de l'ouvrage d'Oughtred *Canones Sinuum* 1657. Nous pensons que le symbole ÷ par lequel on désigne quelquefois la division résulte simplement de la combinaison de — et du symbole : pour le rapport; il était employé par Johann Heinrich Rahn à Zürich en 1659, et par Jean Pell à Londres en 1668. Le symbole ÷÷ était usité par Barrow et par d'autres écrivains de son temps pour une proportion continue.

Le signe dont ou fait couramment usage aujourd'hui pour représenter l'*égalité* a été introduit par Robert Recorde en 1557: Xylander en 1575 se servait de deux lignes parallèles verticales; mais en général jusqu'à l'année 1600, le mot égalité était écrit en toutes lettres et à partir de ce moment jusqu'à Newton, c'est-à-dire jusque vers 1680, il était plus fréquemment représenté par ∝ ou par ∞ plutôt que par tout autre symbole. L'un ou l'autre de ces deux derniers signes était usité comme une contraction des deux premières lettres du mot *æqualis*.

Le symbole :: pour indiquer une proportion ou l'égalité de deux rapports fut introduit par Oughtred en 1631, et l'emploi en fut généralisé par Wallis en 1686. Il n'y a aucune nécessité d'avoir pour représenter l'égalité de deux rapports, un signe différent de celui usité pour indiquer l'égalité de deux autres quantités, et il est préférable de remplacer le signe :: par =.

Le signe > pour *est plus grand que* et le signe < pour *est plus petit que* ont été introduits par Harriot en 1631, mais Oughtred avait imaginé simultanément, et dans le même but, les symboles ⊐ et ⊏; et ces derniers furent fréquemment employés jusqu'au commencement du dix-huitième siècle, en particulier par Barrow.

Les symboles =|= pour *n'est pas égal à*
≥|> pour *n'est pas plus grand que*
et ≤|< pour *n'est pas plus petit que*

sont de création récente et ne sont guère usités, pensons-nous, en dehors de la Grande-Bretagne.

Le vinculum fut introduit par Viète en 1591, et les parenthèses furent employées pour la première fois par Girard en 1629.

Le symbole $\sqrt{\ }$ indiquant la racine carré a été introduit par

Rudolff en 1526 : Bhaskara et Chuquet avaient déjà employé une notation semblable.

Nous avons déjà fait une brève allusion aux différentes manières de représenter les puissances successives auxquelles on peut élever une certaine quantité. La plus ancienne tentative connue faite pour établir un système de notation symbolique appartient à Bombelli qui, en 1572, représentait la quantité inconnue par $\underset{\smile}{1}$, son carré par $\underset{\smile}{2}$, son cube par $\underset{\smile}{3}$, etc. En 1586, Stevin employait de la même manière ①, ②, ③,... etc, et suggéra, bien qu'il n'en fit pas usage, une notation correspondante pour les indices fractionnaires. En 1591, Viète apporta une légère amélioration en représentant les différentes puissances de A par A. A *quad*, A *cub*. etc., de telle sorte qu'il pouvait indiquer les puissances de différentes quantités. Harriot en 1631, perfectionna à son tour la notation de Viète en écrivant *aa* pour a^2, *aaa* pour a^3, etc., et cette façon d'écrire demeura en usage pendant cinquante ans en concurrence avec la notation par indices. En 1634 P. Herigone, dans son *Cursus mathematicus* ouvrage publié en cinq volumes à Paris en 1634-1637, écrivait a, $a2$, $a3$... pour a, a^2, a^3....

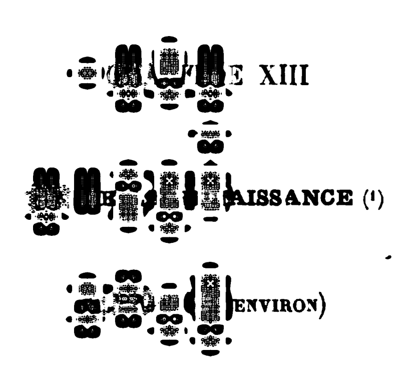
L'idée d'employer les exposants pour marquer la puissance est due à Descartes, et fut introduite par lui en 1637 ; mais il ne se servait que d'indices entiers et positifs a^1, a^2, a^3,... Wallis en 1659 donna la signification des indices négatifs et fractionnaires dans les expressions telles que a^{-1}, $a^{\frac{2}{3}}$, etc ; cette dernière conception avait déjà été présentée par Oresme et peut-être par Stevin. Enfin l'idée d'un indice pouvant prendre toutes les valeurs possibles, tel que n dans l'expression a^n, est, croyons-nous, due à Newton, et fut introduite par lui à propos du théorème du binôme dans ses lettres à Leibnitz écrites en 1676.

Le symbole ∞ pour l'infini fut employé pour la première fois par Wallis en 1655 dans son *Arithmetica Infinitorum* ; mais ne se rencontre plus de nouveau jusqu'à l'année 1713 où on le trouve dans l'*Ars Conjectandi* de Jacques Bernoulli. Ce signe avait été employé quelquefois par les Romains pour représenter le nombre 1 000 et on a émis cette opinion que c'est de là que vient son usage pour représenter un grand nombre quelconque.

La trigonométrie n'emploie qu'un très petit nombre de symboles

spéciaux ; nous pouvons cependant ajouter à ce paragraphe les quelques lignes qui suivent, contenant tout ce que nous avons pu recueillir sur le sujet. La division sexagésimale des angles nous vient des Babyloniens par l'intermédiaire des Grecs. L'angle usité chez les Babyloniens était l'angle du triangle équilatéral ; suivant leur pratique usuelle cet angle était divisé en 60 parties égales ou degrés, un degré était subdivisé en 60 parties égales ou minutes, et ainsi de suite : on a dit que 60 avait été pris comme la base du système afin que le nombre de degrés correspondant à la circonférence d'un cercle fut le même que le nombre de jours de l'année, lequel, d'après les renseignements que l'on possède, était de 360 (tout au moins en pratique).

Le mot *sinus* fut employé par Regiomontanus et il avait été emprunté aux Arabes : les termes *secante* et *tangente* ont été introduits par Thomas Finck (né en Danemark en 1561 et mort en 1646) dans sa *Geometriæ Rotundi*, Bâle 1583 : le mot *cosécante* fut (pensons-nous) employé pour la première fois par Rhéticus dans son *Opus Palatinum*, 1596 : les termes *cosinus* et *cotangente* furent employés par E. Gunter dans son *Canon Triangulorum*, Londres, 1620. Les abréviations *sin.*, *tan.*, *sec.*, furent usités en 1626 par Girard, et celles de *cos*, et *cot*, par Oughtred en 1657 ; mais ces contractions ne devinrent d'un usage général que lorsqu'Euler les eut ré-introduites en 1748. L'idée des *fonctions* trigonométriques appartient à Jean Bernoulli, et elle fut développée en 1748 par Euler dans son *Introductio in Analysin Infinitorum*.



E XIII

AISSANCE (1)

ENVIRON)

ssance furent marquées par une
e, qui s'étendit à presque toutes
n ce qui concerne les mathéma-
que, dans la dernière moitié du
sser d'une façon remarquable l'al-
a trigonométrie ; et nous allons
ième partie de ce chapitre) que
ième siècle on imagina quelques
Si cependant nous considérons
impossible de ne pas être frappé
même la fin du seizième siècle,
ait depuis le temps d'Archimède.
rostatique demeurèrent dans le
s, et la dynamique n'existait pas
n le premier donna une nouvelle
et c'est à Galilée qu'appartient
nts de la dynamique ; nous con-
chapitre à l'examen de leurs

[illegible] ES EXPÉRIMENTALES

[illegible] à Bruges en 1548, et [illegible] s est peu connue; nous [illegible] d'abord employé chez un [illegible] ère période de sa vie l'ami [illegible] a quartier maître général [illegible]

[illegible] connu par ses ouvrages [illegible] t militaire; les principes [illegible] e avec ceux généralement [illegible] opulaire à cause de l'inven- [illegible] aide de voiles; elle roulait [illegible] t personnes, et dépassait [illegible] modèle de cette voiture [illegible] lorsqu'ils envahirent la [illegible] uence de Stevin que les [illegible] blissement d'un système [illegible]

[illegible] duction dans son *Arithmé-* [illegible] our marquer la puissance [illegible] mple il écrit $3x^2 - 5x + 1$ [illegible] a notation pour les frac- [illegible] identique. Plus tard il [illegible] aires (mais non négatifs). [illegible] d'un système décimal de [illegible]

[illegible] ingénieuse, bien qu'elle

[illegible] l'*Histoire des Sciences mathé-* [illegible] J. QUETELET. Bruxelles, 1866, [illegible] *que sur la vie et les ouvrages de* [illegible] et les *Travaux de Stevinus*, par [illegible] STEVIN furent réunis par SNELL, [illegible] sous le titre *Hypomnemata Ma-*

ne contienne que des résultats déjà antérieurement connus : on y trouve énoncés quelques théorèmes de perspective.

C'est cependant son ouvrage *Statique et Hydrostatique* publié (en flamand) à Leyde, en 1586, qui a fait sa réputation. Dans ce livre il énonce la règle du triangle des forces, théorème qui, d'après quelques-uns, aurait été trouvé pour la première fois par Leonard de Vinci. Stevin le regarde comme la proposition fondamentale de son ouvrage; antérieurement à la publication de cet ouvrage la statique reposait sur la théorie du levier; puis on montra la possibilité de représenter les forces par des lignes droites, ce qui permit de ramener plusieurs théorèmes à des propositions géométriques, et en particulier, d'obtenir ainsi une démonstration du parallélogramme des forces (proposition équivalente à celle du triangle des forces). Stevin manque de clarté dans l'arrangement de ses diverses propositions ou dans leurs conséquences logiques, et l'exposition nouvelle du sujet ne fut définitivement arrêtée que lors de la publication, en 1687, des ouvrages de Varignon sur la mécanique. Stevin détermina également la force qu'il est nécessaire de faire agir le long de la ligne de plus grande pente pour maintenir un corps pesant sur un plan incliné — problème dont la solution avait été longtemps discutée. — Plus tard il établit la distinction entre l'équilibre stable et instable. En hydrostatique il examina les questions relatives à la pression exercée par un fluide, et donna l'explication du paradoxe dit hydrostatique.

Sa méthode [1] pour déterminer la composante d'une force suivant une direction donnée, dans le cas du poids reposant sur un plan incliné fournit un exemple qui mérite d'être cité.

Il prend un coin ABC dont la base AC est horizontale (et dont les côtés BA, BC sont dans le rapport de 2 à 1). Un fil reliant un certain nombre de petits poids égaux et équidistants est placé sur sur le coin comme le représente la figure 30, de telle sorte que le nombre des poids reposant sur BA est au nombre de ceux reposant sur BC dans la même proportion que BA à BC (ceci est toujours possible si les dimensions du coin sont choisies convenablement en plaçant quatre poids sur BA et deux sur BC). Nous pouvons, sans rien enlever à la force de son raisonnement, remplacer

[1] *Hypomnemata Mathematica*, vol. IV, *de Statica*, prop. 19.

les poids par une chaîne d'un poids uniforme TSLVT. Il fait observer qu'une pareille chaîne se maintiendra au repos, car s'il n'en était pas ainsi, on pourrait obtenir un mouvement perpétuel. Ainsi l'effet dans la direction BA du poids de la portion TS de la chaîne doit équilibrer l'effet dans la direction BC du poids de la portion TV de la chaîne. Bien entendu la direction BC peut être verticale et, dans ce cas, le raisonnement précédent revient à dire que l'effet suivant la direction BA du poids de la portion de chaîne reposant sur ce côté est diminué dans le rapport de BC à BA ; en d'autres termes, si un poids P s'appuie sur un plan incliné faisant avec l'horizon un angle α, la composante de P suivant la ligne de plus grande pente est égale à P sin α.

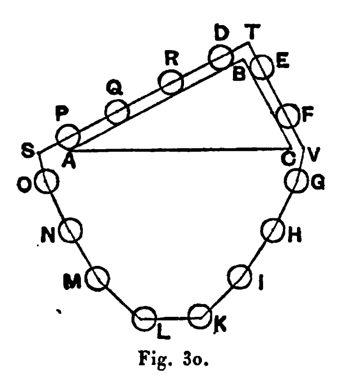


Fig. 30.

Stevin était quelque peu dogmatique dans ses raisonnements, et ne permettait à personne d'avoir un avis contraire, « et quant à ceux » dit-il dans un endroit « qui ne peuvent comprendre cela, que l'auteur de la nature ait pitié de leurs yeux infortunés, car la faute n'en est pas au raisonnement, mais à la vue qui leur manque et que nous ne pouvons leur donner ».

Galilée [1]. — De même que le traitement moderne de la statique trouve son origine dans Stevin, de même les fondements de la dynamique sont dûs à Galilée. *Galileo Galilei* naquit à Pise le 18 février 1564, et mourut non loin de Florence, le 8 janvier 1642.

(1) Voir la biographie de Galilée par T. H. Martin. Paris, 1868. Il existe également une vie de Galilée, par Sir David Brewster. Londres, 1841 ; et une longue notice par Libri dans le quatrième volume de son *Histoire des*

Son père, descendant d'une vieille et noble famille Florentine, était lui-même un mathématicien passable et un bon musicien. Galilée fut élevé au monastère de Vallombrosa, où ses talents littéraires et son ingéniosité en mécanique attirèrent beaucoup l'attention sur lui. En 1580 on lui persuada de faire son noviciat dans les ordres, mais son père, qui le destinait à la médecine, le retira aussitôt et l'envoya en 1581 à l'université de Pise. Ce fut là qu'il constata que la grosse lampe de bronze, qui est encore suspendue à la voûte de la Cathédrale, effectuait ses oscillations dans des temps égaux, quelle que fut leur amplitude, grande ou petite — fait qu'il vérifia en comptant les pulsations de son pouls. Jusque là il n'avait pas étudié les mathématiques, mais un jour ayant entendu par hasard une leçon sur la géométrie, cette science lui parut si attrayante que depuis lors il consacra à son étude tous ses loisirs, et obtint finalement l'autorisation d'abandonner la médecine. Il quitta l'université en 1586 et presque immédiatement se livra à des recherches personnelles.

En 1587 il donna la description de la balance hydrostatique, et en 1588 il publia un essai sur les centres de gravité des solides. La réputation que lui valurent ces deux ouvrages lui fit accorder la chaire de mathématiques à Pise, dont les émoluments étaient très faibles, comme c'était alors le cas pour la plupart des professorats. Pendant les trois années qui suivirent il fit, à la Tour penchée, cette série d'expériences sur la chute des corps sur lesquelles reposent les premiers principes de la dynamique. Malheureusement la manière dont il fit connaître ses découvertes et le ridicule qu'il jeta sur ceux qui ne partageaient pas ses idées, provoqua contre lui une animosité assez naturelle, et en 1591 il fut obligé d'abandonner sa position.

A cette époque il semble avoir été dans une grande gêne. Cependant des influences agirent en sa faveur auprès du Sénat Vénitien et il fut nommé professeur à Padoue, où il exerça pendant dix-huit ans (1592-1610).

Sciences mathématiques en Italie. Une édition des œuvres de Galilée fut publiée en 16 volumes, par E. Albéri. Florence, 1842-1856. Un grand nombre de ses lettres sur divers sujets mathématiques ont été découvertes depuis, et une nouvelle édition plus complète est actuellement en cours de publication (10 volumes parus) sous les auspices du gouvernement Italien, Florence, 1890, etc.

Ses leçons paraissent avoir roulé principalement sur la mécanique et l'hydrostatique, et elles sont contenues en substance dans son traité de mécanique publié en 1612. Dans ces leçons il revenait sur ses expériences de Pise et démontrait que les corps dans leur chute ne se déplaçaient pas (comme on le croyait alors) avec une vitesse proportionnelle à leurs poids, toutes choses égales d'ailleurs. Plus tard il montra qu'en supposant le mouvement de descente uniformément accéléré, il était possible d'établir les relations entre la vitesse, l'espace et le temps, qui sont traduites par les formules en usage actuellement. A une autre époque, plus reculée, il montra en observant les temps mis par les corps pour descendre en glissant le long d'un plan incliné, que cette hypothèse était exacte. Il prouva aussi que la trajectoire d'un projectile était une parabole, et dans sa démonstration, il emploie implicitement les principes posés dans les deux premières lois du mouvement, telles qu'elles furent énoncées par Newton.

Il donna du momentum une définition exacte, qui a été considérée par quelques écrivains comme pouvant impliquer la connaissance de la troisième loi du mouvement. Cependant ces lois ne sont nulle part énoncées sous une forme précise et définie et Galilée doit être regardé plutôt comme ayant préparé la route à Newton, que comme le créateur de la dynamique.

En statique, il posa en principe que dans une machine ce qui est gagné en puissance est perdu en chemin parcouru, et dans le même rapport. Dans la statique des solides, il détermina la force capable de maintenir un poids donné sur un plan incliné ; en hydrostatique, il énonça les théorèmes les plus élémentaires sur la pression exercée par les fluides, et sur les corps flottants ; parmi les instruments hydrostatiques, il employa et imagina peut-être le thermomètre, bien que sous une forme quelque peu imparfaite.

Pour beaucoup de personnes cependant Galilée est surtout un astronome et bien que, rigoureusement parlant, ses recherches astronomiques n'entrent pas dans le programme de ce livre, il peut être intéressant d'exposer les principales. Ce fut dans le courant du printemps de l'année 1609 que Galilée apprit qu'un opticien de Middlebourg, H. Lippersheim ou Lippershey, avait imaginé

de fixer à l'intérieur d'un tube des lentilles, de telle sorte que les objets vus au travers paraissaient considérablement grossis. Cette invention lui donna l'idée de construire la lunette qui porte encore son nom et dont la lorgnette de spectacle est un exemple simple. Au bout de quelques mois il avait fabriqué des instruments capables de grossir dans le rapport de 1 à 32, et dans l'intervalle d'un an il fit et publia une série d'observations sur les taches du soleil, les montagnes de la lune, les satellites de Jupiter, les phases de Vénus et les anneaux de Saturne.

La découverte du microscope fut la conséquence naturelle de celle de la lunette. Les honneurs et les récompenses lui vinrent alors en foule et il put, en 1610, abandonner le professorat et se retirer à Florence. En 1611, il séjourna quelque temps à Rome et il montra dans les jardins du Vatican, les nouveaux mondes révélés par la lunette.

Il paraîtrait que Galilée avait toujours cru au système de Copernic, mais avait reculé devant l'idée de le soutenir à cause des attaques qu'il aurait eu à supporter. L'existence des satellites de Jupiter semble cependant l'avoir convaincu de la vérité du système et il n'hésita plus alors à le préconiser avec hardiesse. Le parti orthodoxe s'alarma et, le 24 février 1616, l'Inquisition décréta que considérer le soleil comme centre du système planétaire était absurde, hérétique et contraire aux saintes écritures. L'édit du 5 mars 1616, qui mit ce décret à exécution n'a jamais été abrogé bien que pendant longtemps il ait été tacitement ignoré. Il est bien connu que vers le milieu du dix-septième siècle les Jésuites tournèrent cet édit en disant que la théorie était une hypothèse fausse, dont on pouvait cependant déduire certains résultats.

En janvier 1632, Galilée publia ses dialogues sur le système du monde dans lesquels il expose la théorie de Copernic en un langage clair et vigoureux. Probablement par jalousie de la renommée de Képler, il n'y fait pas mention des lois énoncées par ce grand savant (les deux premières avaient été publiées en 1609 et la troitième en 1619); il repoussait l'hypothèse de Képler, attribuant à l'attraction lunaire la cause des marées, et il cherchait à expliquer leur existence (qui, selon lui, est une confirmation de l'hypothèse de Copernic) par ce fait que les différentes parties de la terre tournent avec des vitesses différentes. Il fut plus heureux en mon-

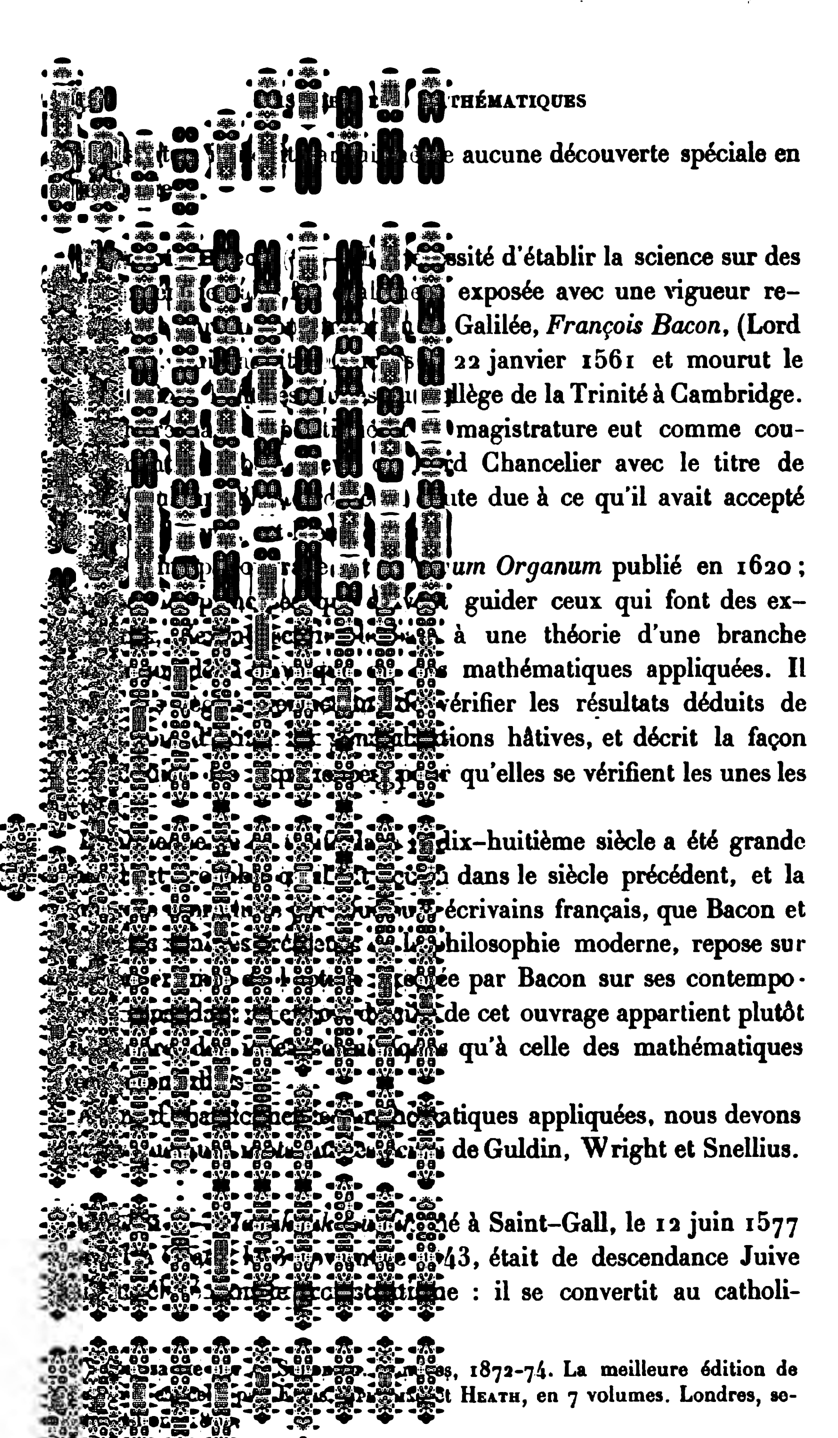
trant que les principes de la mécanique permettaient d'expliquer pourquoi une pierre lancée verticalement devait retomber à l'endroit d'où elle avait été projetée — phénomène qui était antérieurement considéré comme l'une des principales difficultés dans toute théorie supposant la terre en mouvement.

La publication de cet ouvrage fut approuvée par la censure ecclésiastique, mais il était en substance contraire à l'édit de 1616. Galilée fut convoqué à Rome, forcé de se rétracter, dut faire pénitence et ne fut relâché qu'après avoir promis obéissance. Les documents récemment imprimés montrent qu'on le menaça de la torture, mais qu'on n'avait pas l'intention de la lui appliquer.

Une fois libre il s'occupa de nouveau de ses travaux sur la mécanique et vers 1636 il termina un ouvrage qui fut publié à Leyde en 1638, sous le titre *Discorsi intorno a due nuove scienze*. En 1637 il perdit la vue, mais avec l'aide de ses élèves il continua ses expériences sur la mécanique et l'hydrostatique, et sur la théorie du choc.

On a conservé une anecdote de l'époque, qui n'est peut-être pas vraie, mais qui est suffisamment intéressante pour qu'on la reproduise ici. Suivant une version, Galilée aurait reçu un jour quelques membres d'une corporation de Florence, désireux de savoir comment leurs pompes pouvaient être modifiées, de façon à élever l'eau à une hauteur supérieure à trente pieds ; il leur fit remarquer qu'avant tout il était utile de savoir pourquoi l'eau s'élevait même à une hauteur moindre. Un des membres présents lui répondit que la difficulté n'était pas là, attendu que la nature avait horreur du vide. Soit, lui répondit Galilée, mais alors apparemment cette horreur n'existe plus au delà de trente pieds. Torricelli son élève favori assistait à la conversation et son attention fut alors attirée sur cette question, qu'il élucida par la suite.

L'œuvre de Galilée peut être résumée d'une façon impartiale en disant que ses recherches mécaniques sont dignes des plus grands éloges et qu'elles sont mémorables, parce qu'il énonce clairement cette vérité, que la science doit être basée sur les lois déduites de l'expérience ; ses observations astronomiques et les déductions qu'il en tire sont également excellentes et furent exposées avec un talent littéraire ne laissant rien à désirer, mais, bien qu'il soit parvenu à établir la théorie de Copernic sur des bases



… aucune découverte spéciale en …

… ssité d'établir la science sur des … exposée avec une vigueur re… Galilée, *François Bacon*, (Lord … 22 janvier 1561 et mourut le … llège de la Trinité à Cambridge. … magistrature eut comme cou… …d Chancelier avec le titre de … …ute due à ce qu'il avait accepté …

… *…um Organum* publié en 1620; … guider ceux qui font des ex… … à une théorie d'une branche … mathématiques appliquées. Il … vérifier les résultats déduits de … …tions hâtives, et décrit la façon … qu'elles se vérifient les unes les …

… dix-huitième siècle a été grande … dans le siècle précédent, et la … écrivains français, que Bacon et … …hilosophie moderne, repose sur … …ée par Bacon sur ses contempo… … de cet ouvrage appartient plutôt … qu'à celle des mathématiques …

… …tiques appliquées, nous devons … de Guldin, Wright et Snellius.

… né à Saint-Gall, le 12 juin 1577 … 43, était de descendance Juive … : il se convertit au catholi…

… 1872-74. La meilleure édition de … …t Heath, en 7 volumes. Londres, se…

... suites, où il prit le nom
... collèges Jésuites de Rome
... deux théorèmes connus
... avons déjà fait allusion)
... e livre de son *De Centro*
... ment Guldin emprunta à
... n question, mais encore
... t erronée, bien que les
... tion des volumes et des
... Cependant ces théorèmes
... citèrent un intérêt con-

... ment citer ici *Edouard*
... ur avoir établi l'art de la
... Wright naquit à Norfolk
... tudes au Collège Caius à
... w de cette école. Il paraît
... pécial pour la construc-
... choisi pour faire des con-
... nie des Indes Orientales;
... fut désigné pour être le
... y, Prince de Galles, le fils
... n habileté en mécanique,
... ction au moyen duquel il
... ui a été montré comme
... 75.

... Mercator, le degré, qu'il
... présenté dans tous les cas
... ait suivre un navire était
... les ports de départ et
... ait conduit ainsi à des
... que pour rendre exacte
... vire, la longueur assignée
... ait aller en croissant en

... of Mathematics at Cambridge.

même temps que la latitude augmentait. Partant de ce principe, il avait construit empiriquement quelques cartes marines qui furent publiées vers 1560 ou 1570 ; Wright se proposa l'étude du problème et chercha à établir la théorie sur laquelle devait être basé le tracé de ces cartes ; il réussit à trouver la loi d'une échelle de proportion bien que, rigoureusement parlant, sa règle ne s'applique exactement qu'aux petits arcs seulement. Le résultat auquel il parvint fut inséré dans la seconde édition des *Exercices* de Blundeville.

En 1599 Wright publia son ouvrage *Certain Errors in Navigation Detected and Corrected* (¹), dans lequel il expliquait la théorie et insérait une Table des parties du méridien. Cet ouvrage révèle des connaissances géométriques très étendues. Dans le cours de l'ouvrage il donne la déclinaison de trente deux étoiles, explique les phénomènes de l'inclinaison, de la parallaxe, de la réfraction, et ajoute une table des déclinaisons magnétiques ; il suppose la terre immobile. L'année suivante, il fit paraître quelques cartes construites d'après ces principes et sur lesquelles le point de l'Australie le plus au Nord est indiqué : la latitude de Londres est prise égale à 51° 32'.

Snellius. — *Willebrod Snellius*, dont le nom est encore bien connu à cause de sa découverte en 1619 de la loi de la réfraction, était contemporain de Guldin et de Wright. Il naquit à Leyde en 1581, occupa à l'Université de cette ville une chaire de mathématiques, et y mourut le 30 octobre 1626. C'était un de ces enfants prodiges qui paraissent de temps en temps et on raconte qu'à l'âge de douze ans il connaissait tous les ouvrages classiques de mathématiques de son temps.

Nous ajouterons seulement ici, qu'en géodésie il posa les principes permettant de déterminer la longeur d'un arc de méridien par la mesure d'une ligne de base quelconque, et qu'en trigonométrie sphérique il découvrit les propriétés du triangle polaire ou supplémentaire.

(¹) Certaines erreurs de navigation reconnues et corrigées.

RÉVEIL DE L'INTÉRÊT POUR LA GÉOMÉTRIE PURE

La fin du seizième siècle fut marquée non seulement par les essais faits pour trouver une théorie de la dynamique basée sur des lois découlant d'expériences, mais aussi par une renaissance d'intérêt pour la géométrie, due en grande partie à l'influence de Képler.

Képler (¹). — *Jean Képler*, l'un des fondateurs de l'Astronomie moderne, naquit de parents pauvres, près de Stuttgard, le 27 décembre 1571 et mourut à Ratisbonne le 15 novembre 1630. Il fit ses études à Tubingen sous Mästlin; en 1593, il fut nommé professeur à Graetz, où il fit la connaissance d'une riche veuve avec laquelle il se maria, mais il constata trop tard qu'il avait sacrifié son bonheur domestique à la recherche de la fortune. En 1599, il accepta un emploi d'aide auprès de Tycho Brahé, et en 1601 il succéda à son maître comme astronome de l'empereur Rodolphe II. Mais la mauvaise chance ne l'abandonna pas; d'abord ses appointements ne lui furent pas payés; ensuite sa femme tomba en démence, puis mourut ; un second mariage contracté en 1611 ne le rendit pas plus heureux, bien que cette fois il eut pris la précaution de faire son choix parmi onze jeunes filles, dont il avait soigneusement analysé les qualités et les défauts par écrit : la note subsiste encore; enfin pour compléter ses infortunes il fut chassé de sa chaire et c'est avec peine qu'il échappa à une condamnation comme hérétique. Pendant ce temps il se procura des moyens d'existence en prédisant l'avenir et en tirant des horoscopes car, « la nature qui a donné », dit-il, « à chaque animal ses moyens d'existence, a désigné l'astrologie comme l'accessoire et l'alliée de l'astronomie. »

(¹) Voir *Johann Keppler's Leben und Wirken*, par J. L. E. VON BREITSCWERT, Stuttgard, 1831 ; et *Geschichte der Astronomie*, par R. WOLF, Munich, 1877.
Une édition complète des œuvres de KÉPLER a été publiée, par C. FRISCH, à Francfort, en 8 volumes, 1858-71 ; et une analyse de la partie mathématique de son principal ouvrage, *Harmonices Mundi*, est donnée par CHASLES, dans son *Aperçu historique*. Voir aussi CANTOR.

[illegible] entrepris dans le but de tou- [illegible] quelques arriérés de son trai- [illegible]

[illegible] ée, nous avons fait brièvement [illegible] en astronomie par Képler, lois [illegible] son nom ; nous avons égale- [illegible] qu'il prit dans la propagation [illegible] continent. Ce sont là des faits [illegible] re moins que Képler fut aussi [illegible] emier ordre ; et que lui, Desar- [illegible] être considérés comme formant [illegible] ticiens de la Renaissance et ceux [illegible]

[illegible] trie consistent plutôt en certains [illegible] appliqués à quelques exemples, [illegible] atique. Dans un court chapitre [illegible] *Paralipomena*, publié en 1604, [illegible] ncipe de la continuité ; et comme [illegible] est à la fois le cas limite d'une [illegible] nit un nouvel exemple de ce même [illegible] oniques (le mot *foyer* a été intro- [illegible] ue les lignes parallèles doivent [illegible] contrant à l'infini. Il introduisit [illegible] ns la discussion des propriétés de [illegible]

[illegible] publié en 1615, il détermine les [illegible] s aires de certaines surfaces au [illegible] eu d'employer la pénible et longue [illegible] erches aussi bien que celles de [illegible] discussion avec un marchand de [illegible] ger un tonneau. Guldin et d'autres [illegible] ction que cet emploi des infini- [illegible] mais bien que les méthodes de [illegible] ent à l'abri de toute critique, sa [illegible] nce correcte, et en appliquant la [illegible] petits, il préparait la voie à la [illegible] lieri et au calcul infinitésimal de [illegible]

Les travaux de Képler en astronomie n'entrent pas dans le programme de ce livre. Nous mentionnerons seulement qu'ils furent basés sur les observations de Tycho Brahé [1], dont il avait été l'aide pendant quelque temps. Ses trois lois sur le mouvement planétaire sont la conséquence de nombreux et laborieux efforts tentés pour ramener les phénomènes du système solaire à certaines règles simples. Les deux premières, publiées en 1609, énonçent que les planètes décrivent des ellipses autour du soleil qui occupe l'un des foyers, et que la ligne joignant le soleil à une planète quelconque décrit des aires égales dans des temps égaux. La troisième formulée en 1619, nous apprend que les carrés des temps des révolutions des planètes sont proportionnels aux cubes des grands axes de leurs orbites. Ces lois, déduites d'observations faites sur les mouvements de Mars et de la Terre, furent étendues par analogie aux autres planètes. Nous devons ajouter qu'il chercha à donner une explication de ces mouvements par une hypothèse qui n'est pas très différente de la théorie des tourbillons de Descartes. Képler consacra également un temps considérable à chercher à élucider les théories de la vision et de la réfraction en optique.

Pendant que Képler étendait les conceptions de la géométrie grecque, un Français, dont les œuvres étaient encore récemment à peu près ignorées, inventait une nouvelle méthode de traiter cette science — méthode connue actuellement sous le nom de géométrie projective. Nous voulons parler de la découverte de Desargues que nous plaçons (avec un peu d'hésitation) à la fin de cette période et non parmi les mathématiciens des temps modernes.

Desargues [2]. — *Gérard Desargues*, né à Lyon en 1593 et mort en 1662, était ingénieur et architecte, mais de 1626 à environ 1630 il fit à Paris des cours gratuits et publics qui produisirent une grande impression sur ses contemporains. Descartes et Pascal avaient une haute opinion de ses travaux et de son savoir, et tous les deux utilisèrent grandement les théorèmes qu'il avait énoncés.

En 1636, Desargues fit paraître un ouvrage sur la perspective ;

(1) Pour des détails sur Tycho Brahé, né à Knudstrup, en 1546 et mort à Prague, en 1601, voir sa vie, par J. L. E. Dreyer. Edinbourg, 1890.

(2) Voir les *Œuvres de Desargues*, par M. Poudra, 2 vol. Paris, 1864 ; et une note dans la *Bibliotheca Mathematica*, 1885, p. 90.

mais la plupart de ses recherches furent insérées dans son *Brouillon proiect* sur les coniques, publié en 1639, et dont une copie fut découverte par Chasles en 1845. Nous empruntons le sommaire suivant à l'ouvrage de C. Taylor sur les coniques. Desargues commence par l'établissement de la doctrine de continuité comme elle avait été posée par Képler : ainsi les points aux extrémités opposées d'une ligne droite sont regardés comme en coïncidence, les lignes parallèles sont considérées comme se rencontrant en un point à l'infini et les plans parallèles comme ayant leur intersection à l'infini. La ligne droite pouvait donc être regardée comme une circonférence ayant son centre à l'infini. Il pose la théorie de six points en involution avec les cas spéciaux, et il établit la propriété projective des faisceaux en involution. La théorie des polaires est exposée, et la théorie analogue dans l'espace est suggérée. La tangente est définie comme la position limite d'une sécante, et l'asymptote comme une tangente à l'infini. Desargues montre que les lignes, qui joignent deux à deux quatre points sur un plan, déterminent sur une transversale quelconque trois couples de points en involution, et, qu'avec une conique quelconque passant par les quatre points, on peut obtenir un autre couple de points en involution avec deux quelconques des premiers. Il démontre que les points d'intersection des diagonales et des deux couples de côtés opposés de tout quadrilatère inscrit dans une conique forment une triade conjuguée par rapport à la conique, et que, lorsque l'un des trois points est à l'infini, sa polaire est un diamètre ; mais il ne réussit pas à expliquer le cas où le quadrilatère est un parallélogramme, bien qu'il ait eu la conception d'une ligne droite complètement à l'infini. On peut dire, par conséquent, avec raison que son livre renferme les théorèmes fondamentaux sur l'involution, l'homologie, les pôles et polaires, et la perspective.

L'influence exercée par la lecture de Desargues sur Descartes, Pascal et les géomètres Français du dix-septième siècle fut considérable ; mais l'étude de la géométrie projective tomba bientôt en oubli, principalement parce que la géométrie analytique de Descartes comme méthode de démonstration et de découverte était un instrument bien plus puissant.

Les recherches de Képler et de Desargues doivent nous faire souvenir que la géométrie des Grecs ne pouvant supporter une plus

large extension, les mathématiciens commençaient à rechercher de nouvelles méthodes d'investigations, et étendaient les conceptions premières de la géométrie. L'invention de la géométrie analytique et du calcul infinitésimal détourna temporairement l'attention de la géométrie pure, mais au commencement du dix-neuvième siècle on y reprit intérêt et depuis lors elle a été le sujet favori des études de beaucoup de mathématiciens.

CONNAISSANCE MATHÉMATIQUE A LA FIN DE LA RENAISSANCE

Au commencement du dix-septième siècle, on peut dire que les principes fondamentaux de l'arithmétique, de l'algèbre, de la théorie des équations et de la trigonométrie étaient posés et que les grandes lignes de ces sujets, tels que nous les connaissons aujourd'hui, avaient été tracées. Il faut cependant se rappeler qu'il n'existait aucun bon livre classique élémentaire sur ces diverses branches ; leur étude était par suite réservée à ceux qui pouvaient les extraire des volumineux traités, dans lesquels elles se trouvaient enfouies. Bien qu'une grande partie de la notation moderne en algèbre et en trigonométrie eût été introduite, elle n'était pas familière aux mathématiciens, ni même universellement acceptée ; et cette langue spéciale ne s'établit d'une façon définitive que vers la fin du dix-septième siècle. Etant donnée l'absence de bons livres classiques, nous sommes plutôt disposés à admirer la rapidité avec laquelle elle devint d'un usage général, qu'à reprocher à beaucoup d'écrivains l'hésitation qu'ils ont montrée à l'adopter.

Si d'autre part nous nous tournons du côté des mathématiques appliquées, nous constatons que la statique a fait peu de progrès pendant les dix-huit siècles, qui se sont écoulés depuis le temps d'Archimède, et que les fondements de la dynamique ont été posés par Galilée seulement à la fin du seizième siècle. En fait, comme nous le verrons plus loin, la science de la mécanique ne fut pas établie sur des bases satisfaisantes avant le temps de Newton. Les conceptions fondamentales de la mécanique présentent

des difficultés, mais l'ignorance des principes de cette science constatée chez les mathématiciens de cette époque est plus grande qu'on aurait pu le supposer d'après leurs connaissances en mathématiques pures.

En dehors de cette exception, nous pouvons dire que les principes de la géométrie analytique et du calcul infinitésimal étaient nécessaires, pour qu'il fût possible de faire progresser la science. Les premiers sont dus à Descartes en 1637, les derniers ont été trouvés par Newton trente ou quarante ans plus tard : leur introduction marque le commencement de la période des mathématiques modernes.

TROISIÈME PÉRIODE

LES MATHÉMATIQUES MODERNES

L'histoire des mathématiques modernes commence avec l'invention de la géométrie analytique et du calcul infinitésimal. Les mathématiques sont bien plus complexes que dans les deux périodes précédentes : mais, durant les dix-septième et dix-huitième siècles on peut les considérer généralement comme caractérisées par le développement de l'analyse et par ses applications aux phénomènes de la nature.

Nous continuons notre exposition chronologique du sujet.

Le chapitre xv contient l'histoire des quarante années de 1635 à 1675, et l'exposé des découvertes mathématiques de Descartes, Cavalieri, Pascal, Wallis, Fermat et Huygens.

Le chapitre xvi est consacré à la discussion des recherches de Newton.

Le chapitre xvii contient un aperçu des travaux de Leibnitz, de ses successeurs durant la première moitié du dix-huitième siècle (en y comprenant d'Alembert) et de ses contemporains de l'École anglaise jusqu'à la mort de Maclaurin.

Les travaux d'Euler, de Lagrange, de Laplace et de leurs contemporains forment le sujet du chapitre xviii.

Enfin dans le chapitre xix nous avons ajouté quelques notes sur un certain nombre de mathématiciens des temps contemporains; mais nous avons omis à dessein tout renseignement détaillé sur les auteurs encore vivants, et, en partie à cause de ce fait, en partie pour d'autres raisons qui seront données plus loin, notre exposition des mathématiques contemporaines n'a pas la prétention d'embrasser tout le sujet.

CHAPITRE XIV

—

L'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES MODERNES

La démarcation entre cette période et celle traitée dans les six derniers chapitres n'est pas si nette que celle qui existe entre l'histoire des mathématiques grecques et l'histoire des mathématiques au moyen-âge. Les méthodes d'analyse usitées dans le dix-septième siècle et le genre de problèmes traités se modifièrent, mais graduellement ; et les mathématiciens au commencement de cette période étaient en relation immédiate avec ceux de la fin de la dernière période considérée.

Pour cette raison quelques auteurs ont divisé l'histoire des mathématiques en deux phases seulement, considérant ceux qui enseignaient dans les écoles comme les successeurs directs des mathématiciens grecs, et faisant partir l'histoire des mathématiques modernes de l'époque où les livres classiques arabes furent introduits en Europe. La division que nous présentons est, pensons-nous, plus convenable attendu que l'introduction de la géométrie analytique et du calcul infinitésimal provoqua une révolution dans la science et par suite il semble préférable de prendre ces découvertes pour origine de la science moderne.

Le temps qui s'est écoulé depuis l'introduction de ces méthodes représente une époque d'activité intellectuelle incessante, et pendant laquelle les progrès faits en mathématiques furent considérables. L'extension énorme du domaine des connaissances humaines, la masse des matières à examiner, l'absence de vue d'ensemble et mêmes les échos des vieilles controverses concourent à augmenter les difficultés pour l'historien. Comme cependant les faits principaux sont généralement connus et que les ouvrages publiés durant

[illegible] ous pouvons parler de la [illegible] odernes d'une façon plus [illegible] s prédécesseurs, et nous [illegible] à mentionner ceux qui [illegible] progresser la science.

[illegible] es mathématiques, il est [illegible] gique, mais on peut le [illegible] nt le développement des [illegible] endant une certaine pé- [illegible] vaux de chaque mathé- [illegible] travaux. Ou encore dé- [illegible] d'une certaine période [illegible] ppement des différentes [illegible]. Personnellement nous [illegible] ger la question, et à notre [illegible] est à considérer, d'ajouter [illegible] ui de la narration. Il est [illegible] nt plus difficile à mesure [illegible] orsque nous arriverons au [illegible] aire de traiter séparément [illegible] ; en attendant et autant [illegible] ons l'exposé de notre his- [illegible]

[illegible] guer dans l'histoire des [illegible] tinctes.

[illegible] en présence de l'invention [illegible], en 1637, et presque en [illegible] indivisibles, au moyen de [illegible] on les aires, les volumes [illegible] manière analogue à celle [illegible] intégral. La méthode des [illegible] calcul intégral. Quant à la [illegible] é de la considérer comme [illegible] maticien, et comme une [illegible] nt plus puissante que la [illegible] stitue, sans nul doute, un [illegible] permet fréquemment une [illegible] ion dont l'exactitude est

déjà connue, mais elle exige une manière de procéder spéciale pour chaque problème particulier que l'on aborde.

La géométrie analytique nous donne quelques règles simples au moyen desquelles on peut établir une proposition géométrique ou reconnaître son inexactitude.

Dans la seconde période, nous avons l'invention, une trentaine d'années plus tard, du calcul des fluxions ou calcul différentiel.

Toute les fois qu'une quantité varie d'une façon continue suivant une certaine loi (et il en est presque toujours ainsi dans la nature), le calcul différentiel nous permet de suivre son accroissement ou sa décroissance; et le calcul intégral nous fournit le moyen de retrouver la quantité primitive d'après la formule qui donne la loi de variation. Anciennement chacune des diverses fonctions de x, telles $(1 + x)^m$, $\log (1 + x)$, $\sin x$, arc tg. x etc... ne pouvait être développée suivant les puissances croissantes de x qu'au moyen seulement d'un procédé spécial à chaque fonction particulière considérée; mais avec l'aide du calcul différentiel le développement d'une fonction quelconque de x suivant les puissances croissantes de x est, en général, réductible à une règle unique embrassant tous les cas possibles. De même la théorie des maxima et des minima, la détermination des longueurs des courbes et des aires qu'elles limitent, la détermination des surfaces des volumes, des centres de gravité et bien d'autres problèmes, peuvent se ramener à des règles très simples. Les théories des équations différentielles, du calcul des variations, des différences finies, et ne sont plus que le développement des principes de ce calcul.

La géométrie analytique et le calcul différentiel devinrent les principaux instruments des progrès ultérieurs en mathématiques. Chacun d'eux permet de construire une sorte de machine. Pour résoudre un problème, il suffisait de soumettre à son action la fonction particulière traduisant la question, l'équation de la courbe ou de la surface considérée, et le résultat s'obtenait naturellement en effectuant certaines opérations simples. La validité du procédé avait été démontrée une fois pour toutes et on ne se trouvait plus dans l'obligation d'imaginer une méthode spéciale pour chaque fonction, courbe ou surface.

Dans la troisième phase, Huygens, poursuivant les traces de

Galilée, pose les fondements d'une exposition satisfaisante de la dynamique, et Newton en fait une science exacte. Ce dernier mathématicien commença par appliquer les nouvelles méthodes analytiques non seulement à de nombreux problèmes concernant la mécanique des solides et des fluides, mais au système solaire : l'ensemble de la dynamique terrestre et céleste fut ainsi englobé dans le domaine des mathématiques. Il n'est pas douteux que Newton employa le calcul pour obtenir la plupart de ses résultats ; mais il paraît avoir pensé que, s'il établissait ses démonstrations à l'aide d'une science nouvelle qui, à cette époque, était généralement inconnue, ses contemporains (ne connaissant pas le calcul des fluxions) n'auraient pas bien saisi la vérité et l'importance de ses découvertes. Il se détermina en conséquence à donner des démonstrations géométriques de tous les résultats qu'il avait obtenus. C'est pourquoi il présenta ses *Principia* sous cette forme, c'est-à-dire dans une langue que tous les hommes pouvaient alors comprendre. Les théories mécaniques ont été étendues et systématisées sous leur forme moderne par Lagrange et Laplace vers la fin du dix-huitième siècle.

Dans la quatrième phase on applique les mathématiques à la physique. Cette extension du domaine des sciences mathématiques eut pour point de départ les travaux de Newton et d'Huyghens sur la théorie de la lumière, mais c'est au commencement du XIX[e] siècle qu'elle prit tout son développement en s'appuyant sur des observations précises.

Des conséquences nombreuses et d'une grande portée ont été obtenues en physique par suite de l'application des mathématiques aux résultats des observations et des expériences, mais ce qui nous manque aujourd'hui c'est de pouvoir formuler quelques hypothèses simples, dont il serait possible de déduire par l'analyse les phénomènes observés. Si, pour prendre un exemple, il nous était possible de dire en quoi consiste l'électricité, nous pourrions formuler quelques lois simples, dont on déduirait par l'analyse les phénomènes observés de la même manière que Newton déduisit tous les résultats de l'astronomie physique de la loi de gravitation. Toutes les recherches semblent d'ailleurs indiquer qu'il existe entre les différentes branches de la physique une relation intime, par exemple, entre la lumière, la chaleur, l'élasticité, l'électricité et le

[illegible] on de cette relation et des princi- [illegible] le dépendre de l'étude de la phy- [illegible] la connaissance de la physique [illegible] onnaissance de la constitution de la [illegible] la chimie ou de la chimie physique. [illegible] es qui ne nous sont pas encore [illegible] ous ne prétendons pas traiter des [illegible] t encore l'objet de recherches des [illegible] rlerons peu de la physique mathé- [illegible] XIXe siècle.

[illegible] nd une période dans laquelle les [illegible] une immense extension. Beaucoup [illegible] que relativement récente, et nous [illegible] ments que nous pourrions donner [illegible] vrage. Néanmoins quelques uns de [illegible] chapitre XIX.

[illegible] incipalement porté sur les développe- [illegible] re, de l'arithmétique supérieure ou [illegible] e supérieure (comprenant la théorie [illegible] s équations, la discussion des fonc- [illegible] ultiple, et surtout sur la théorie des [illegible]

[illegible] les sujets que nous avons traités et [illegible] es imposées. L'histoire de l'origine [illegible] se ainsi que de son application aux [illegible] dans le cadre de notre sujet. Les [illegible] moitié du dix neuvième siècle des [illegible] cation des mathématiques aux pro- [illegible] nouvelle période qui dépasse les [illegible] us ne faisons allusion à ces sujets [illegible] rit l'histoire future des mathéma- [illegible] aitée.



CHAPITRE XV

HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES DE DESCARTES A HUYGENS (1)

(1635-1675 ENVIRON)

Nous nous proposons dans ce chapitre de considérer l'histoire des mathématiques pendant une période de quarante ans appartenant au milieu du dix-septième siècle. Nous regardons Descartes, Cavalieri, Pascal, Wallis, Fermat et Huygens comme les principaux mathématiciens de ce temps. Nous terminons ce chapitre par une brève énumération des autres savants les plus marquants de cette même époque.

Nous avons déjà constaté que les mathématiciens de cette période, et cette remarque s'applique plus particulièrement à Descartes, Pascal et Fermat, furent grandement influencés par l'enseignement de Képler et de Désargues, et nous répéterons de nouveau que nous considérons ces derniers avec Galilée comme établissant un lien entre les écrivains de la Renaissance et ceux des temps modernes. Nous devons aussi ajouter que les mathématiciens dont les noms figurent dans ce chapitre étaient contemporains, et il est essentiel de se rappeler qu'ils étaient en relation les uns avec les autres, et en général avaient mutuellement connaissance de leurs recherches aussitôt qu'elles étaient publiées.

Descartes (2). — En tenant compte des remarques précédentes nous pouvons considérer Descartes comme le premier représentant

(1) Voir CANTOR, parl. XV, vol. II, pp. 599-844 : les autres autorités pour les mathématiciens de cette période sont mentionnées dans les notes.

(2) Voir *La vie de Descartes* par A. BAILLET, 2 vol., Paris 1691 qui est résumée dans le vol. I de l'ouvrage *Geschichte der neuern Philosophie* de K. FISCHER,

de l'école moderne. *René Descartes* naquit près de Tours le 31 mars 1596, et mourut à Stockholm le 11 février 1650 : il était ainsi contemporain de Galilée et de Desargues. Son père avait l'habitude de passer la moitié de l'année à Rennes quand le parlement de Bretagne, dont il était conseiller, tenait sa session, et le reste du temps dans sa terre de famille de La Haye-Descartes. René, le second garçon d'une famille composée de deux fils et d'une fille, fut envoyé à l'âge de huit ans au collège des Jésuites de La Flèche, et il parle fort avantageusement de l'admirable discipline qui régnait dans cet établissement et de l'instruction qu'on y recevait. A cause de sa santé délicate on lui permettait de rester au lit le matin ; c'est une habitude qu'il conserva toujours et, quand il visita Pascal en 1647 il lui raconta que sa seule manière de produire un bon travail en mathématiques, et de conserver sa santé, était de ne permettre à personne de venir le faire lever le matin avant qu'il n'en ressentît le désir. Nous rapportons ce petit fait au profit de tout écolier entre les mains duquel cet ouvrage pourrait tomber.

En quittant le collège en 1612, Descartes se rendit à Paris pour faire son entrée dans le monde. Là, par l'intermédiaire des Jésuites, il fit connaissance de Mydorge et renoua avec Mersenne son amitié de collège ; il consacra avec eux les deux années de 1615 et 1616 à l'étude des mathématiques. A cette époque un homme de condition entrait généralement dans l'armée ou dans l'église ; Descartes se fit soldat, et en 1617 il rejoignit l'armée de Maurice de Nassau, prince d'Orange. De passage à Breda, se promenant un jour dans les rues de cette ville, il vit une affiche en hollandais qui excita sa curiosité, et arrêtant un passant il lui demanda d'en faire la traduction soit en français, soit en latin. L'étranger, qui par hasard était Isaac Beeckman, principal du Collège Hollandais de Dort, s'engagea à le faire si Descartes répondait à la question qui était posée, l'affiche étant, en fait, un défi lancé à tout l'univers, et relatif à la solution d'un problème de géométrie.

Munich, 1878. On trouve un exposé assez complet des recherches mathématiques et physiques de Descartes dans l'*Encyclopädie* de Ersch et Gruber. L'édition la plus complète de ses œuvres est celle de Victor Cousin en 11 vol. Paris 1824-6. Quelques notes de moindre importance découvertes par la suite furent publiées par F. de Careil, Paris, 1859.

Descartes le résolut au bout de quelques heures et ce fut l'origine d'une vive amitié entre lui et Beeckman. Cet essai inattendu de ses dispositions mathématiques lui rendit odieuse la vie oisive qu'il menait à l'armée, mais cédant à des influences de famille et à la tradition il resta soldat. Au commencement de la guerre de trente ans, on le décida à entrer comme volontaire dans l'armée de Bavière sous les ordres du comte de Bucquoy. Il continua cependant à consacrer ses loisirs à des études mathématiques, et il avait l'habitude de faire remonter l'origine de ses premières idées sur sa philosophie nouvelle et sa géométrie analytique à trois rêves qu'il eut dans la nuit du 10 novembre 1619 à Neuberg, lorsqu'il faisait campagne sur le Danube. Il considérait ce jour comme le plus important de son existence, celui qui décida de son avenir.

Il se retira de l'armée dans le courant du printemps de l'année 1621 et passa les cinq années qui suivirent en voyages, pendant lesquels il consacra la plus grande partie de son temps à l'étude des mathématiques pures. En 1626 nous le trouvons établi à Paris. Il avait la taille petite mais bien tournée, toujours modestement vêtu de taffetas vert et portant seulement, comme marque de sa condition, l'épée au côté et la plume au chapeau. » Durant les deux premières années de son séjour dans cette ville il se mêla à la société et passa son temps à s'occuper de la construction d'instruments d'optique; mais ces distractions constituaient simplement le délassement d'un esprit qui n'avait pu trouver encore cette théorie de l'univers qu'il était bien convaincu de découvrir un jour.

En 1628 le cardinal de Berulle, le fondateur des oratoriens, rencontra Descartes et fut si impressionné par sa conversation, qu'il lui dit que c'était un devoir de consacrer sa vie à la recherche de la vérité. Descartes y consentit et pour se mettre à l'abri des importuns, il se rendit en Hollande qui avait alors atteint l'apogée de sa puissance. Il y séjourna vingt ans, consacrant tout son temps à la philosophie et aux mathématiques. La science, dit-il, peut être comparée à un arbre, ayant pour racine la métaphysique, pour tronc la physique, et dont les trois principales branches sont : la mécanique, la médecine et les préceptes moraux, qui constituent les trois applications de nos connaissances, au monde extérieur, au corps humain, et à la conduite de la vie.

Il consacra les quatre premières années de son séjour en

Hollande, 1629 à 1633, à écrire *Le Monde* qui comprend un essai de théorie physique de l'Univers, mais trouvant que sa publication était de nature à lui attirer l'hostilité de l'Eglise, et n'ayant aucun goût pour le martyre, il l'abandonna : le manuscrit incomplet fut publié en 1664. Il résolut ensuite de composer un traité sur la science universelle, qui fut publié à Leyde en 1637 sous le titre : *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences ;* il était accompagné de trois appendices (qui peut-être n'ont pas été composés avant 1638) intitulés : *La Dioptrique, Les Météores et La Géométrie.* C'est l'origine de la géométrie analytique. En 1641 il publia un ouvrage appelé *Meditationes* dans lequel il explique jusqu'à un certain point ses vues philosophiques esquissées dans les *Discours.* En 1644 il fit paraître les *Principia Philosophiæ* dont la majeure partie est consacrée à la science physique, spécialement aux lois du mouvement et à la théorie des tourbillons. En 1647 le roi de France lui fit une pension en l'honneur de ses découvertes. Il se rendit en Suède en 1649 sur l'invitation de la reine Christine, et mourut quelques mois après d'une inflammation des poumons.

Au physique, Descartes était petit avec une grosse tête, un front saillant, un nez proéminent, et une chevelure noire tombant sur ses sourcils, sa voix était faible. Par nature il était froid et plutôt égoïste. Eu égard à l'étendue de ses études ce n'était pas un érudit, et il méprisait la science et les arts qui n'étaient pas susceptibles de quelque application. Il ne voulut jamais se marier et ne laissa aucun descendant bien qu'il ait eû une fille naturelle qui mourut jeune.

En ce qui concerne ses théories philosophiques, il nous suffira de dire qu'il s'attaqua aux problèmes qui ont été débattus depuis deux mille ans, et qui seront probablement discutés encore avec la même ardeur pendant deux mille ans. Il est à peine nécessaire de faire observer que ces problèmes sont par eux-mêmes d'un intérêt capital, mais que par leur nature même aucune solution n'est susceptible d'une démonstration ou d'une réfutation rigoureuse ; tout ce qu'il est possible de faire est de fournir une solution plus probable qu'une autre et les erreurs, même d'un Descartes, ont pu être réfutées par ses successeurs.

Nous avons lu quelque part que la philosophie a toujours eu

pour principal objet l'étude des rapports entrent Dieu, la nature et l'homme. C'est la Grèce qui produisit les premiers philosophes : ils s'occupèrent principalement des relations entre Dieu et la nature, l'homme étant considéré séparément. L'Eglise chrétienne s'absorbe dans l'étude des relations entre Dieu et l'homme au point de négliger entièrement la nature. Enfin les philosophes modernes traitèrent particulièrement des relations entre l'homme et la nature. Notre intention n'est pas de discuter ces opinions diverses, il nous suffit de dire que c'est Descartes qui a le premier envisagé la philosophie à la manière des modernes.

Les principaux travaux mathématiques de Descartes sont exposés dans sa géométrie et sa théorie des tourbillons ; c'est sa géométrie qui constitue la base la plus solide de sa réputation.

La géométrie analytique ne consiste pas simplement (comme on le dit quelquefois trop légèrement) dans l'application de l'algèbre à la géométrie : cette application avait été déjà faite par Archimède et par bien d'autres, et elle était devenue la façon usuelle d'opérer dans les ouvrages des mathématiciens du seizième siècle. Le grand progrès accompli par Descartes tient à ce qu'il vit nettement, d'une part que la position d'un point dans un plan, peut être complètement déterminée par ses distances x et y, à deux droites fixes tracées à angle droit dans le plan, avec la convention qui nous est familière pour l'interprétation des valeurs positives et négatives ; il montra d'autre part que bien qu'une équation telle que $f(xy) = 0$ soit indéterminée et puisse être satisfaite par une infinité de valeurs de x et y, cependant ces valeurs de x et y déterminent les coordonnées d'un certain nombre de points dont l'ensemble forme une courbe et que l'équation $f(xy) = 0$ exprime les propriétés géométriques, communes à tous les points de la courbe. Descartes vit aussi qu'un point de l'espace pouvait être déterminé d'une manière identique par trois coordonnées, mais il ne s'occupa que des courbes planes.

Il était dès lors évident que pour rechercher les propriétés d'une courbe il suffisait de choisir comme définition, une propriété géométrique caractéristique de cette courbe et de l'exprimer au moyen d'une équation entre les coordonnées (ordinaires) d'un point quelconque de la courbe, c'est-à-dire de traduire la définition dans la langue spéciale à la géométrie analytique. L'équation ainsi obtenue contient implicitement chacune des propriétés de la courbe,

...lconque peut s'en déduire par
...de la forme de la courbe. Tout
... façon confuse par les anciens
...in et mit en évidence ces faits
...eurs courbes peuvent être rap-
...de coordonnées et que les points
... déterminent en cherchant les
...ions.

...entrer dans de plus longs dé-
...que tous ceux qui comprennent
...naissance de la géométrie analy-
...ortance de la découverte de

...visée en trois livres : les deux
...étrie analytique et le troisième
... telle qu'elle existait à l'époque.
... son raisonnement, mais l'obscu-
...ien omis », dit-il, « qu'à dessein.
... qui se vantent de savoir tout
...ue je n'avais rien écrit qu'ils
...e fusse rendu assez intelligible

... exposition des principes de la
... discussion d'un problème parti-
...appus dans le septième livre de
...particuliers avaient été traités par
...e général avait échappé aux géo-
... essais tentés pour arriver à le
...tes à l'invention de la géométrie
...problème est plutôt confus, mais
... trouver le lieu des points tels
...s abaissées de chacun d'eux sur
...ns un rapport constant avec le
...issées sur n autres lignes droites

...e solution géométrique pour les
... 1 et $m = 1$ avec $n = 2$. Pappus
...$= n = 2$, le lieu était une conique

mais il ne donnait aucune preuve à l'appui ; Descartes ne réussit pas à trouver une solution par la géométrie pure, mais il montra que la courbe était représentée par une équation du second degré, c'est-à-dire qu'elle était une conique; Newton fournit dans la suite une élégante solution du problème par la géométrie pure.

Dans le second livre, Descartes divise les courbes en deux classes : les courbes géométriques et les courbes mécaniques. Il définit les premières comme étant celles qui peuvent être engendrées par l'intersection de deux lignes se déplaçant chacune parallèlement aux axes des coordonnées avec des vitesses « commensurables » ; il veut dire par là que dy/dx est une fonction algébrique, comme c'est le cas, par exemple, pour l'ellipse et la cissoïde. Il appelle la courbe, mécanique, quand le rapport des vitesses des mêmes lignes définies plus haut est « incommensurable » ; c'est-à-dire quand dy/dx est une fonction transcendante, comme par exemple c'est le cas pour la cycloïde et la quadratrice. Descartes se borna à étudier les courbes géométriques sans traiter la théorie des courbes mécaniques. La classification actuelle en courbes algébriques et transcendantes est due à Newton.

Descartes s'occupa aussi d'une façon particulière de la théorie des tangentes aux courbes, ainsi qu'il paraît résulter de son système de classification dont il vient d'être parlé. A cette époque la tangente en un point d'une courbe était définie : la ligne droite menée par ce point de telle sorte qu'aucune autre droite ne puisse être tracée entre elle et la courbe, c'est-à-dire la ligne droite de contact le plus étroit. Descartes proposa de substituer à cette définition une autre qui revenait à considérer la tangente comme la position limite de la sécante ; Fermat, et à une date plus reculée Maclaurin et Lagrange adoptèrent cette définition. Barrow, suivi par Newton et Leibnitz considérait une courbe comme la limite d'un polygone inscrit dont les côtés deviennent infiniment petits et montrant qu'un côté du polygône devient à la limite tangent à la courbe. Roberval d'un autre côté définissait la tangente en un point d'une courbe comme la direction du mouvement d'un point mobile décrivant cette courbe, à l'instant où il se trouve au point considéré. Quelle que soit la définition choisie on arrive au même résultat, mais la question de savoir quelle était la meilleure définition de la tangente provoqua une controverse très animée. Comme application

de sa théorie Descartes donna une règle générale pour tracer les tangentes et les normales à la roulette.

La méthode employée par Descartes pour trouver la tangente ou la normale en un point quelconque d'une courbe donnée était en substance la suivante. Il déterminait le centre et le rayon d'un cercle passant par le point donné qui devait couper la courbe en deux points consécutifs. La tangente au cercle en ce point devenait tangente à la courbe quand les deux points d'intersection du cercle avec la courbe venaient à se confondre avec le point considéré. Dans les ouvrages modernes on exprime généralement la condition que les deux points où une droite (telle que $y = mx + c$) coupe la courbe doivent coïncider avec le point considéré : ceci permet de déterminer m et c et par suite d'écrire l'équation de la tangente en ce point. Descartes cependant ne procédait pas ainsi, mais choisissant un cercle comme la courbe la plus simple à laquelle il savait mener une tangente, il traçait son cercle de façon à lui faire toucher la courbe au point en question, et ramenait ainsi le problème au tracé d'une tangente à un cercle. Nous noterons en passant qu'il n'appliqua sa méthode qu'aux courbes symétriques par rapport à un axe, sur lequel il prenait le centre du cercle.

Le style systématiquement obscur adopté par Descartes fut un obstacle à la diffusion et l'appréciation immédiate de ses ouvrages, mais une traduction latine avec notes explicatives fut préparée par F. de Beaune, et une édition avec un commentaire par F. Van Schooten, publiée en 1659 eut un grand succès.

Le troisième livre de la *géométrie* contient une analyse de l'algèbre telle qu'elle existait à cette époque, mais il en modifia la langue, en employant les lettres du commencement de l'alphabet pour les quantités connues et celle de la fin pour les quantités inconnues (1). De plus Descartes introduisit le système des indices encore en usage ; très vraisemblablement c'était une nouveauté pour lui, mais nous devons rappeler ici que des écrivains antérieurs en avaient déja suggéré l'idée bien que cette notation n'eut pas été généralement adoptée. On ne sait si Descartes pensa que les lettres pouvaient représenter une quantité quelconque, positive ou néga-

(1) Sur l'origine de l'usage du signe x pour représenter une inconnue, voir une note par G. Eneström dans la *Bibliotheca Mathematica*, 1885, p. 43.

tive, et qu'il était suffisant de démontrer une proposition pour un seul cas général. C'est le plus ancien auteur qui ait remarqué qu'il était commode de faire passer tous les termes d'une équation dans un seul membre, bien que Stifel et Harriot eussent déjà adopté cette disposition dans plusieurs cas. Il donna la signification des quantités négatives et les employa couramment. Il fit usage dans cet ouvrage de la règle qui porte encore son nom pour trouver une limite du nombre des racines positives et négatives d'une équation algébrique ; et il introduisit la méthode des coefficients indéterminés pour la solution des équations. Il pensait avoir donné une méthode permettant de résoudre les équations algébriques de degré quelconque, mais il y a là une erreur de sa part. Il fit usage de la méthode des coefficients indéterminés. On peut aussi rappeler qu'il énonça le théorème, communément attribué à Euler, sur la relation qui existe entre le nombre des faces, des sommets et des angles d'un polyèdre.

L'un des deux appendices ou *Discours* était consacré à *l'Optique*. Son principal intérêt consiste dans l'établissement de la loi de la réfraction. Cet exposé parait avoir été emprunté à l'ouvrage des Snellius, bien que la façon dont il est présenté puisse laisser croire qu'il est dû aux recherches de Descartes. Il aurait, semble-t-il, reproduit à Paris en 1626 ou 1627 les expériences de Snellius, et il est possible qu'il ait oublié par la suite ce qu'il devait aux anciennes recherches de ce savant. Une grande partie de l'optique est consacrée à la détermination de la meilleure forme à donner aux lentilles d'un télescope, mais les difficultés mécaniques que l'on éprouvait à dresser les surfaces du verre pour leur donner la forme exigée étaient alors trop grande pour que ces recherches eussent la moindre utilité pratique. Descartes ne paraît pas avoir été fixé sur la question de savoir si l'on doit regarder les rayons lumineux comme émanant de l'œil et allant pour ainsi dire frapper les objets (comme le croyaient les Grecs) ou si au contraire on doit les considérer comme partant de l'objet et venant impressionner l'œil, mais comme il supposait la vitesse de la lumière infinie il est probable que cette question n'avait pour lui aucune importance.

L'autre appendice sur *Les Météores* contient une explication de nombreux phénomènes atmosphériques, et entre autres celle de l'arc en ciel ; cette dernière est nécessairement incomplète, attendu que

Descartes ignorait que l'indice de réfraction d'une substance n'est pas le même pour les lumières de différentes couleurs.

La théorie physique de l'univers de Descartes comprenant la plupart des résultats contenus dans son ancien ouvrage non publié *Le Monde* est exposé dans ses *Principia*, 1644, et repose sur des bases métaphysiques. Il commence par une discussion du mouvement, puis il énonçe dix lois de la nature dont les deux premières sont à peu près identiques aux deux premières lois du mouvement telles qu'elles ont été données par Newton ; les huit dernières sont inexactes.

Il passe ensuite à l'examen de la nature de la matière qu'il regarde comme d'espèce uniforme bien qu'elle se présente sous trois formes. Il suppose que la matière de l'univers doit être en mouvement et que ce mouvement se décompose en un certain nombre de tourbillons. Pour lui le soleil est le centre d'un immense tourbillon de cette matière dans laquelle les planètes flottent et tournent en rond comme une paille dans un tourbillon d'eau. Chaque planète est à son tour le centre d'un tourbillon secondaire entraînant les satellites dans son mouvement : ces tourbillons secondaires produisent des variations de densité dans le milieu environnant qui constitue le premier tourbillon, et il en résulte que les planètes décrivent des ellipses et non des cercles. Toutes ces suppositions sont arbitraires et ne sont appuyées sur aucune observation. Il n'est pas difficile de prouver qu'avec cette hypothèse, le soleil serait au centre des ellipses et non à l'un des foyers (comme l'a établi Képler), et que le poids d'un corps en un point quelconque de la surface de la terre en dehors de l'équateur, agirait suivant une direction ne coincidant pas avec la verticale ; mais il suffira de dire ici que Newton, dans le second livre des *Principia*. 1687, a examiné cette théorie en détail et a montré que ses conséquences sont non seulement incompatibles avec chacune des lois de Képler et avec les lois fondamentales de la mécanique, mais sont aussi en désaccord avec les lois de la nature admises par Descartes lui-même.

Cependant en dépit de son caractère informe et de ses imperfections la théorie des tourbillons marque en astronomie une ère nouvelle, c'est une tentative pour expliquer les phénomènes de l'univers entier par les lois mécaniques.

Cavaliéri (2). — Presqu'en même temps que Descartes publiait sa géométrie, c'est-à-dire vers 1637, les principes du calcul intégral, limité aux sommations, étaient étudiés en Italie. Les calculs s'effectuaient au moyen de ce qu'on a appelé la méthode des indivisibles dont l'invention revient à Cavaliéri. Il l'appliquait ainsi que ses contemporains à de nombreux problèmes sur la quadrature des courbes et des surfaces, à la détermination des volumes, des centres de gravité. Il remplaçait ainsi la pénible méthode d'exhaustion des géomètres grecs; ces diverses méthodes sont au fond identiques mais la notation des indivisibles est plus concise et plus convenable. Les indivisibles furent à leur tour remplacés au commencement du dix-huitième siècle par le calcul intégral.

Bonaventure Cavalieri naquit à Milan en 1598 et mourut à Bologne le 27 novembre 1647. Encore fort jeune il entra dans l'ordre des Jésuites et sur la recommandation de ses supérieurs il fut nommé en 1629 professeur de mathématiques à Bologne, où il professa jusqu'à sa mort. Nous avons déjà mentionné le nom de Cavalieri au sujet de l'introduction en Italie de l'usage des logarithmes, et nous avons fait allusion à sa découverte de l'expression de l'aire d'un triangle sphérique en fonction de l'excès sphérique. Ce fut l'un des mathématiciens les plus considérables de son temps, mais sa réputation repose principalement sur l'invention du principe des indivisibles.

Le principe des indivisibles avait été employé par Képler en 1604 et 1615 sous une forme un peu primitive. Il fut établi pour la première fois par Cavalieri en 1629 mais il ne publia pas ses résultats avant 1635. Dans le premier exposé de sa méthode qu'il donna en 1625, Cavalieri admettait qu'une ligne était formée par un nombre infini de points (chacun sans grandeur), une surface par un nombre infini de lignes (chacune sans largeur) et un volume par un nombre infini de surfaces (chacune sans épaisseur). Pour répondre aux objections présentées par Guldin et d'autres savants cette exposition fut remaniée, et sous sa dernière forme, qui est celle employée par les mathématiciens du dix-septième siècle, elle a été

(1) La vie de Cavaliéri a été écrite par P. Frisi, Milan, 1778 ; par F. Predari, Milan 1843 ; par Gabrio Piola, Milan, 1844 ; et par A. Favaro, Bologne, 1888. On trouve une analyse de ses œuvres dans *l'Histoire des Sciences mathématiques et Physiques* de M. Marie, Paris, 1885-8 vol. IV pp. 69-90.

publiée en 1647 dans les *Exercitationes Geometricæ* de Cavalieri; le troisième exercice est consacré à la défense de la théorie. Ce livre renferme la plus ancienne démonstration des propriétés découvertes par Pappus. Les œuvres de Cavalieri sur les indivisibles ont été rééditées en 1653 avec ses dernières corrections.

La méthode des indivisibles repose en fait, sur cette hypothèse que toute grandeur est divisible en un nombre infini de petites quantités qui peuvent être choisies de façon à avoir entre elles un rapport donné quelconque (le cas d'égalité non exclus). L'analyse présentée par Cavalieri ne vaut guère la peine d'être reproduite si ce n'est pour signaler que c'est le premier pas fait vers la création du calcul infinitésimal. Un exemple suffira. Supposons que l'on demande de trouver l'aire d'un triangle rectangle. Considérons la base comme formée ou comme contenant n points (ou indivisibles) et semblablement considérons l'autre côté comme contenant na points, alors les ordonnées aux points successifs de la base contiendront a, $2a$, $3a$,... na points. Par conséquent le nombre des points renfermés dans l'aire est

$$a + 2a + 3a + \dots + na$$

et cette somme est égale à

$$\frac{1}{2} n^2a + \frac{1}{2} na.$$

Puisque n est très grand, nous pouvons négliger la quantité $\frac{1}{2} na$ comme insignifiante à côté de $\frac{1}{2} n^2a$ et l'air est

$$\frac{1}{2} (na) \times a.$$

c'est-à-dire $\frac{1}{2}$ hauteur $\times$ base.

Il serait facile de critiquer cette démonstration quoique présentée sous une forme inacceptable, elle est correcte en substance.

On aurait une fausse idée de la méthode des indivisibles en la jugeant seulement d'après l'exemple précédent, aussi en développerons-nous un autre emprunté à un écrivain plus récent, exemple de nature à bien faire saisir la méthode modifiée et rectifiée par l'emploi des limites.

Proposons nous de trouver l'expression de l'aire limitée par un arc de parabole APC, par la tangente en A à cette parabole et par

un diamètre quelconque DC. Complétons le parallélogramme ABCD et divisons AD en n parties égales. Prenons la longueur AM égale à r de ces parties et soient MN la $(r+1)^e$ partie. Menons MP, NQ parallèles à AB et traçons PR parallèle à AD. Lorsque n devient

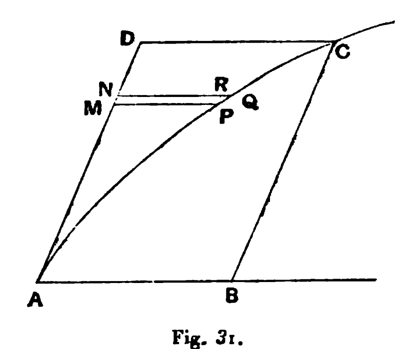


Fig. 31.

infiniment grand, l'aire curviligne APCD peut être considérée comme la limite de la somme des parallélogrammes tels que PN. Maintenant on a

$$\frac{\text{aire PN}}{\text{aire BD}} = \frac{\text{MP. MN}}{\text{DC. AD}}.$$

Mais d'après une propriété connue des paraboles

$$\frac{\text{MP}}{\text{DC}} = \frac{\text{AM}^2}{\text{AD}^2} = \frac{r^2}{n^2},$$

et

$$\frac{\text{MN}}{\text{AD}} = \frac{1}{n}:$$

par suite

$$\frac{\text{MP.MN}}{\text{DC.AD}} = \frac{r^2}{n^3}.$$

On a donc

$$\frac{\text{aire PN}}{\text{aire BD}} = \frac{r^2}{n^3};$$

on en déduit facilement

$$\frac{\text{aire APCD}}{\text{aire BD}} = \frac{1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2}{n^3} = \frac{\frac{1}{6}\,n(n-1)(2n-1)}{n^3}.$$

et à la limite

$$\frac{\text{aire APCD}}{\text{aire BD}} = \frac{1}{3}.$$

Il est peut être utile de faire remarquer que Cavalieri et ses successeurs employèrent toujours la méthode des indivisibles pour déterminer les rapports de deux aires, de deux volumes ou de deux grandeurs de même nature; jamais ils ne parlèrent d'une aire contenant un certain nombre d'unités d'aire.

L'idée de comparer une grandeur avec une unité de même espèce semble appartenir à Wallis.

Il est évident que sous sa forme directe la méthode n'est applicable qu'à quelques courbes. Cavalieri prouvait que si m est un entier positif, la limite de

$$\frac{1^m + 2^m + \ldots + n^m}{n^{m+1}} \quad \text{pour } n \text{ infini est} \quad \frac{1}{m+1},$$

ce qui revient à dire qu'il trouva l'intégrale de x^m, de $x = 0$ à $x = 1$; il discuta également la quadrature de la parabole.

Pascal [1]. — Parmi les contemporains de Descartes aucun ne fit preuve d'un plus grand génie naturel que Pascal, mais sa réputation mathématique repose plus sur ce qu'il aurait pu faire que sur ce qu'il a produit en réalité, attendu que durant une grande partie de sa vie, il regarda comme un devoir de consacrer tout son temps aux pratiques de la religion.

Blaise Pascal naquit à Clermont le 19 juin 1623 et mourut à Paris, le 19 août 1662. Son père, président à la Cour des Aides de Clermont, avait lui-même une certaine réputation comme homme de science. Il vint s'établir à Paris en 1631, autant pour poursuivre ses propres études scientifiques, que pour s'occuper de l'instruction de son fils dont il avait déjà pu apprécier l'intelligence exceptionnelle. Pascal fut gardé à la maison, son père voulant éviter

(1) Voir PASCAL par J. BERTRAND, Paris, 1891 ; et *Pascal sein Leben und seine Kämpfe*, par J. G. DREYDORFF, Leipzig, 1870. La vie de PASCAL écrite par sa sœur Mme PÉRIER, fut éditée par A. P. FAUGÈRE, Paris, 1845, et a formé la base de plusieurs ouvrages. Une édition de ses écrits fut publiée en 5 volumes à La Haye en 1779, seconde édition, Paris 1819 ; quelques opuscules additionnels et des lettres furent publiés en 3 volumes à Paris en 1858.

tout surmenage à l'enfant, et dans ce même but il décida que son instruction serait tout d'abord limitée à l'étude des langues et ne comprendrait pas celle des mathématiques. La curiosité de l'enfant fut naturellement excitée par cette restriction, et un jour, il avait alors douze ans, il demanda à son père en quoi consistait la géométrie. Son père lui répondit que c'était la science qui apprenait à construire des figures exactes et à déterminer les rapports pouvant exister entre leurs différents éléments ; Pascal, stimulé sans aucun doute par la défense qui lui avait été faite, consacra à cette nouvelle étude le temps qu'on lui laissait pour ses jeux, et en quelques semaines il parvint à découvrir de lui-même plusieurs propriétés des figures et en particulier cette proposition que la somme des angles d'un triangle est égale à deux angles droits. Son père frappé par cette preuve d'intelligence lui donna un exemplaire des *Eléments* d'Euclide, livre que Pascal lut avec ardeur et ne tarda pas à posséder à fond.

A l'âge de quatorze ans Roberval, Mersenne, Mydorge et plusieurs autres géomètres français l'admirent dans leurs réunions hebdomadaires : c'est de ces réunions qu'est sortie plus tard l'Académie Française.

A seize ans Pascal écrivit un essai sur les sections coniques ; et en 1641, à l'âge de dix-huit ans, il construisit la première machine arithmétique, instrument qu'il perfectionna de nouveau huit ans plus tard. Sa correspondance avec Fermat vers cette époque montre que son attention était tournée vers la géométrie analytique et la physique. Il reproduisit les expériences de Torricelli qui permettaient d'évaluer en poids la pression atmosphérique, et il confirma sa théorie relativement à la cause des variations barométriques par des relevés faits au même instant à différentes altitudes sur la montagne du Puy-de-Dôme.

En 1650, Pascal abandonna subitement ses recherches scientifiques pour s'absorber dans l'étude de la religion, ou comme il dit dans ses *Pensées* « pour contempler la grandeur et la misère de l'homme » ; et à peu près à la même époque il persuada à la plus jeune de ses sœurs d'entrer dans la communauté de Port Royal.

En 1653 il eut à administrer les biens de sa famille. Il reprit alors son ancienne existence et fit plusieurs expériences sur la pression exercée par les gaz et les liquides : ce fut également vers

cette époque qu'il imagina le triangle arithmétique, et créa avec Fermat le calcul des probabilités. Il songeait à se marier quand un accident lui fit de nouveau tourner ses pensées vers la religion. Le 23 novembre 1654 il conduisait un attelage, lorsque les chevaux s'emballèrent; les deux conducteurs sautèrent par dessus le parapet du pont de Neuilly, et Pascal ne dut son salut qu'à la rupture des traits. Toujours porté quelque peu au mysticisme il considéra cet événement comme un avertissement pressant d'avoir à abandonner le monde. Il écrivit le récit de l'accident sur un petit morceau de parchemin, qu'il garda sur sa poitrine jusqu'à sa mort, afin d'avoir toujours présent à l'esprit l'engagement qu'il avait pris ; peu après il se rendit à Port Royal où il vécut jusqu'à sa mort en 1662. D'une constitution débile, il avait détruit sa santé par ses études incessantes ; depuis l'âge de dix-sept ou dix-huit ans il souffrait d'insommie et d'une dyspepsie aiguë, et sa mort ne fut que le résultat d'un épuisement prématuré.

Ses fameuses *Lettres Provinciales* contre les Jésuites et ses *Pensées* ont été écrites vers la fin de sa vie, et offrent le premier exemple de cette forme achevée qui caractérise la plus belle littérature française. Le seul ouvrage mathématique qu'il composa après sa retraite à Port Royal fut son essai sur la cycloïde en 1658.

Nous allons maintenant passer à un examen un peu plus détaillé de ses œuvres mathématiques.

Son premier essai sur la *Géométrie des coniques*, écrit en 1639 mais publié seulement en 1779, semble être basé sur l'enseignement de Desargues. Deux des résultats qu'il a trouvés sont aussi importants qu'intéressants. Le premier est la proposition connue sous le nom de « Théorème de Pascal » à savoir que si un hexagone est instruit dans une conique, les points de rencontre des côtés opposés sont en ligne droite. Le second qui est dû en réalité à Desargues, est cette propriété que lorsqu'un quadrilatère est instruit dans une conique, si l'on trace une ligne droite coupant les côtés pris en ordre aux points A, B, C, D et la conique en P et Q, on a la relation :

$$\frac{PA.PC}{PB.PD} = \frac{QA.QC}{QB.QD}.$$

Pascal fit connaître son *triangle arithmétique* en 1653, mais aucun exposé de sa méthode ne fut imprimé avant 1665. Le tri-

angle est construit comme le représente la figure ci-après, chaque ligne horizontale se déduisant de la précédente en prenant chaque nombre de la ligne à former égal à la somme de tous ceux qui se trouvent à sa gauche dans la ligne précédente, jusque et y compris

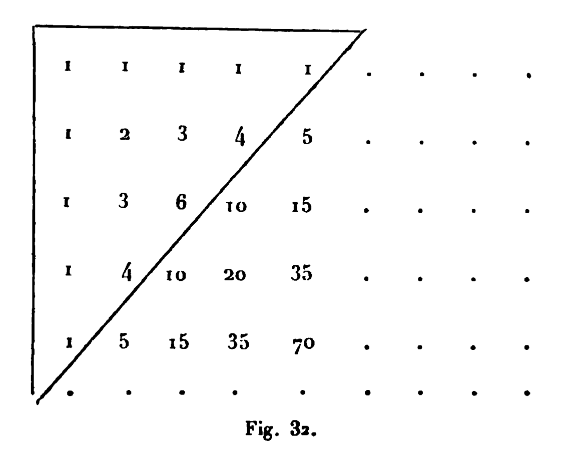


Fig. 32.

le nombre immédiatement au dessus de celui que l'on forme; par exemple, le quatrième nombre dans la quatrième ligne, c'est-à-dire 20, est égal à $1 + 3 + 6 + 10$. Les nombres qui composent chacune des lignes sont ce qu'on appelle aujourd'hui des nombres *figurés*. Ceux qui entrent dans la première ligne sont les figurés du premier ordre; ceux de la seconde ligne sont les nombres naturels ou les figurés du second ordre; ceux de la troisième sont les figurés du troisième ordre, et ainsi de suite. On voit facilement que le m^e nombre de la n^e ligne est

$$\frac{(m+n-2)!}{(m-1)!\,(n-1)!}$$

On obtient le triangle arithmétique de Pascal (jusqu'à un ordre demandé quelconque) en traçant une diagonale de droite à gauche comme le montre notre figure. Les nombres contenus dans chaque diagonale donnent les coefficients des termes entrant dans le développement du binôme : par exemple, les figures de la cinquième diagonale, 1, 4, 6, 4, 1, sont les coefficients du développement de $(a+b)^4$. Pascal employait également le triangle arithmétique pour trouver les nombres de combinaisons de m objets pris n à n; il

avait d'ailleurs établi (d'une façon correcte) que ces nombres étaient fournis par la formule

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)\ldots m}{(m-n)!}$$

Comme mathématicien Pascal est peut-être mieux connu par sa correspondance avec Fermat en 1654, où on trouve les principes de la *Théorie des probabilités*. Cette correspondance eut pour cause un problème proposé à Pascal par un joueur célèbre de l'époque, le Chevalier de Méré, que Pascal communiqua à Fermat. Voici en quoi il consistait. Deux joueurs, de force égale, désirent abandonner la partie avant la fin du jeu. Les mises et le nombre des points qui constituent le jeu étant donnés, on désire savoir dans quelle proportion les enjeux doivent être partagés. Pascal et Fermat tombèrent d'accord dans la réponse, mais donnèrent des démonstrations différentes. Nous reproduisons ci-après la solution de Pascal. Celle de Fermat sera donnée plus loin.

« Voici à peu près comme je fais pour savoir la valeur de cha-
« cune des parties quand deux joueurs jouent par exemple en 3
« parties, et chacun a mis 32 pistoles au jeu.

« Posons que le premier en ait deux et l'autre une ; ils jouent
« maintenant une partie dont le sort est tel, que si le premier la
« gagne, il gagne tout l'argent qui est au jeu, savoir 64 pistoles :
« si l'autre la gagne il sont deux parties à deux parties ; et par
« conséquent s'ils veulent se séparer, il faut qu'ils retirent chacun
« leur mise, savoir, chacun 32 pistoles. Considérez donc, monsieur,
« que si le premier gagne, il lui appartient 64 ; s'il perd, il lui
« appartient 32. Donc s'ils ne veulent point hasarder cette partie,
« et se séparer sans la jouer, le premier doit dire : je suis sûr
« d'avoir 32 pistoles, car la perte même me les donne ; mais pour
« les 32 autres, peut-être je les aurai peut-être vous les aurez ; le
« hasard est égal ; partageons donc ces 32 pistoles par la moitié,
« et donnez-moi outre cela mes 32 qui me sont sures. Il aura donc
« 48 pistoles et l'autre 16.

« Posons maintenant que le premier ait deux parties, l'autre
« point, et qu'ils commencent à jouer une partie. Le sort de cette
« partie est tel, que si le premier la gagne, il tire tout l'argent, 64
« pistoles, si l'autre la gagne, les voilà revenus au cas précédent

« auquel le premier aura deux parties et l'autre une. Or, nous « avons déjà montré qu'en ce cas il appartient à celui qui a les « deux parties 48 pistoles ; donc s'ils veulent ne point jouer cette « partie, il doit dire ainsi : si je la gagne, je gagnerai tout qui est « 64 ; si je la perds, il m'appartiendra légitimement 48. Donc « donnez-moi les 48 qui me sont certaines, au cas même que je « perde, et partageons les 16 autres par la moitié, puisqu'il y a « autant de hasard que vous les gagniez que moi. Ainsi il aura 48 « et 8 qui font 56 pistoles.

« Posons enfin que le premier n'ait qu'une partie et l'autre point. « Vous voyez, monsieur, que s'ils commencent une partie nouvelle « le sort en est tel, que si le premier la gagne il aura deux parties « à point, et partant par le cas précédent, il lui appartient 56 ; s'il « la perd, ils sont partie à partie, donc il lui appartient 32 pistoles. « Donc il doit dire, si vous voulez ne pas la jouer, donnez-moi 32 « pistoles qui me sont sures et partageons le reste de 56 par la « moitié ; de 56 otez 32, reste 24 ; partagez donc 24 par la moitié, « prenez en 12 et moi 12, qui, avec 32, fait 44.

« Or, par ce moyen, vous voyez par les simples soustractions, « que pour la première partie il appartient sur l'argent de l'autre « 12 pistoles, pour la seconde autres 12, pour la dernière 8. »

Pascal continue ensuite en considérant le même problème quand la partie est gagnée par celui qui obtient le premier $m + n$ points, et en supposant que l'un des joueurs a m points et l'autre n points. Il obtient la solution en se servant du triangle arithmétique. La solution générale de la question (dans laquelle on suppose des joueurs de force inégale) est donnée dans plusieurs livres classiques modernes et concorde avec le résultat de Pascal, bien que la notation de Pascal soit différente et moins commode.

Pascal fait intervenir le calcul des probabilités dans le septième chapitre de ses Pensées. On y lit en effet un raisonnement de ce genre : comme la valeur d'un bonheur éternel est infinie, même si la probabilité de ce bonheur assuré par une vie religieuse est très petite, néanmoins l'espérance (qui est mesurée par le produit des deux), est encore assez grande pour nous engager à mener une vie religieuse.

Cet argument, s'il a quelque valeur, s'applique à toute religion qui assure le bonheur éternel à ceux qui en acceptent et en prati-

quent les doctrines. Si une conclusion quelconque doit-être tirée du raisonnement de Pascal, c'est qu'il ne faut pas appliquer les mathématiques à des questions dont certaines données sont nécessairement en dehors de leur domaine. Ce n'est d'ailleurs que justice d'ajouter que personne n'éprouvait plus de mépris que Pascal pour ceux dont les opinions variaient suivant les avantages matériels qu'ils espéraient en tirer, et ce passage isolé est en désaccord avec l'esprit général de ses écrits.

Le dernier ouvrage mathématique de Pascal est de 1658 et traite de la *Cycloïde*. La cycloïde est la courbe décrite par un point de la circonférence d'un cercle roulant sur une ligne droite. Galilée en 1630, avait le premier attiré l'attention sur cette courbe dont la forme est particulièrement gracieuse, et il avait émis l'idée de donner cette forme aux arches des ponts [1]. Quatre ans plus tard en 1634, Roberval trouva l'aire de la cycloïde; Descartes défia de trouver les tangentes à la courbe, le même défi fut également envoyé à Fermat qui résolut immédiatement le problème. Plusieurs questions relatives à cette courbe, à sa surface, au volume engendré par sa révolution autour de son axe, de sa base ou de la tangente au sommet, furent alors proposées par divers mathématiciens. Toutes ces questions et d'autres analogues, ainsi que la détermination de la position des centres de gravité des solides formés, furent résolues par Pascal en 1658, et les résultats obtenus publiés comme un défi au monde savant. Wallis réussit à résoudre toutes les questions à l'exception de celles relatives aux centres de gravité. Pascal obtenait ses résultats au moyen de la méthode des indivisibles, et ses solutions sont semblables à celles qui seraient données par un mathématicien moderne avec l'aide du calcul intégral. Il obtenait par sommation des résultats équivalents aux intégrales

$$\int \sin \varphi d\varphi, \qquad \int \sin^2 \varphi d\varphi, \qquad \int \varphi \sin \varphi d\varphi,$$

une limite étant ou o ou $\frac{1}{2}\pi$.

Il a fait également des recherches sur la spirale d'Archimède. D'après d'Alembert, ces recherches forment un lien entre la géométrie d'Archimède et le calcul infinitésimal de Newton.

[1] Le pont de la route d'Essex sur le Cam, qui est construit sur les terres du Collège de La Trinité à Cambridge, a des arches cycloïdales.

Wallis [1]. — *Jean Wallis* naquit à Ashford le 22 novembre 1616 et mourut à Oxford le 28 octobre 1703. Il fit ses études à l'Ecole de Felstead, et à l'âge de quinze ans il lui arriva un jour pendant les vacances de voir un livre d'arithmétique entre les mains de son frère ; sa curiosité fut excitée par les lignes bizarres et les symboles contenus dans l'ouvrage ; il l'emprunta et dans l'espace de quinze jours, avec l'aide de son frère, le posséda complètement.

Son père le destinant à la médecine, il fut envoyé au Collège Emmanuel à Cambridge, et pendant qu'il y était il soutint une « thèse » sur la doctrine de la circulation du sang. C'est, dit-on, la première fois que cette théorie fut soutenue publiquement en Europe.

Cependant il se laissa entraîner vers les mathématiques.

Il obtint son agrégation au Collège de la Reine, à Cambridge, et entra ensuite dans les ordres, mais il s'attacha au parti Puritain à qui il rendit de grands services en déchiffrant les dépêches des Royalistes. Il se joignit cependant aux Presbytériens modérés en signant le manifeste protestant contre l'exécution de Charles Ier, et il s'attira l'hostilité des Indépendants. Malgré leur opposition, il fut désigné en 1649 pour occuper la chaire Savilian de géométrie à Oxford, où il séjourna jusqu'à sa mort qui survint en 1703. En dehors de ses ouvrages mathématiques, il écrivit sur la théologie, la logique et la philosophie ; c'est lui qui institua le premier système d'enseignement pour les sourds-muets. Nous nous limiterons à quelques notes sur ses plus importants écrits mathématiques. Ils sont remarquables par l'introduction dans le domaine ordinaire de l'analyse des séries infinies, et par ce fait qu'ils révélaient et expliquaient, à tous les étudiants, les principes des nouvelles méthodes d'analyse introduites par ses contemporains et par ses prédécesseurs immédiats.

En 1655 Wallis publia un traité sur les *sections coniques*, dans lequel il les définissait analytiquement. Nous avons déjà eu l'occasion de mentionner que la *géométrie* de Descartes est à la fois difficile et obscure, et ne fut pas comprise par plusieurs de ses

[1] Voir notre *History of the study of Mathematics at Cambridge* pp. 41-46. Une édition des œuvres mathématiques de Wallis a été publiée en trois volumes à Oxford, 1693-98.

contemporains à qui la nouvelle méthode était inconnue. Wallis dans son ouvrage cherche à rendre la méthode de Descartes intelligible à tous : c'est le livre le plus ancien dans lequel les coniques sont considérées et définies comme courbes du second degré.

L'ouvrage le plus important de Wallis est son *Arithmetica Infinitorum* qui fut publié en 1656. Dans ce traité les méthodes d'analyse de Descartes et de Cavalieri furent systématisées et étendues. Il devint aussitôt le livre modèle sur le sujet et les écrivains qui suivirent s'y référèrent constamment. Il est précédé d'un court traités sur les sections coniques. Il commence par établir la loi des exposants ; montrant que x^0. x^{-1}, x^{-2}. représentent respectivement 1, $\frac{1}{x}$ $\frac{1}{x^2}$,... ; que $x^{\frac{1}{2}}$ représente la racine carrée de x, que $x^{\frac{2}{3}}$ désigne la racine cubique de x^2, et d'une façon générale x^{-n} représente l'inverse de x^n et que $x^{\frac{p}{q}}$ désigne la racine q^e de x^p.

Abandonnant les nombreuses applications algébriques, conséquences de cette découverte, il continue ensuite en obtenant par la méthode des indivisibles l'aire limitée par la courbe $y = x^m$, l'axe des x et une ordonnée quelconque $x = h$; il prouve que le rapport de cette aire à celle d'un parallélogramme de même base et de même hauteur est égal à $\frac{1}{m+1}$. Il supposait vraisemblablement que le même résultat serait également vrai pour la courbe $y = ax^m$, dans laquelle a est une constante quelconque, et m un nombre positif ou négatif ; mais il discute seulement le cas de la parabole où $m = 2$ et celui de l'hyperbole dans lequel $m = -1$: dans ce dernier cas il interprète mal le résultat trouvé. Il s'occupe ensuite de l'évaluation des aires limitées par une courbe de la forme $y = \Sigma ax^m$, et montre que si l'ordonnée y d'une courbe peut être développée suivant les puissances de l'abscisse x, sa quadrature peut être effectuée : ainsi il avance que si l'équation d'une courbe était

$$y = x^0 + x^1 + x^2 + ...$$

son aire serait

$$x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + ...$$

Il applique alors ce résultat à la quadrature des courbes

$$y = (x - x^2)^0, \ y = (x - x^3)^2, \ y = (x - x^2)^2, \ y = (x - x^2)^3, \text{ etc.}$$

prises entre les limites $x = 0$ et $x = 1$, et montre que les aires sont respectivement

$$1, \frac{1}{6}, \frac{1}{30}, \frac{1}{140}, \text{etc...}$$

Il considère encore les courbes de la forme $y = x^{-m}$ et établit le théorème que l'aire limitée par la courbe, l'axe des x. et l'ordonnée $x = 1$, est à l'aire du rectangle ayant la même base et la même hauteur dans le rapport de m à $m + 1$. Ceci revient à trouver la valeur de $\int_0^1 x^{\frac{1}{m}} dx$.

Il donne comme exemple la parabole dans laquelle $m = 2$. Il énonce, mais sans en donner une démonstration le résultat correspondant pour une courbe de la forme $y = x^{\frac{p}{q}}$.

Wallis fait preuve d'une grande ingéniosité en réduisant les équations des courbes aux formes données ci-dessus; mais, ne connaissant pas le théorème du binôme, il ne pouvait effectuer la quadrature du cercle, dont l'équation est $y = (x - x^2)^{\frac{1}{2}}$, attendu qu'il ne pouvait développer ce binôme. Il posa cependant le principe de l'interpolation. Ainsi, comme l'ordonnée du cercle $y = (x - x^2)^{\frac{1}{2}}$ est la moyenne géométrique entre les ordonnées des courbes $y = (x - x^2)^0$ et $y = (x - x^2)^1$, on pouvait supposer approximativement que l'aire du demi-cercle $\int_0^1 (x - x^2)^{\frac{1}{2}} dx$, qui est $- \frac{1}{8}\pi$, pouvait être prise comme moyenne géométrique entre les valeurs de

$$\int_0^1 (x - x^2)^0 \, dx \qquad \text{et} \qquad \int_0^1 (x - x^2)^1 \, dx,$$

c'est-à-dire, 1 et $\frac{1}{6}$; ce qui revient à prendre pour la valeur de π $4\sqrt{\frac{2}{3}}$ ou 3,26. Mais Wallis disait qu'étant donnée la série $1, \frac{1}{6}, \frac{1}{30}, \frac{1}{140}, \dots$ qu'il avait obtenue précédemment, le terme interpolé entre 1 et $\frac{1}{6}$ devait être choisi de façon à obéir à la loi de cette série. Par ce moyen et en employant une méthode laborieuse, dont nous ne croyons pas utile d'exposer ici les détails

il était amené à une valeur du terme interpolé qui revenait à faire

$$\pi = 2\,\frac{2.2.4.4.6.6.8.8\ldots\ldots}{1.3.3.5.5.7.7.9\ldots\ldots}$$

Les mathématiciens du dix-septième siècle employaient constamment l'interpolation pour obtenir des résultats que nous donnerait une analyse directe.

On trouve également traités dans cet ouvrage la formation et les propriétés des fractions continues ; cette question avait été mise à l'ordre du jour par l'usage que Brouncker faisait de ces fractions.

Quelques années plus tard, en 1659, Wallis publia un traité contenant la solution des problèmes de la cycloïde, qui avaient été proposés par Pascal. Il y expliquait incidemment comment les principes posés dans son *Arithmetica Infinitorum* pouvaient être utilisés pour la rectification des courbes algébriques, et il donna une solution du problème de la rectification de la parabole semicubique $x^3 = ay^2$, qui avait déjà été obtenue en 1657 par son élève William Neil. La spirale logarithmique avait été rectifiée par Torricelli peu avant la découverte de Neil. C'est le premier exemple de la détermination par les mathématiques de la longueur d'une ligne courbe, et comme tous les essais tentés pour rectifier l'ellipse et l'hyperbole avaient été (nécessairement) infructueux, on avait primitivement pensé qu'il n'était pas possible d'effectuer la rectification des courbes, comme d'ailleurs Descartes l'avait affirmé. La cycloïde fut la seconde courbe rectifiée en 1658 par Wren.

Au commencement de 1658, une découverte semblable, indépendante de celle de Neil, fut faite par Van Heuraët [1], et fut publiée par van Schœten dans son édition de la *Geometria* de Descartes en 1659. La méthode de Van Henraët est la suivante. Il suppose la courbe rapportée à des axes rectangulaires ; si (x, y) sont les coordonnées d'un point quelconque de cette courbe, et n la longueur de la normale, et si un autre point dont les coordonnées sont (x, η) est pris de telle sorte que $\frac{\eta}{h} = \frac{n}{y}$, h étant une constante, alors, si ds est l'élément de la longueur de la courbe cherchée, nous avons par les triangles semblables $\frac{ds}{dx} = \frac{n}{y}$. Par conséquent

(1) Sur Van Henraët, voir la *Bibliotheca Mathematica* 1887, vol. I, pp. 76-80.

$hds = \eta dx$. Dès lors si l'aire du lieu décrit par le point (x, η) peut être trouvée, la première courbe peut être rectifiée.

Henraët effectua de cette manière la rectification de la courbe $y^3 = ax^2$; mais il ajoutait que la rectification de la parabole $y^2 = ax$ est impossible attendu qu'elle exige la quadrature de l'hyperbole. Les solutions données par Neil et Wallis sont à peu près semblables à celle donnée par Henraët, bien qu'aucune règle générale ne soit énoncée et que l'analyse soit grossière. Une troisième méthode fut suggérée par Fermat en 1660, mais elle est peu élégante et laborieuse. En 1668, la Société Royale proposa aux mathématiciens l'étude de la théorie du choc des corps. Wallis, Wren et Huygens envoyèrent des solutions correctes et semblables, dépendant toutes de ce qu'on appelle aujourd'hui la conservation du « momentum », mais tandis que Wren et Huygens se bornaient à étudier la théorie des corps parfaitement élastiques, Wallis considéra aussi les corps imparfaitement élastiques. Cette étude fut suivie en 1669 par un ouvrage sur la statique (centres de gravité) et en 1670 par un autre sur la dynamique; ils permettent de se faire une idée de ce que l'on connaissait sur le sujet à cette époque.

En 1685 Wallis publia une *Algèbre*, précédée de l'histoire de son développement et contenant un grand nombre de renseignements utiles. La seconde édition, parue en 1693 et formant le second volume de ses *Opera*, fut considérablement augmentée. Cette algèbre est à citer comme étant l'ouvrage dans lequel on trouve pour la première fois l'usage méthodique des formules. Une grandeur donnée y est représentée par son rapport numérique à une grandeur de même espèce choisie comme unité : ainsi quand Wallis se propose de comparer deux longueurs, il regarde chacune d'elles comme contenant un certain nombre d'unités. Nous rendrons peut-être cette explication plus claire en disant que la relation entre l'espace parcouru dans un temps quelconque par un point se déplaçant avec une vitesse uniforme aurait été représentée par Wallis par la formule $s = vt$, dans laquelle s désigne le rapport de l'espace décrit à l'unité de longueur ; tandis que les écrivains antérieurs auraient exprimé la même relation au moyen de la formule équivalente [1] $\frac{s_1}{s_2} = \frac{v_1 t_1}{v_2 t_2}$. Il est curieux de noter que Wallis rejetait

[1] Voir par exemple, les *Principia* de NEWTON, Liv. I, sect. I, Lemmes 10 et 11.

comme absurbe l'idée admise aujourd'hui qu'un nombre négatif est plus petit que rien, mais admettait qu'il représente quelque chose plus grand que l'infini. Cette dernière opinion peut être soutenue et n'est pas en contradiction avec la première, mais elle n'est guère plus simple.

Fermat (1). — Tandis que Descartes posait les fondements de la géométrie analytique, le même sujet occupait l'attention d'un autre Français non moins remarquable. Nous voulons parler de Fermat. *Pierre de Fermat*, qui naquit près de Montauban en 1601, et mourut à Castres le 12 janvier 1665, était le fils d'un marchand de cuirs ; il fut instruit dans sa famille ; en 1631 il obtint le poste de conseiller au Parlement de Toulouse, et il s'acquitta des devoirs de sa charge avec une grande conscience. Il garda sa fonction toute sa vie, consacrant aux mathématiques la plus grande partie de ses loisirs ; d'ailleurs à part une discussion quelque peu acrimonieuse avec Descartes sur la validité d'un certain système d'analyse employé par ce dernier, sa vie ne fut troublée par aucun évènement méritant la peine d'être mentionné. L'obscurité du style de Descartes fut la principale cause de la discussion, mais Fermat par son tact et sa courtoisie permit que cette discussion se terminât sans aigreur. Fermat était un érudit, il parvint à restaurer par conjectures l'ouvrage d'Apollonius sur les lieux plans.

A part quelques notes isolées, Fermat ne publia rien de son vivant, et ne donna aucune exposition systématique de ses méthodes. Quelques uns des résultats les plus remarquables qu'ils a obtenus ont été trouvés après sa mort sur des morceaux de papier, ou écrits en marge des livres qu'il avait lus et annotés, mais sans aucune démonstration. Il est dès lors quelque peu difficile de fixer les dates de ses travaux. Il était par nature modeste et réservé, et ne semble avoir jamais songé à publier ses écrits. Nous allons maintenant considérer séparément 1° ses recherches sur la théorie

(1) La meilleure édition des œuvres de FERMAT est celle en 3 volumes préparée par S. P. TANNERY et C. HENRY, et publiée aux frais du Gouvernement français; vol I, 1891 ; vol. II, 1894 ; vol. III, 1896. Des anciennes éditions, nous pouvons mentionner celle de ses notes et de sa correspondance, publiée à Toulouse en deux volumes, 1670 et 1679 : dont un sommaire avec notes, fut publié par E. BRASSINNE à Toulouse en 1853 et dont une réimpression fut aite à Berlin, en 1861.

des nombres ; 2° l'usage qu'il fit en géométrie de l'analyse et des infiniment petits ; et 3° la façon dont il a traité les questions de probabilité.

1° *La théorie des nombres* paraît avoir été l'étude favorite de Fermat. Il prépara une édition de Diophante, et ses notes et commentaires contiennent de nombreux théorèmes d'une élégance remarquable. La plupart des démonstrations de Fermat sont perdues, et il est possible que quelques unes d'entre elles manquaient de rigueur ; une induction par analogie et l'intuition du génie suffisant à le conduire à des résultats exacts. Les exemples suivants serviront à donner une idée de ses recherches.

a) p étant un nombre premier et a un nombre premier avec p, la différence $a^{p-1} - 1$ est divisible par p, c'est-à-dire que l'on a :

$$a^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Une démonstration de cette proposition donnée pour la première fois, par Euler, est bien connue. Un théorème plus général est traduit par la relation

$$a^{\varphi(n)} - 1 \equiv 0 \pmod{n},$$

dans laquelle a est premier avec n et $\varphi(n)$ représente le nombre des entiers plus petits que n et premiers avec n.

b) Un nombre premier (plus grand que 2) peut toujours être décomposé en une différence de deux carrés entiers mais d'une seule manière.

Voici la démonstration de Fermat. Soit n le nombre premier que nous supposons égal à $x^2 - y^2$, c'est-à-dire à $(x+y)(x-y)$. Par hypothèse, les seuls facteurs entiers de n, sont n et 1. Par suite

$$x + y = n \qquad \text{et} \qquad x - y = 1$$

d'où l'on déduit

$$x = \frac{1}{2}(n+1) \qquad \text{et} \qquad y = \frac{1}{2}(n-1).$$

c) Il donna une démonstration de cette proposition énoncée par Diophante que la somme des carrés de deux entiers ne peut être de la forme $4n - 1$; et il ajouta un corollaire dont la signification serait, croyons-nous, qu'il est impossible que le produit d'un carré par un nombre premier de la forme $4n - 1$ (même multiplié par

un nombre premier avec ce dernier) soit un carré ou la somme de deux carrés. Par exemple, 44 est un multiple de 11 (qui est de la forme $4 \times 3 - 1$) par 4, par suite il ne peut représenter la somme de deux carrés.

Il établit aussi qu'un nombre de la forme $a^2 + b^2$, a étant premier avec b, ne peut être divisible par un nombre premier de la forme $4n - 1$.

d) Tout nombre premier de la forme $4n + 1$ est décomposable, et cela d'une seule façon, en une somme de deux carrés. Ce problème fut résolu pour la première fois par Euler qui montra qu'un nombre de la forme $2^m(4n + 1)$ pouvait toujours être décomposé en une somme de deux carrés.

e) Si a, b, c sont des entiers tels que $a^2 + b^2 = c^2$, le produit ab ne peut être un carré. Lagrange en donna une démonstration.

f) Trouver un nombre x tel que $x^2n + 1$ soit un carré, n étant un nombre entier donné qui n'est pas un carré. Lagrange en donna encore une solution.

g) L'équation $x^2 + 2 = y^3$ n'a qu'une solution en nombres entiers; et l'équation $x^2 + 4 = y^3$ ne présente que deux solutions entières. Ces solutions sont évidemment pour la première équation $x = 5$, et pour la seconde équation $x = 2$ et $x = 11$. Cette question fut proposée en défi aux mathématiciens anglais Wallis et Digby.

h) L'équation $x^n + y^n = z^n$ est impossible en nombres entiers, si n est un entier plus grand que 2. Cette proposition [1] a une célébrité extraordinaire parce qu'aucune démonstration générale n'en a encore été donnée, mais on n'a aucune raison de douter de son exactitude.

Fermat découvrit probablement qu'elle était exacte d'abord pour $n = 3$ et ensuite pour $n = 4$. Sa démonstration pour le premier de ces cas est perdue, mais celle pour le second cas subsiste et Euler donna une preuve du même genre pour $n = 3$, Ces démonstrations consistent à faire voir que si on peut trouver trois valeurs entières pour x, y, z satisfaisant à l'équation, il sera possible de trouver trois autres entiers plus petits qui rempliront la même condition : on montre alors finalement que l'équation serait satisfaite

[1] Au sujet de cette curieuse proposition, voir nos *Mathematical Recreations and Problems*, 3° édition pp. 35-38. Traduction française par Fitz Patrick).

par trois valeurs qui de toute évidence ne peuvent convenir. Par suite aucune solution entière n'est possible. Ce mode de démonstration ne semble applicable qu'aux cas de $n = 3$ et $n = 4$.

La découverte par Fermat du théorème général est d'une date postérieure. On peut en donner une démonstration en admettant qu'un nombre peut être décomposé en facteurs premiers (complexes) d'une manière et seulement d'une seule. Cette supposition a été faite par quelques écrivains, mais elle n'est pas universellement vraie. Il est possible que Fermat ait fait quelques suppositions erronées, mais il est peu probable qu'il se soit servi des nombres complexes, et, en somme, il paraît très vraisemblable qu'il n'a découvert une démonstration rigoureuse.

En 1840 Legendre parvint à trouver des démonstratious pour $n = 5$; en 1832 Lejeune Dirichlet en donna une pour $n = 4$: et en 1845 Lamé et Lebesgue fournirent une démonstration pour $n = 7$. La proposition paraît être vraie dans toute sa généralité, et en 1849, Kummer, en faisant usage des nombres premiers idéaux, prouva qu'elle était exacte pour tous les nombres, sauf ceux remplissant trois conditions (s'ils existent). On ne sait s'il est possible de trouver un nombre quelconque satisfaisant à ces conditions, mais il n'y en a aucun inférieur à 100.

La démonstration est compliquée et difficile, et, il ne peut y avoir aucun doute à ce sujet, basée sur des considérations inconnues à Fermat. Nous pouvons ajouter que, pour prouver l'exactitude de la proposition quand n est plus grand que 3, il suffit évidemment de se borner aux cas où n est un nombre premier, et le premier pas dans la démonstration de Kummer est de montrer que l'un des nombres x, y, z doit être divisible par n.

Les extraits suivants, d'une lettre actuellement à la Bibliothèque universitaire de Leyde, donneront une idée des méthodes de Fermat; la lettre n'est pas datée, mais il paraîtrait que, à l'époque où Fermat l'écrivit, il avait prouvé la proposition (h) ci-dessus, seulement pour le cas de $n = 3$.

« Je ne m'en servis au commencement que pour démontrer les « propositions négatives, comme par exemple, qu'il n'y a aucun « nombre moindre de l'unité qu'un multiple de 3 qui soit com- « posé d'un quarré du triple d'un autre quarré. Qu'il n'y a aucun « triangle rectangle de nombres dont l'aire soit un nombre quarré.

« La preuve se fait par ἀπαγωγὴν τὴν εἰς ἀδύνατον en cette manière. « S'il y auoit aucun triangle rectangle en nombres entiers, qui « eust son aire esgale à un quarré, il y auroit un autre triangle « moindre que celuy la qui auroit la mesme propriété. S'il y en « auoit un second moindre que le premier qui eust la mesme pro- « priété il y en auroit par un pareil raisonnement un troisième « moindre que ce second qui auroit la mesme propriété et enfin « un quatrième, un cinquième etc, à l'infini en descendant. Or est- « il qu'estant donné un nombre il n'y en a point infinis en des- « cendant moindres que celuy la, j'entends parler toujours des « nombres entiers. D'où on conclud qu'il est donc impossible « qu'il y ait aucun triangle rectangle dont l'aire soit quarré. *Vide* « *foliū post sequens...*

« Je fus longtemps sans pouvoir appliquer ma méthode aux « questions affirmatiues parce que le tour et le biais pour y venir « est beaucoup plus malaisé que celuy dont je me sers aux négatives. « De sorte que lorsqu'il me falut demonstrer que tout nombre « premier qui surpasse de l'unité un multiple de 4, est composé « de deux quarrez je me treuuay en belle peine. Mais enfin une mé- « ditation diverses fois réitérée me donna les lumières qui me « manquoient. Et les questions affirmatiues passerent par ma mé- « thode à l'ayde de quelques nouveaux principes qu'il y fallust « joindre par nécessité. Ce progres de mon raisonnement en ces « questions affirmatives estoit tel. Si un nombre premier pris à « discretion qui surpasse de l'unité un multiple de 4 n'est point « composé de deux quarrez il y aura un nombre premier de « mesme nature moindre que le donné ; et ensuite un troisieme « encore moindre, etc., en descendant à l'infini jusques a ce que « uous arriviez au nombre 5, qui est le moindre de tous ceux « de cette nature, lequel il s'en suivroit n'estre pas composé « de deux quarrez, ce qu'il est pourtant d'ou on doit inferer par la « deduction à l'impossible que tous ceux de cette nature sont par « consequent composez de 2 quarrez. Il y a infinies questions de « cette espece.

« Mais il y en a quelques autres qui demandent de nouveaux « principes pour y appliquer la descente, et la recherche en est « quelquefois si mal aisée, qu'on n'y peut venir qu'avec une peine « extreme. Telle est la question suivante que Bachet sur Diophante

« avoue n'avoir jamais peu demonstrer, sur le suject de laquelle « Mr Descartes fait dans une de ses lettres la mesme déclaration, « jusques la qu'il confesse qu'il la juge si difficile qu'il ne voit « point de voye pour la résoudre. Tout nombre est quarré ou « composé de deux, trois, ou de quatre quarrez. Je l'ay enfin « rangée sous ma méthode et je demonstre que si un nombre « donné n'estoit point de cette nature il y en auroit un moindre « qui ne le seroit pas non plus, puis un troisieme moindre que le « second etc., à l'infini, d'où l'on infere que tous les nombres sont « de cette nature...

« J'ay ensuite considéré certaines questions qui bien que néga- « tives ne restent pas de receuoir très grande difficulté la méthode « pour y pratiquer la descente estant tout à fait diverses des précé- « dentes comme il sera aisé d'esprouuer. Telles sont les suiuantes. « Il n'y a aucun cube diuisible en deux cubes. Il n'y a qu'un seul « quarré en entiers qui augmenté du binaire fasse un cube, le dit « quarré est 25. Il n'y a que deux quarrez en entiers lesquels aug- « mentés de 4 fassent cube, les dits quarrez sont 4 et 121.

« Après auoir couru toutes ces questions la plupart de diuerses « (*sic*) natures et de différente façon de demonstrer, j'ay passé à « l'inuention des regles generales pour resoudre les equations sim- « ples et doubles de Diophante. On propose par exemple 2 quarr. « + 7957 esgaux à un quarré (*hoc est* $2xx + 7967 \infty$ quadr.) « J'ay une regle generale pour resoudre cette equation si elle est « possible, ou découvrir son impossibilité. Et ainsi en tous les cas « et en tous nombres tant des quarréz que des unitéz. On propose « cette equation double $2x + 3$ et $3x + 5$ esgaux chacun à un « quarré. Bachet se glorifie en ses commentaires sur Diophante « d'auoir trouvé une regle en deux cas particuliers. Je la donne « generale en toute sorte de cas. Et determine par regle si elle est « possible ou non...

« Voila sommairement le conte de mes recherhes sur le suject des nombres.

« Je ne l'ay escrit que parce que j'apprehende que le loisir « d'estendre et de mettre au long toutes ces démonstrations et ces « methodes me manquera.

« En tout cas cette indication seruira aux sçauants pour trouver « d'eux mesmes ce que je n'estens point, principalement si M. de

« Carcaui et Frenicle leur font part de quelques demonstrations « par la descente que je leur aye envoyees sur le suject de quelques « propositions négatives. Et peut estre la posterité me scaura gré « de luy avoir fait connoistre que les anciens n'ont pas tout sceu, et « cette relation pourra passer dans l'esprit de ceux qui viendront « apres moy pour *traditio lampadis ad filios* comme parle le grand « Chancelier d'Angleterre, suiuant le sentiment et la deuise duquel « j'adjousteray, *multi pertransibunt et augebitur scientia.* »

2° Nous continuerons en faisant mention de *l'emploi fait par* Fermat *en géométrie de l'analyse et des infiniment petits.*. Il semblerait résulter de sa correspondance qu'il avait imaginé pour luimême les principes de la géométrie analytique avant d'avoir eu connaissance de la *géométrie* de Descartes et avait compris que de l'équation d'une courbe (ou comme il l'appelait « la propriété spécifique ») on pouvait déduire toutes ses propriétés. Cependant les notes qui nous restent de lui sur la géométrie traitent principalement de l'application des infiniment petits à la détermination des tangentes aux courbes, à la quadrature des courbes et aux questions de maxima et de minima; ces notes sont probablement une révision de ses manuscrits originaux (qu'il détruisit) et qui furent écrits vers 1663, mais il n'est pas douteux qu'il avait déjà l'idée générale de sa méthode pour trouver les maxima et les minima vers 1628 ou 1629.

Il obtenait la sous-tangente de l'ellipse, de la cycloïde, de la cissoïde, de la conchoïde et de la quadratrice en faisant égales les ordonnées de la courbe et d'une ligne droite pour deux points ayant pour abscisses x et $x - e$; mais rien n'indique qu'il considérait le procédé comme général, et bien qu'il utilisât le principe dans le courant de son ouvrage, il est probable qu'il ne le séparait jamais des symboles, si nous pouvons parler ainsi, du problème particulier dont il s'occupait. Le premier exposé définitif de la méthode est dû à Barrow ([1]) et fut publié en 1669.

Fermat obtint aussi les aires des paraboles et des hyperboles d'un degré quelconque et détermina les centres de gravité de quelques corps en forme de lames et du paraboloïde de révolution. Comme exemple de la méthode qu'il employait pour résoudre ces questions nous donnerons sa solution du problème de la détermi-

([1]) Voir plus loin pages 321-2.

nation de l'aire comprise entre la parabole $y^3 = px^2$, l'axe des x, et la ligne $x = a$. Si, dit-il, on mène les diverses ordonnées des points pour lesquels x est successivement égale à a, $a(1-e)$, $a(1-e)^2$,..., l'aire cherchée sera partagée en un certain nombre de petits rectangles ayant respectivement pour aires

$$ae\,(pa^2)^{\frac{1}{3}}, \qquad ae\,(1-e)\left\{pa^2(1-e)^2\right\}^{\frac{1}{3}},\ldots$$

Leur somme est

$$\frac{p^{\frac{1}{3}}a^{\frac{5}{3}}e}{1-(1-e)^{\frac{5}{3}}},$$

et au moyen d'une proposition subsidiaire (attendu qu'il ne connaissait pas le théorème du binôme) il trouva pour la limite de cette expression quand e s'annule, $\frac{3}{5}p^{\frac{1}{3}}a^{\frac{5}{3}}$. Les théorèmes mentionnés en dernier lieu n'ont été publiés qu'après sa mort : et ils ne furent probablement composés qu'après la lecture des ouvrages de Cavalieri et de Wallis.

Képler avait fait remarquer que les valeurs d'une fonction dans le voisinage et de part et d'autre d'un maximum (ou d'un minimum) devaient êtres égales. Fermat appliqua ce principe à quelques exemples.

Ainsi, pour trouver la valeur maximum de $x(a-x)$ sa méthode revient essentiellement à prendre une autre valeur de x, à savoir $x-e$, e étant très petit et à poser $x(a-x) = (x-e)(a-x+e)$. Simplifiant, et posant finalement $e = 0$, on obtient $x = \frac{a}{2}$. Cette valeur de x rend l'expression donnée maximum.

3° Fermat doit partager avec Pascal l'honneur d'avoir créé *la théorie des probabilités*. Nous avons déjà fait mention du problème proposé à Pascal et qu'il communiqua à Fermat, et nous avons reproduit à cette occasion la solution de Pascal. La solution de Fermat dépend de la théorie des combinaisons et sera suffisamment expliquée par l'exemple suivant, qui est en substance tiré d'une lettre datée du 24 août 1654 et faisant partie de sa correspondance avec Pascal.

Fermat examine le cas de deux joueurs, A et B, lorsqu'il manque à A deux points pour gagner et à B, trois points. Le jeu sera cer-

tainement décidé dans le cours de quatre essais. Prenons les lettres *a* et *b* et écrivons toutes les combinaisons qui peuvent être formées avec quatre lettres. Ces combinaisons sont au nombre de 16, à savoir :

aaaa, aaab, aaba, aabb ; *abaa, abab, abba, abbb;*
baaa, baab, baba, babb; *bbaa, bbab, bbba, bbbb.*

Maintenant chaque combinaison dans laquelle *a* se présente deux fois ou plus de deux fois représente un cas favorable pour A, et toute combinaison dans laquelle *b* se présente trois fois ou plus de trois fois représente un cas favorable pour B. Dès lors, en les comptant, on trouvera qu'il y a 11 cas favorables pour A et 5 cas favorables pour B; et du moment que ces cas sont tous également vraisemblables, la chance de gagner du joueur A est à celle du joueur B comme 11 est à 5.

Le seul autre problème sur ce sujet qui, autant que nous sachions, attira l'attention de Fermat lui fut également proposé par Pascal et en voici l'objet. Une personne se propose d'obtenir six avec un dé à jouer en le lançant huit fois; en supposant qu'elle ait jeté trois fois le dé sans succès, on demande quelle portion de l'enjeu elle est autorisée à retirer, si elle abandonne la partie au quatrième coup. Fermat raisonnait comme il suit : La chance de réussite est représentée par $\frac{1}{6}$, de telle sorte qu'il lui serait permis de prendre $\frac{1}{6}$ de l'enjeu à la condition d'abandonner son coup. Mais si nous désirons estimer la valeur du quatrième coup avant qu'aucun coup de dé ne soit fait, nous dirons : le premier coup vaut $\frac{1}{6}$ de l'enjeu ; le second vaut $\frac{1}{6}$ de ce qui reste, c'est-à-dire $\frac{5}{36}$ de l'enjeu ; et le troisième vaut $\frac{1}{6}$ du nouveau reste, soit $\frac{25}{216}$; le quatrième coup vaut $\frac{1}{6}$ du dernier reste, c'est-à-dire $\frac{125}{1296}$ de l'enjeu.

Fermat ne paraît pas avoir poursuivi le sujet plus loin, mais sa correspondance avec Pascal montre que ses idées en ce qui concerne les principes fondamentaux du calcul des probabilités étaient justes : celles de Pascal ne le furent pas toujours.

La réputation de Fermat est à peu près unique dans l'histoire

de la science. Les problèmes sur les nombres qu'il avait proposés résistèrent pendant longtemps à toutes les tentatives faites pour les résoudre, et beaucoup d'entre eux ne cédèrent que devant le génie d'Euler. Un seul reste encore à résoudre. Ses autres travaux furent éclipsés par l'extraordinaire maîtrise qu'il montra dans la théorie des nombres, mais en réalité, ils sont tous d'un ordre supérieur et l'on ne peut que regretter qu'il ait jugé à propos d'écrire si peu.

Huygens (1). — *Christian Huygens* naquit à La Haye, le 14 avril 1629, et mourut dans la même ville, le 8 juin 1695. Il écrivait généralement son nom sous cette forme « Hugens », mais nous avons adopté la coutume de l'écrire Huygens, on l'écrit aussi quelquefois Huyghens. Sa vie ne présente aucun événement marquant.

En 1651, il publia un essai dans lequel il fait ressortir l'erreur d'une méthode de quadrature du cercle proposée par Grégoire de Saint-Vincent qui connaissait bien la géométrie des Grecs, mais n'avait pas saisi les points essentiels des méthodes plus modernes. Cet essai fut suivi de traités sur la quadrature des coniques et sur une rectification approchée du cercle.

En 1654, il dirigea son attention sur les perfectionnements à apporter au télescope. En collaboration avec son frère, il imagina une nouvelle manière préférable à l'ancienne, pour dresser et polir des lentilles. Comme conséquence de ces perfectionnements il lui fut possible, durant les deux années qui suivirent, 1655 et 1656, de résoudre plusieurs problèmes astronomiques, comme par exemple la détermination de l'anneau de Saturne. Ses observations exigeaient des méthodes exactes pour mesurer le temps, et il fut de la sorte conduit en 1656 à inventer l'horloge à pendule, comme elle est décrite dans son traité *Horologium* 1658.

Dans l'année 1657, Huygens écrivit un petit ouvrage sur le calcul des probabilités, basé sur la correspondance échangée entre Pascal

(1) Une nouvelle édition des œuvres et de la correspondance d'Huyghens est actuellement en cours de publication à La Haye, 1888 etc.

Une ancienne édition de ses œuvres a été publiée en six volumes, quatre à Leyde en 1724 et deux à Amsterdam en 1728 (sa vie par s'Gravesande est donnée en préface dans le premier volume) : sa correspondance scientifique fut publiée à la Haye en 1833.

et Fermat. Vers cette époque il passa environ deux ans en Angleterre. Sa réputation à ce moment était si grande que Louis XIV, en 1665, lui offrit une pension pour venir vivre à Paris, qui devint son lieu de résidence.

En 1668, il envoya à la Société Royale de Londres, en réponse à un problème qu'elle avait proposé, un mémoire dans lequel (simultanément avec Wallis et Wren) il démontrait expérimentalement que le « momentum » suivant une certaine direction avant le choc de deux corps est égal au « momentum » suivant cette direction, après le choc. C'était là un des points sur lesquels Descartes s'était trompé dans sa mécanique.

L'ouvrage le plus important d'Huygens fut son *Horologium Oscillatorium*, publié à Paris en 1673. Le premier chapitre est consacré aux horloges à pendule. Le second est une exposition complète de la théorie de la chute des corps pesants dans le vide, sous l'action de leur propre poids, soit verticalement, soit le long de courbes données. Entre autres propositions, il montre que la cycloïde est tautochrone. Dans le troisième chapitre il définit les développées, démontre quelques unes de leurs propriétés les plus élémentaires, et donne des exemples de ses méthodes en trouvant les développées de la cycloïde et de la parabole. Ce sont là les exemples les plus anciens de la détermination des développées. Dans le quatrième chapitre, il résout le problème du pendule composé, et montre que les centres d'oscillation et de suspension sont interchangeables. Dans le cinquième et dernier chapitre, il revient de nouveau sur la théorie des horloges, signale que si on trouvait le moyen de faire osciller la lentille du pendule suivant une cycloïde, les oscillations seraient isochrones; et il termine en montrant que la force centrifuge agissant sur un corps qui se déplace sur la circonférence d'un cercle de rayon r avec une vitesse uniforme v, varie proportionnellement à v^2 et inversement à r.

Cet ouvrage renferme le premier essai fait pour appliquer la dynamique aux corps de dimensions finies et non à de simples points.

En 1675, Huygens proposa de régler le mouvement des montres en se servant du ressort spiral, dans la théorie duquel il avait peut-être été précédé par Hooke, qui en présentait en 1658 une exposition quelque peu ambigüe et incomplète. Les montres ou hor-

loges portatives avaient été inventées de bonne heure dans le seizième siècle et vers la fin de ce siècle elles n'étaient pas très rares ; mais elles étaient grossières et ne présentaient aucune garantie étant mises en mouvement au moyen d'un grand ressort et réglées par une poulie conique et une tige à échappement ; de plus jusqu'en 1687 elles ne portaient qu'une seule aiguille. La première montre dont le mouvement fut réglé par un ressort spiral fut faite à Paris sur les indications de Huygens qui l'offrit à Louis XIV.

L'intolérance croissante des catholiques détermina son retour en Hollande en 1681, et, après la révocation de l'édit de Nantes, il refusa de conserver des relations avec la France. Il s'occupa alors de la construction des lentilles présentant une distance focale énorme : trois d'entre elles mesurant comme distances focales 123 pieds, 180 pieds et 210 pieds furent données à la Société Royale de Londres qui les possède encore. Ce fut vers cette époque qu'il découvrit l'oculaire achromatique (pour télescope) qui porte son nom. En 1689 il se rendit de Hollande en Angleterre pour faire connaissance avec Newton, dont les *Principia* avaient été publiés en 1687. Huygens reconnaissait complètement le mérite incontestable de l'ouvrage, mais il semble avoir pensé que toute théorie qui n'expliquait pas la gravitation par des causes mécaniques était incomplète.

A son retour en 1690, Huygens publia son traité sur la *Lumière* dans lequel il exposait et expliquait la théorie des ondulations. La plus grande partie avait déjà été écrite vers 1678. L'idée générale de la théorie avait été suggérée par Robert Hooke en 1664, mais il n'en n'avait pas fait assez ressortir les conséquences. Cette publication ne tombe pas dans la période que nous embrassons dans ce chapitre, mais nous pouvons dire brièvement ici que, suivant la théorie des ondes, l'espace est occupé par l'éther, milieu extrêmement élastique, et que la lumière est la conséquence d'une série d'ondulations ou de vibrations dans ce milieu, mis en mouvement par les pulsations des corps lumineux. En partant de cette hypothèse Huygens obtenait les lois de la réflexion et de la réfraction, expliquait le phénomène de la double réfraction et donnait une construction pour le rayon extraordinaire dans les cristaux à deux axes ; de plus il imaginait les expériences qui mettent en évidence les principaux phénomènes de la polarisation.

L'immense réputation de Newton et son génie sans rival firent que l'on refusa d'accepter une théorie qu'il rejetait, et conduisirent à l'adoption générale de la théorie de l'émission proposée par Newton ; mais il faut faire remarquer que l'explication de quelques phénomènes donnée par Huygens, tels que la coloration des plaques minces étaient en désaccord avec les résultats des expériences. Ce ne fut que lorsque Young et Wollaston, au commencement du dix-neuvième siècle, eurent repris la théorie des ondulations pour en modifier quelques détails, et que Fresnel eut de nouveau développé leurs vues, que cette théorie fut acceptée.

Outre ces ouvrages Huygens prit part à la plupart des controverses et des défis qui jouaient alors un si grand rôle dans le monde savant, et il écrivit plusieurs traités d'une importance secondaire. Dans l'un deux il étudia la forme et les propriétés de la chaînette. Dans un autre il formula en termes généraux la règle pour trouver les maxima et minima dont Fermat avait fait usage, et montra que la sous-tangente d'une courbe algébrique $f(x, y) = 0$ était égale à $\frac{yf_y}{f_x}$, où f_y est la fonction dérivée de $f(x, y)$ considérée comme une fonction de y. Dans quelques ouvrages posthumes, publiés à Leyde 1703, il montra en outre comment le pouvoir grossissant du télescope pouvait se déduire des distances focales des lentilles composées, et expliqua quelques phénomènes relatifs aux halos.

Nous devons ajouter que presque toutes ses démonstrations, de même que celles de Newton, sont rigoureusement géométriques et il ne paraît pas avoir employé le calcul différentiel ou des fluxions, bien qu'il ait admis la validité des méthodes. Ainsi, ses ouvrages étaient composés en un langage archaïque et ils ne reçurent peut-être pas toute l'attention que leur mérite intrinsèque comportait.

Nous venons de suivre le développement des mathématiques sous l'influence de Descartes, Cavalieri, Pascal. Wallis, Fermat et Huygens pendant une période qui peut être considérée approximativement comme allant de 1635 à 1675. La vie de Newton est en partie comprise dans cette période : nous étudions dans le chapitre suivant ses œuvres et son influence.

Nous pouvons signaler rapidement *les noms des autres mathé-*

maticiens de cette époque (¹) en les faisant suivre d'une courte notice. Les principaux furent *Bachet, Barrow, Brouncker, Collins, De la Hire, de Laloubère, Frénicle, James Gregory, Hooke, Hudde, Nicolas Mercator, Mersenne, Pell, Roberval, Rœmer, Rolle, Saint-Vincent, Sluze, Torricelli, Tschirnhausen, van Schooten, Viviani et Wren.*

Dans les notes qui suivent, nous avons classé les mathématiciens qui viennent d'être mentionnés de façon à présenter, autant que possible, leurs travaux principaux suivant l'ordre chronologique.

Bachet. — *Claude Gaspard Bachet de Méziriac* naquit à Bourg en 1581 et mourut en 1638. Il écrivit les *Problèmes plaisants* dont la première édition parut en 1612 ; une seconde édition augmentée fut publiée en 1624 ; cet ouvrage contient une intéressante collection de questions et de récréations arithmétiques, dont la plupart sont citées dans nos *Mathematical Recreations and Problems.*

Il écrivit aussi *Les éléments arithmétiques* qui existent en manuscrit ; et une traduction de l'*Arithmétique* de Diophante. Bachet fut le plus ancien écrivain qui discuta la solution des équations indéterminées au moyen des fractions continues.

Mersenne. — *Marin Mersenne* né en 1588 et mort à Paris en 1648, était un frère Franciscain qui entreprit de faire connaissance et de correspondre avec les mathématiciens français de son époque et avec la plupart de leurs contemporains étrangers. En 1634 il publia une traduction de la mécanique de Galilée ; en 1644 il publia ses *Cogitata Physico Mathematica,* ouvrage par lequel il est connu et qui contient l'exposition de quelques expériences de physique ; il écrivit aussi un tableau synoptique des mathématiques, qui fut imprimé en 1664.

La préface des *Cogitata* contient l'énoncé de cette proposition (probablement due à Fermat), que pour que l'expression $2^p - 1$ représente un nombre premier, les seules valeurs possibles de p, non supérieures à 257, sont 1, 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127 et 257 : le nombre 67 a probablement été mis par erreur pour 61. En tenant compte de cette correction, la proposition semble être

(¹) On trouvera des notes sur plusieurs de ces mathématiciens dans le *Mathematical Dictionnary and Tracts* de C. Hutton, 5 volumes, Londres 1812-1815.

vraie, et elle a été vérifiée pour toutes les valeur de p à l'exception de 19; savoir 71, 101, 103, 107, 109, 137, 139, 149, 157, 163, 167, 173, 181, 193, 199, 227, 229, 241 et 257.

Mersenne affirmait que $p = 257$ donnait pour $2^p - 1$ un nombre premier et que pour les autres valeurs, $2^p - 1$ est un nombre composé. Les vérifications pour les cas où $p = 67, 89, 127$ reposent apparemment sur de longs calculs numériques faits par de simples particuliers et non publiés; jusqu'à ce que ces démonstrations aient été confirmées nous pouvons dire que vingt deux cas attendent une vérification ou exigent des investigations ultérieures. Les facteurs de $2^p - 1$ quand $p = 67$ et $p = 89$ ne sont pas connus, les calculs montrant simplement que les nombres résultants ne peuvent être premiers. Il est très vraisemblable que ces résultats sont des cas particuliers de quelque théorème général qui reste à découvrir.

La théorie des nombres parfaits dépend directement de celle des nombres de Mersenne. Il est probable que tous les nombres parfaits sont compris dans la formule $2^{p-1}(2^p - 1)$, dans laquelle $2^p - 1$ est un nombre premier. Euclide a démontré que tous les nombres de cette forme sont parfaits : Euler a montré que cette formule comprend tous les nombres parfaits pairs; et il y a des raisons de penser — bien qu'une démonstration rigoureuse du fait soit encore à trouver — qu'un nombre impair ne peut pas être parfait. Si on admet l'exactitude de cette dernière proposition, on peut conclure que tout nombre parfait est de la forme indiquée ci-dessus.

Ainsi, pour $p = 2, 3, 5, 7, 13, 19, 31, 61$, les valeurs correspondantes de $2^p - 1$, d'après la règle de Mersenne, sont des nombres premiers : 3, 7, 31, 127, 8191, 131071, 524287, 2147483647, 2305843009213693951 ; et les nombres parfait correspondants sont : 6, 28, 496, 8128, 33550336, 8589869056,

137438691328, 2305843008139952128, et
2658455991569831744654692615953842176.

Roberval (1). — *Gilles Personier* (de) *Roberval*, né à Roberval en

(1) Une édition complète de ses œuvres était comprise dans les anciens *Mémoires* de l'Académie des sciences publiés en 1693.

1602 et mort à Paris en 1675, se fit appeler de Roberval du lieu de sa naissance sans avoir aucun droit à ce titre seigneurial.

Il examina la question des tangentes aux courbes, résolut quelques unes des questions les plus simples relatives à la cycloïde, généralisa les théorèmes d'Archimède sur la spirale, écrivit sur la mécanique et sur la méthode des indivisibles, qu'il rendit plus précise et logique. Il professait à l'université de Paris et était en correspondance avec presque tous les mathématiciens de son temps.

Van Schooten. — *François Van Schooten*, à qui nous devons une édition des œuvres de Viète, succéda à son père (qui avait enseigné les mathématiques à Huygens, Hudde et Sluze) comme professeur à Leyde en 1646 ; il fit paraître en 1659 une traduction latine de la *géométrie* de Descartes; et en 1657 une collection d'excercices mathématiques, dans lesquels il recommandait l'usage des coordonnées dans l'espace à trois dimensions. Il mourut en 1661.

Saint-Vincent (1). — *Grégoire de Saint-Vincent*, de l'ordre des Jésuites, né à Bruges en 1584 et mort à Gand en 1667, découvrit le développement de log $(1 + x)$ suivant les puisssances croissantes de x. Bien qu'il se soit occupé de la quadrature du cercle, il est à citer à cause des nombreux théorèmes intéressants qu'il découvrit dans ses tentatives pour résoudre un problème impossible, et Montucla observe ingénieusement que « personne ne quarra jamais le cercle avec tant d'habileté ou (excepté ce qui concerne son objet principal) avec autant de succès ». Il écrivit sur cette question deux livres, l'un publié en 1647 et l'autre en 1668, qui contiennent deux ou trois cents pages d'impression serrée : l'inexactitude de sa quadrature fut signalée par Huygens. Il employait les indivisibles dans le premier de ces ouvrages; un livre plus ancien intitulé *Theoremata Mathematica* publié en 1624 contient une claire exposition de la méthode d'exhaustion, qui est appliquée à plusieurs quadratures, notamment à celle de l'hyberbole.

(1) Voir L. A. J. Quetelet, *Histoire des sciences chez les Belges*. Bruxelles, 1866.

Torricelli (1). — *Evangelista Torricelli* né à Faenza e 15 octobre 1608 et mort à Florence en 1647, écrivit sur la quadrature de la cycloïde et des coniques, la théorie du baromètre, la valeur de la gravité déterminée par l'étude du mouvement de deux poids réunis par un fil passant sur la gorge d'une poulie fixe, la théorie des projectiles et le mouvement des fluides.

Hudde. — *Jean Hudde* bourgmestre d'Amsterdam, naquit dans cette ville en 1633 et y mourut en 1704. Il écrivit deux traités en 1659 ; dans l'un il s'occupe de la réduction des équations qui ont des racines égales : dans l'autre il arrive à un résultat équivalent à cette proposition que si $f(x, y) = 0$ est l'équation algébrique d'une courbe, la sous-tangente est $-y\frac{\frac{df}{dy}}{\frac{df}{dx}}$; mais ne connaissant pas la notation du calcul différentiel son énoncé est confus.

Frénicle (2). — *Bernard Frénicle de Bessy*, né à Paris vers 1605 et mort en 1670, écrivit de nombreux mémoires sur les combinaisons, la théorie des nombres et les carrés magiques. Il peut être intéressant d'ajouter qu'il défia Huygens de résoudre en nombres entiers le système d'équation suivant

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= z^2 \\ x^2 &= u^2 + v^2 \\ x - y &= u - v \end{aligned}$$

M. Pépin en a donné une solution en 1880.

De Laloubère. — *Antoine de Laloubère* père jésuite, né dans le Languedoc en 1600 et mort à Toulouse en 1664, donna en 1660 une solution inexacte des problèmes proposés par Pascal sur la cycloïde; mais son titre le plus sérieux à la renommée est que, le premier des mathématiciens, il étudia les propriétés de l'hélice.

(1) Ses écrits mathématiques furent publiés à Florence sous le titre *Opera Geometrica*. Voir aussi un mémoire par G. Loria. *Bibliotheca mathematica*, vol. I pp. 75-89., Leipzig, 1900.

(2) Les œuvres diverses de Frénicle, éditées par De la Hire, ont été publiées dans les *Mémoires de l'Académie*, vol. V, 1691.

Nicolas Mercator. — *Nicolas Mercator* (appelé quelquefois *Kauffmann*) naquit dans le duché de Holstein vers 1620; mais passa la plus grande partie de sa vie en Angleterre. Il vint en 1683 en France, où il dessina et construisit les fontaines de Versailles, mais on refusa de lui payer la somme convenue pour l'exécution des travaux, à moins qu'il ne se convertît au catholicisme; il mourut de vexations et de misère à Paris en 1687. Il écrivit un traité sur les logarithmes intitulé *Logarithmo-technica* publié en 1568. et découvrit la série

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots,$$

il démontrait cette égalité en écrivant l'équation de l'hyperbole sous la forme

$$y = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots,$$

à laquelle la méthode de quadrature de Wallis pouvait être appliquée.

La même série avait été découverte indépendamment par Saint-Vincent.

Barrow (¹). — *Isaac Barrow* naquit à Londres en 1630 et mourut à Cambridge en 1677. Il commença ses études au Collège de Charterhouse (où il se signala par une telle dissipation, qu'on entendit un jour son père s'écrier que, s'il plaisait à la Providence de le frapper dans la personne d'un de ses enfants, elle ne pouvait mieux faire que de choisir Isaac), il étudia ensuite au collège de Felstead, enfin il compléta son éducation au collège de la Trinité à Cambridge; après avoir pris ses grades en 1648, il obtint une agrégation en 1649, et résida alors pendant quelques années dans le collège, mais il en fut chassé par la persécution des Indépendants. Il passa dans l'est de l'Europe les quatres années suivantes et retourna en Angleterre en 1659 après diverses aventures. L'année suivante il obtint une chaire de grec à Cambridge. En 1662, il devint professeur de géométrie au collège Gresham et en 1663 il fut choisi pour occuper pour la première fois la chaire Lucasian

(¹) Ses œuvres mathématiques, éditées par W. Whewell, furent publiées à Cambridge en 1860.

à Cambridge. Il abandonna en 1669 cette dernière à son élève Newton, dont il reconnaissait la haute supériorité. Il consacra le restant de sa vie à l'étude des questions religieuses. Il fut nommé directeur du collège de la Trinité en 1672, et il conserva ce poste jusqu'à sa mort.

On le represente comme un homme « de faible stature, maigre et d'un teint pâle » négligé dans sa toilette et fumeur invétéré. Il était cité pour sa force et son courage, et l'on raconte que, voyageant dans la mer du Nord, il sauva par son intrépidité le vaisseau qui le portait attaqué par des pirates. Son esprit prompt et mordant en fit un favori de Charles II et détermina les courtisans à le respecter lors même qu'ils ne l'aimaient pas. Son talent comme écrivain et sa grande éloquence, sa vie irréprochable font de lui un personnage marquant de son époque.

Le premier de ses ouvrages est une édition complète des *Éléments* d'Euclide qu'il fit paraître en 1655 ; en 1660 il en publia une traduction anglaise, et en 1657 une édition des *Data*. Ses conférences, faites en 1664, 1665 et 1666, furent publiées en 1683 sous le titre *Lectiones Mathematicæ* : elles traitent principalement des bases méthaphysiques sur lesquelles reposent les vérités mathématiques. Ses conférences pour 1667 furent publiées la même année, et exposent l'analyse qui conduisit Archimède à ses principales découvertes. En 1669 il fit paraître ses *Lectiones Opticæ et Geometricæ*; il avertit dans la préface que ces leçons ont été revues et corrigées par Newton, qui y ajouta des recherches personnelles, mais il semble probable, d'après les remarques de Newton dans la controverse engagée à propos du calcul des fluxions que ces additions ne portent que sur l'optique : cet ouvrage, le plus important qu'il ait publié, fut réédité en 1674 avec quelques modifications de peu d'importance. En 1675 il publia une édition avec de nombreux commentaires des quatre premiers livres des *Coniques* d'Apollonius et des ouvrages existants d'Archimède et de Théodose.

Dans ses conférences sur l'optique, un grand nombre de problèmes relatifs à la réflexion et à la réfraction de la lumière sont traités avec ingéniosité. Il donne la définition des foyers dans les miroirs, et montre que l'image d'un objet est le lieu des foyers géométriques de chacun de ses points. Barrow étudia aussi quel-

ques unes des propriétés les plus simples des lentilles minces ; et simplifia considérablement l'explication cartésienne de l'arc-en-ciel.

Les leçons géométriques contiennent quelques méthodes nouvelles pour déterminer les aires et les tangentes des courbes. La plus remarquable est celle donnée pour la détermination des tangentes aux courbes, et cette question est assez importante pour que nous en fassions l'objet d'une note détaillée : elle montre comment Barrow, Hudde et Sluze appliquaient les idées de Fermat sur le calcul différentiel. Fermat avait observé que la tangente en un point P d'une courbe était déterminée si un autre point de cette tangente, en dehors de P, était connu ; par conséquent, si la longueur de la sous-tangente MT pouvait être trouvée (et par suite, le point T), alors la ligne TP serait la tangente demandée. Barrow faisait remarquer que, si l'abscisse et l'ordonnée d'un point Q voisin de P étaient tracées, il obtenait un petit triangle PQR (qu'il appelait le triangle différentiel, parce que ses côtés PR et PQ étaient les différences des abscisses et des ordonnées de P et de Q), de telle sorte que

$$\frac{TM}{MP} = \frac{QR}{RP}.$$

Pour trouver $\frac{QR}{RP}$ il supposait que x et y étaient les coordonnées de P, et $x - e$, $y - a$ celles de Q (Barrow faisait usage des

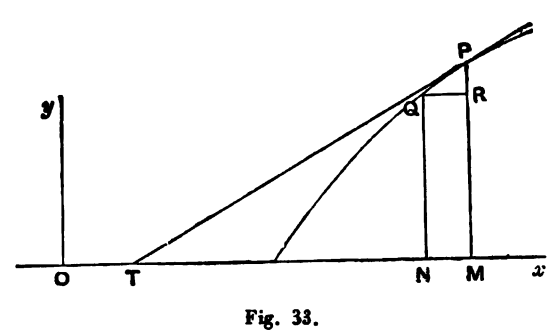


Fig. 33.

lettres p et m pour x et y, mais nous avons cru préférable de nous conformer à la notation moderne). En substituant les coordonnées de Q dans l'équation de la courbe, et en négligeant les carrés et les

puissances supérieures de e et a comparativement à leurs premières puissances, il obtenait $\frac{e}{a}$.

Le rapport $\frac{a}{e}$ fut par la suite (conformément à une idée émise par Sluze) appelé le cofficient angulaire de la tangente au point considéré.

Barrow appliqua cette méthode aux courbes

$$x^2(x^2 + y^2) = r^2y^2\,; \qquad x^3 + y^3 = r^3\,; \qquad x^3 + y^3 = rxy$$

(courbe appelée *la galande*) : $y = (r - x) \operatorname{tang} \frac{\pi x}{2r}$, la *quadratrice*, et $y = r \operatorname{tang} \frac{\pi x}{2r}$.

Il nous suffira ici de prendre comme exemple le cas le plus simple de la parabobe $y^2 = px$. En employant la notation donnée ci-dessus, nous avons pour le point P, $y^2 = px$; et pour le point Q $(y - a)^2 = p\,(x - e)$.

On a par soustraction $2\,ay - a^2 = pe$.

Mais si a est une quantité infiniment petite, a^2 doit être infiniment plus petit et par suite peut être négligé par rapport aux quantités $2ay$ et pe.

Alors

$$2ay = pe,$$

c'est-à-dire

$$\frac{e}{a} = \frac{2y}{p}.$$

Par conséquent

$$\frac{\text{TM}}{y} = \frac{e}{a} = \frac{2y}{p},$$

d'où

$$\text{TM} = \frac{2y^2}{p} = 2x.$$

C'est exactement le procédé employé dans le calcul différentiel avec cette différence que dans ce dernier cas nous avons une règle qui nous donne directement le rapport $\frac{a}{e}$ ou $\frac{dy}{dx}$ sans qu'il soit nécessaire d'effectuer pour chaque cas particulier un calcul semblable au précédent.

Brouncker. — William, Vicomte, Brouncker, l'un des fondateurs de la Société Royale de Londres, né vers 1620 et mort le 5 avril, 1684, fut l'un des plus brillants mathématiciens de cette époque. Il était en relations avec Wallis, Fermat et d'autres savants renommés. Nous avons mentionné plus haut sa curieuse reproduction d'une solution donnée par Brahmagupta d'une certaine équation indéterminée. Brouncker prouva que l'aire comprise entre l'hyperbole équilatère $xy = 1$, l'axe des x et les ordonnées $x = 1$, $x = 2$, est égale à

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \dots \qquad \text{ou à} \qquad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

Il s'occupa également d'autres expressions semblables pour différentes surfaces limitées par l'hyperbole et des lignes droites. Il écrivit sur la rectification de la parabole et de la cycloïde. (1) Il est à noter qu'il fit usage des séries infinies pour exprimer des quantités dont il n'aurait pu déterminer autrement les valeurs. En réponse à une question de Wallis concernant un essai de quadrature du cercle, il montra que le rapport de l'aire du cercle à l'aire du carré circonscrit, c'est-à-dire $\frac{\pi}{4}$, est égal à

$$\cfrac{1}{1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{2 + \dots}}}}}$$

Les fractions continues (2) avaient été introduites par Cataldi dans son traité sur la recherche des racines carrées des nombres publié à Bologne en 1613, mais Brouncker semble avoir été le plus ancien auteur qui ait étudié leurs propriétés.

James Gregory. — *James Gregory*, né à Drumoak près Aberdeen en 1638 et mort à Edimbourg en octobre 1675, fut successivement professeur à Saint-André et à Edimbourg. En 1660 il publia ses *Optica Promota* dans lequel se trouve décrit le télescope à ré-

(1) Au sujet de ces recherches, voir ses notes dans les *Philosophical Transactions*, Londres 1668, 1672, 1673 et 1678.

(2) Sur l'histoire des fractions continues voir les mémoires de S. Günther et A. Favaro insérés dans le *Balletino bibliografia* de Boncompagni Rome, 1874, vol. VII pp. 213, 451, 533.

flecteur qui porte son nom. En 1667 il composa sa *Vera Circuli et Hyperbolæ Quadratura*, ouvrage dans lequel il montrait comment les aires du cercle et de l'hyperbole pouvaient s'obtenir sous la forme de séries convergentes infinies, et là (pour la première fois croyons-nous) se trouve établie une distinction entre les séries convergentes et divergentes. Cet ouvrage contient également une proposition géométrique remarquable, prouvant que le rapport de l'aire d'un secteur de cercle quelconque à l'aire du polygone régulier inscrit, ou du polygone régulier circonscrit, ne peut être exprimé sous forme d'une expression algébrique comprenant un nombre fini de termes. De là il concluait que la quadrature du cercle est impossible : Montucla accepte ce raisonnement, mais il n'est pas concluant.

Ce livre contient encore les développements en séries de sin x, cos x, arc sin x et arc cos x. Il fut réimprimé en 1668 avec un appendice, *Geometriæ Pars*, dans lequel Gregory expliquait comment on pouvait déterminer les volumes des solides de révolution.

En 1671, ou peut-être plus tôt, il établit la relation

$$\theta = \text{tang}\,\theta - \frac{1}{3}\,\text{tg}^3\theta + \frac{1}{5}\,\text{tg}^5\theta - \ldots,$$

lorsque θ est compris entre $-\frac{1}{4}\pi$ et $\frac{1}{4}\pi$. C'est sur ce théorème que furent basés, par la suite, plusieurs des calculs faits pour arriver à une valeur approchée de π.

Wren. — *Sir Christophe Wren* naquit à Knoyle, Wiltshire, le 20 octobre 1632 et mourut à Londres, le 25 février 1723. Il est plus connu comme architecte que comme mathématicien, mais il occupa la chaire Savilian, fut professeur d'astronomie à Oxford de 1661 à 1673, et pendant quelque temps président de la Société Royale. Avec Wallis et Huygens il étudia les lois du choc des corps ; il découvrit également la double génération par une droite de l'hyperboloïde à une nappe, bien que probablement il ne se soit intéressé qu'à l'hyperboloïde de révolution (1). Il écrivit en outre sur la résistance des fluides, et le mouvement du pendule. Il était ami de

(1) Voir les *Philosophical Transactions*, Londres 1669.

Newton et (de même que Huygens, Hooke, Halley et d'autres) il avait essayé de montrer que la force qui provoquait le mouvement des planètes était en raison inverse du carré de la distance au soleil.

Wallis, Brouncker, Wren et Boyle (ce dernier était plutôt chimiste et physicien que mathématicien) furent les principaux savants qui fondèrent la Société Royale de Londres. La Société eut pour origine le prétendu « collège indivisible » créé à Londres en 1645 ; la plupart de ses membres se rendirent durant la guerre civile à Oxford, où Hooke, qui servait alors d'aide à Boyle dans son laboratoire, prit part à leurs réunions. La Société fut constituée à Londres en 1660, et fut organisée en corps le 15 juillet 1662. L'Académie dei Lincei fut fondée en 1603, l'Académie française en 1666, et l'Académie de Berlin en 1700.

Hooke. — *Robert Hooke,* né à Freshwater le 18 juillet 1635, et mort à Londres le 3 mars 1703, fit ses études à Westminster et Christ Church, Oxford. En 1665, il fut nommé professeur de géométrie au collège de Gresham, poste qu'il occupa jusqu'à sa mort. Il a découvert cette loi que, dans certaines limites, la tension exercée par une corde tendue est proportionnelle à l'allongement. Il inventa le pendule conique et étudia ses propriétés ; le premier, il affirma d'une façon formelle que les mouvements des corps célestes étaient de simples problèmes de dynamique. Il était aussi jaloux qu'orgueilleux et irritable et accusa à la fois Newton et Huygens de s'être approprié, sans scrupule, ses découvertes. De même que Huygens, Wren et Halley, il tenta de trouver la loi régissant la force qui produit le mouvement des planètes autour du soleil et il pensait que cette force varie en raison inverse du carré des distances. Comme Huygens il découvrit que les petites oscillations d'un ressort spiral enroulé étaient pratiquement isochrones et fut ainsi conduit à en recommander (probablement en 1658) l'usage dans les montres; il en avait une de ce genre faite à Londres, en 1675 ; elle fut achevée exactement trois mois après la construction d'une montre semblable faite à Paris d'après les indications de Huygens.

Collins. — *Jean Collins,* né près d'Oxford le 5 Mars 1625 et

mort à Londres, le 10 novembre 1683, était un homme d'une grande intelligence naturelle mais de peu d'instruction. Passionné pour les mathématiques, il passait tout le temps dont il disposait à correspondre avec les principaux mathématiciens du temps pour lesquels il était toujours prêt à faire tout ce qui était en son pouvoir, et il a été appelé — assez justement — le Mersenne anglais. On lui doit de nombreuses informations sur les détails des découvertes faites durant cette période (¹).

Pell. — Un autre mathématicien qui consacra une part considérable de son temps à faire connaître les découvertes des autres, et à correspondre avec les principaux mathématiciens fut *Jean Pell.* Pell naquit dans le Sussex le 1er mars 1610, et mourut à Londres le 10 décembre 1685. Il fit ses études au Collège de la Trinité à Cambridge et occupa successivement les chaires de mathématiques à Amsterdam et Breda; il entra ensuite au service diplomatique de l'Angleterre; mais il s'établit finalement en 1661 à Londres où il passa les vingt dernières années de sa vie. Ses principaux ouvrages sont une édition, considérablement augmentée, de l'*Algèbre* de Branker et Rhonius, Londres, 1668; et une table des carrés des nombres, Londres, 1672.

Sluze. — *René-François Walter de Sluze* (*Slusius*), chanoine de Liège, né le 7 juillet 1622 et mort le 19 mars 1685, trouva pour la sous-tangente d'une courbe $f(x, y) = 0$ une expression qui est équivalente à $-y\frac{\frac{df}{dy}}{\frac{df}{dx}}$; il écrivit de nombreux traités (²), et en particulier, discuta assez longuement les spirales et les points d'inflexion.

Viviani. — *Vincent Viviani,* élève de Galilée et de Torricelli, né à Florence le 5 avril 1622, et mort dans cette ville le 22 septembre 1703, fit paraître en 1659 une restitution du livre perdu

(¹) Voir le *Commercium Epistolicum,* et S. P. Rigaud, *Correspondence of Scientific Men of the Seventeenth Century,* Oxford, 1841.

(²) Quelques unes de ses notes ont été publiées par Le Paige dans le volume XVII du *Bulletino di bibliografia* de Boncompagni. Rome, 1884.

d'Apollonius sur les sections coniques ; et en 1701 une restitution de l'ouvrage d'Aristée. Il expliqua en 1677 comment on pouvait effectuer la trisection de l'angle à l'aide de l'hyperbole équilatère ou de la conchoïde. En 1692 il proposa le problème consistant à ouvrir dans une voûte hémisphérique quatre fenêtres égales, de telle sorte que le restant de la surface fut exactement quarrable : problème célèbre dont des solutions analytiques furent données par Wallis, Leibnitz, David Gregory, et Jacques Bernoulli.

Tschirnhausen. — *Ehrenfried Walther von Tschirnhausen* naquit à Kislingswalde le 10 avril 1631 et mourut à Dresde le 11 octobre 1708. En 1682, il étudia la théorie des caustiques par réflexion ou catacaustiques, comme on les appelait ordinairement, et il montra qu'elles étaient rectifiables. C'est le second exemple que l'on connaisse de la détermination de l'enveloppe d'une ligne mobile. Il construisit des miroirs ardents d'une grande puissance. La transformation par laquelle il enlevait dans une équation algébrique donnée certains termes intermédiaires est bien connue ; elle a été publiée dans les *Acta Eruditorum* pour 1683.

De la Hire. — *Philippe De la Hire* (ou *Lahire*), né à Paris le 18 mars 1640, et mort dans cette ville le 21 avril 1719, écrivit sur les méthodes graphiques, 1673 ; sur les sections coniques, 1685 ; il composa un traité sur les épicycloïdes, 1694 ; un autre sur les roulettes, 1702 ; et enfin un autre sur les conchoïdes, 1708. Son travail sur les sections coniques et les épicycloïdes est basé sur l'enseignement de Desargues dont il fut l'élève favori. Il traduisit également l'essai de Moschopulus sur les carrés magiques, et recueillit la plupart des théorèmes sur ce sujet qui étaient antérieurement connus : le tout fut publié en 1705.

Rœmer. — *Olof Rœmer*, né à Aarhuus le 25 septembre 1644, et mort à Copenhague le 19 septembre, 1710, mesura le premier la vitesse de la lumière, en 1675, au moyen des éclipses des satellites de Jupiter. Il répandit l'usage de la lunette méridienne et du cercle mural, les hauteurs azimutales ayant été jusque là généralement employées, et c'est d'après ses recommandations que les observations astronomiques des étoiles furent faites généralement par

la suite dans le méridien. Ce fut également lui qui le premier introduisit dans les observatoires l'usage des micromètres et des microscopes pour la lecture des angles. Il déduisit aussi des propriétés de l'épicycloïde la forme la plus convenable à donner aux dents des engrenages cylindriques pour assurer un mouvement uniforme.

Rolle. — *Michel Rolle*, né à Ambert le 21 avril 1652, et mort à Paris le 8 novembre 1719, écrivit en 1689 une algèbre qui contient le théorème qui porte son nom sur les racines d'une équation. Il publia, en 1696, un traité sur la résolution des équations déterminées ou indéterminées, et écrivit plusieurs autres ouvrages d'importance moindre. Il considérait le calcul différentiel, qui, ainsi que nous allons le voir un peu plus loin, avait été introduit vers la fin du dix-septième siècle, comme un ensemble d'artifices ingénieux.

NOTE I

S. VIÈTE CONSIDÉRÉ COMME GÉOMÈTRE DAPRÈS MICHEL CHASLES

On doit à Viète la doctrine des sections angulaires, c'est-à-dire la connaissance de la loi suivant laquelle croissent ou décroissent les sinus, ou les cordes des arcs multiples ou sous-multiples. La première idée d'exprimer l'aire d'une courbe par une suite infinie de termes se trouve aussi dans les ouvrages de ce grand géomètre.

Viète n'était pas moins profond dans la géométrie pure des anciens, que dans l'analyse algébrique. Il résolut le premier avec la règle et le compas le problème : construire un cercle tangent à trois cercles donnés. Mais c'est surtout en trigonométrie sphérique qu'il fit ses plus belles découvertes. Il donna la solution de quelques cas nouveaux des triangles, inventa deux formules analytiques générales comprenant tous les cas de la trigonométrie sphérique.

On lui doit surtout une idée neuve et heureuse, c'est la transformation des triangles sphériques en d'autres, dont les angles et les côtés répondent, d'une certaine manière, aux côtés et aux angles du triangle donné, qui devait conduire Snellius à la découverte du triangle supplémentaire (voir Chasles *Histoire de la Géométrie*, p. 51 et suivantes.

NOTE II

ANALYSE DES OUVRAGES ORIGINAUX DE NAPIER RELATIFS A L'INVENTION DES LOGARITHMES

Par M. Biot

Ayant été chargé il y a quelques mois de faire, pour le *Journal des Savants*, l'analyse d'une *Vie de Napier* qui a récemment paru en Ecosse, je me suis trouvé ainsi dans l'obligation d'étudier les écrits originaux dans lesquels il a publié son invention des logarithmes, surtout, afin de reconnaître la marche des idées qui avaient pu l'y conduire, ainsi que les moyens plus ou moins exacts qu'il avait employés pour la réaliser. Or, je n'ai pu me défendre d'un véritable sentiment d'admiration quand j'ai vu tout ce qu'il y avait mis de finesse, de précision et de patience à combiner des nombres ; et comme les écrits dont il s'agit sont aujourd'hui peu connus, parce qu'on n'a jamais besoin d'y recourir pour jouir des avantages de sa découverte, il m'a semblé qu'il pourrait y avoir quelque intérêt à en offrir ici une analyse exacte, où les idées de Napier seraient exposées avec la lucidité que l'on peut leur donner aujourd'hui en les exprimant dans notre langage algébrique, sans toutefois leur ôter rien de ce qu'elles ont d'individuel et d'original, comme l'on fait trop souvent, ou même toujours, ceux qui ont eu l'occasion de les rappeler.

Les ouvrages dont il s'agit sont au nombre de deux, dont les exemplaires sont très rares. L'un, publié du vivant de Napier et par lui-même en 1614, est intitulé *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio*. Il y expose le mode de génération qu'il attribuait aux nouvelles quantités appelées par lui *Nombres artificiels ou Logarithmes ;* à quoi il joint leurs affections ou propriétés numériques, dérivées de cette définition ; leur usage pour simplifier les calculs arithmétiques, lorsqu'il faut multiplier des nombres entre eux, ou les diviser les uns par les autres, leur emploi dans les déterminations de Trigonométrie et d'Astronomie ; enfin les tables numériques contenant les logarithmes des lignes trigo-

nométriques appelées *sinus*, *cosinus*, *tangentes*, *sécantes*, calculées de minute en minute pour tous les degrés du quart de cercle, ce qui avait dû lui coûter un incroyable travail matériel, indépendamment de l'invention. Tout cela est donné sans explication, sans aucune ouverture sur les idées qui l'avaient conduit à concevoir l'admirable utilité de ces tables, non plus que sur les moyens qu'il avait employés pour les calculer. Le second ouvrage est intitulé *Mirifici Logarithmorum Canonis Constructio*. Celui-ci fut seulement publié après sa mort, par son fils, en 1619. Dans ce livre, Napier explique, établit, démontre tous les procédés, tout le mécanisme de la construction de ses logarithmiques qu'il n'avait pas voulu d'abord dévoiler. Nous n'avons plus besoin aujourd'hui que de son idée primordiale, non de sa méthode. Le développement immense donné au calcul algébrique, par l'emploi des symboles littéraux dont l'introduction est dûe à Viete, nous fournit aujourd'hui des séries rapidement, indéfiniment convergentes, au moyen desquelles nous obtenons ces mêmes logarithmes par une voie directe, immédiate, presque sans travail, avec une netteté de symboles qui nous laisse toujours voir l'effet présent des opérations générales que nous faisons subir aux formules, et qui nous permet d'apprécier avec une généralité non moins complète le degré d'approximation de nos résultats. Toutefois, quoique la précision où ils peuvent être ainsi poussés soit sans limite, je déclare à l'honneur de Napier, qu'elle ne dépasse rien qu'on ne puisse atteindre fort aisément par sa méthode ; et si, comme il est assez naturel de le supposer, cette assertion paraît plus que hardie à nos analystes, j'espère pouvoir en donner tout à l'heure des preuves qui ne laisseront rien à objecter.

Mais, pour avoir cette juste idée du travail de Napier, il faut l'étudier dans ses livres mêmes, surtout dans le second où il explique sa méthode, et ne pas s'en fier aux extraits qu'on en a donnés, De tous ces extraits, le meilleur, c'est-à-dire le plus consciencieux et le plus travaillé, est à mon avis celui qu'a publié Hutton dans son introduction aux *Tables mathématiques* de Sherwinn et qui est réimprimé avec cette introduction dans le volume des *Scriptores Logarithmici*. Toutefois la marche suivie par Napier y est plutôt reproduite exactement qu'elle n'y est caractérisée dans son principe et dans ses résultats, comparativement à nos méthodes actuelles ; or c'est là surtout ce que l'on aime à connaître d'un premier inventeur. Pour Montucla, on serait presque tenté de croire qu'il n'a pas eu entre les mains l'ouvrage posthume et explicatif de Napier ; car il lui attribue des procédés de bissection qui ne sont pas les siens et qui ont été employés depuis par Briggs. On devrait s'attendre à en trouver une plus juste estime dans l'histoire de l'Astronomie par Delambre, à qui ne manquaient assurément ni la connais-

sance des méthodes logarithmiques actuelles, ni l'amour sincère de la vérité ; mais par un défaut de philosophie qui se fait trop remarquer dans son ouvrage, il n'emploie pas seulement la simplicité de nos formules modernes pour mettre au grand jour les idées de Napier, ce qui serait leur véritable usage ; il traduit, traduit imparfaitement ses idées en formules modernes, leur donne ainsi pour base une approximation empirique qu'elles n'ont point et qui est positivement opposée à l'esprit de Napier. Puis ainsi défiguré il l'examine, lui demande compte d'inexactitudes qu'il n'a pas commises, de fautes qu'il lui attribue par sa propre erreur, après quoi il en porte un jugement qui pour être bienveillant et favorable, n'en est pas moins contraire à la réalité. On a dit et répété que les derniers chiffres des tables de Napier étaient inexacts. C'est la vérité ; mais une vérité plus utile aurait consisté à savoir si l'inexactitude résultait de sa méthode ou de quelque faute de calcul dans son application. C'est ce que j'ai fait ; et j'ai reconnu ainsi qu'il y avait en effet une petite faute de ce genre, une très petite faute dans le dernier terme de la seconde progression que Napier forme pour préparer le calcul de sa table. Or, tous les pas suivants sont conclus de celui-là, ce qui y porte les petites erreurs que l'on a remarquées. J'ai corrigé la faute, et ensuite j'ai calculé, selon sa méthode, mais à l'aide de nos procédés plus rapides, le logarithme de 5000000 qui est le dernier de la table de Napier, celui par conséquent sur lequel toutes les erreurs s'accumulent ; j'ai trouvé ainsi pour sa valeur 6931471,808942, tandis que par les méthodes modernes, il doit être 6931471,805599. La différence commence à la dixième figure. J'ai calculé pareillement le logarithme hyperbolique de 10 d'après les nombres de Napier corrigés ; j'ai trouvé pour sa valeur 2,302585094034б, tandis que par nos tables actuelles elle est 2,302585092994о : la différence réelle porte donc seulement sur la neuvième décimale. C'est plus que n'en comprennent les tables de Callet dont nous nous servons tous les jours. Si Napier avait eu à sa disposition un magister de village pour calculer par soustractions une progression géométrique plus lente encore que celle dont il a fait usage, travail qu'il présente comme désirable, les tables à quatorze décimales de Briggs n'auraient eu sur les siennes aucune supériorité. A l'époque où Napier publia ses tables de logarithmes, tous les mathématiciens, tous les astronomes, et ils étaient alors en grand nombre, sentaient à chaque instant le besoin de trouver quelque invention qui simplifiât les effroyables calculs numériques auxquels ils étaient sans cesse contraints de se livrer pour la résolution des triangles célestes, seule application des Mathématiques que l'on connût alors. Divers détails de l'histoire scientifique du temps attestent particulièrement les tentatives faites à cet égard par un obscur mathématicien du continent appelé Byrge,

comme sans doute par beaucoup d'autres, au nombre desquels on compte Képler lui-même. Et en effet, lorsque l'on songe à ce que devait être le calcul numérique des tables de sinus et de tangentes naturelles pour un rayon exprimé par un million ou même par dix millions de parties, comme on en construisait alors ; quand on songe que tout cela exigeait de continuelles divisions et multiplications qui devaient impitoyablement s'exécuter au complet, sans faire grâce d'aucun chiffre sur les plus grands nombres, on comprend très bien que tous les vœux des mathématiciens tendissent à se délivrer d'un si lourd fardeau, et que la nécessité suggérât mille moyens plus ou moins imparfaits de s'y soustraire. Mais Napier seul a donné et publié pour cela les logarithmes : on ne trouve aucune invention aussi bonne pour ce but ni avant, ni après lui ; et elle nous sert encore aujourd'hui, sans que nous sentions le désir ou le besoin d'aucune autre. A ces titres son droit d'inventeur, d'inventeur unique est incontestable. Mais ce droit devient, s'il est possible, plus clair encore, quand on étudie le principe de ses tables, que l'on met à nu l'idée simple qui leur sert de base, que l'on en comprend l'originalité, que l'on apprécie la justesse avec laquelle il l'applique, et la précision des résultats qu'il en déduit. C'est ce que je vais essayer de rendre sensible à tous les lecteurs.

Les propriétés des progressions géométriques et arithmétiques considérées en correspondance, ont été reconnues et démontrées, pour la première fois, par Archimède, dans le *Traité de l'Arénaire*. De là aux logarithmes, il n'y a qu'un pas ; et même les logarithmes ne sont que des indices employés à la manière d'Archimède, pour exprimer le rang de chaque nombre dans une série géométrique indéfinie qui les comprend tous, de sorte que leurs multiplications et leurs divisions entre eux, peuvent de même se remplacer par l'addition ou la soustraction mutuelle des indices qui leur correspondent. Mais comment comprendre tous les nombres dans une même série géométrique procédant continûment par rapports égaux ? C'est précisément en cela que consiste l'idée fondamentale de Napier. Il n'y a qu'à faire ce rapport commun si près de l'égalité, que la progression marche par des pas excessivement lents, de sorte qu'un nombre quelconque donné, s'il ne tombe juste sur un des termes de la progression, se trouve du moins compris entre deux termes si peu différens l'un de l'autre que l'erreur soit négligeable ; ou mieux encore, il n'y a, comme le fait Napier, qu'à se représenter la progression géométrique et la progression arithmétique correspondante, comme engendrées par le mouvement continu de deux mobiles partis ensemble du repos, et marchant l'un avec une accélération géométrique, l'autre avec un mouvement toujours équidifférent et uniforme. Les positions simultanées des deux mobiles à un instant quel-

conque donneront, dans la progression géométrique le nombre, dans l'Arithmétique, l'indice ou le logarithme qui lui correspond.

Mais cette idée toute simple offre dans l'exécution une difficulté matérielle. Pour former les termes successifs de la progression géométrique, il faut les multiplier sucessivement par leur rapport commun, autant de fois qu'il y a d'unités dans l'indice de leur rang. Nous voilà donc retombés dans des calculs de multiplication que précisément nous voulions éviter. Napier se soustrait à cet embarras par un moyen très simple et rempli d'adresse. Il forme sa progression géométrique en descendant des plus grands aux moindres nombres, au lieu de monter des petits aux grands comme Archimède ; et il emploie, pour rapport constant des termes successifs, celui de 10 à 9, ou de 100 à 99, ou de 1000 à 999, ou généralement d'une puissance entière de 10 à cette même puissance diminuée de l'unité. Alors chaque terme peut se déduire du précédent par simple soustraction. Car si le premier terme est, par exemple, 10000000 et le second 9999999, celui-ci s'obtiendra en retranchant du premier l'unité qui est sa dix-millionième partie. Le troisième se déduira du second en ôtant de même au second un dix-millionième de sa valeur ou 0,9999999 suivant notre notation décimale actuelle ; et, en continuant cette marche, on obtiendra par simple soustraction géométrique, autant de termes qu'on voudra, lesquels se suivront tous dans la même proportion qu'on aura choisie. Mais quelque lente que soit la raison de cette progression, ce n'est encore que l'expression d'un mouvement intermittent, tandis que la définition népérienne du logarithme exige que l'on détermine les indices de rang qui correspondraient aux mêmes termes engendrés par un mouvement tout-à-fait continu. Napier n'obtient pas l'expression absolue de cette rectification, comme nous pourrions aujourd'hui le faire par nos méthodes différentielles, qui nous permettent de passer sans erreur de la discontinuité à la continuité. Mais en comparant les conditions essentielles du mouvement continu à celles du mouvement intermittent, il établit des limites mesurables entre lesquelle le logarithme d'un nombre donné est toujours compris ; de sorte, que si ces deux limites diffèrent entre elles seulement au-delà de l'ordre de décimales que l'on veut conserver, on peut légitimement prendre l'une quelconque, ou mieux encore le milieu entre elles pour l'expression suffisamment approchée du logarithme. Appliquant ceci à son tableau, il montre que le logarithme du premier terme 9999999 est nécessairement compris entre 1,0000000 et 1,0000001 de sorte qu'il le prend égal à 1,00000005. Or la valeur exacte de ce logarithme calculée par nos méthodes actuelles est 1,00000 00500 00003 333, de sorte que l'évaluation de Napier est seulement en erreur d'un tiers d'unité sur la quatorzième décimale de

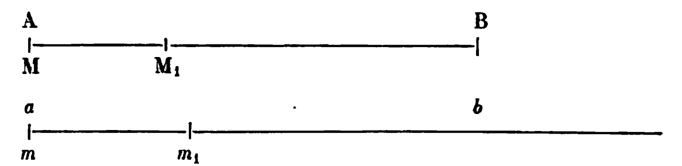
ce logarithme. C'est donc là le premier terme de la progression arithmétique correspondante à la progression géométrique qu'il a adoptée. Donc, en le multipliant par la suite des nombres 1, 2, 3,... qui marquent le rang successif des termes de cette progression géométrique, il aura les indices, c'est-à-dire les logarithmes de tous ces termes. C'est en effet ainsi qu'il opère ; et, avec quelques abréviations, il conduit sa table de correspondance, depuis 10000000 jusqu'à 5000000. Alors, si l'on assigne un nombre quelconque compris entre ces limites, il montre comment on obtiendra immédiatement son logarithme avec l'approximation requise en le comparant aux deux termes de la progression géométrique entre lesquels il est compris. Si le nombre proposé sort des limites de la table, il montre comment on peut l'y faire rentrer et obtenir son logarithme. Le problème général d'enlacer ainsi tous les nombres, exactement ou approximativement, dans une même progression géométrique, se trouve donc complètement résolu ; et alors pour toutes les multiplications et divisions des nombres les uns par les autres on obtient les mêmes facilités, les mêmes simplifications qu'Archimède avait trouvées pour la progression géométrique particulière dont il a fait usage dans l'*Arénaire*. Telle est l'invention de Napier. Il a rendu continu et général pour tous les nombres, les avantages qu'Archimède n'avait obtenus qu'intermittens et particuliers. Si l'on demande pourquoi Archimède n'a pas fait ce second pas qui peut nous sembler aujourd'hui si voisin du premier, on en trouverait une raison plausible dans la nature des symboles littéraux employés de son temps pour désigner les nombres. Car la signification de ces caractères étant absolue, des nombres très peu différents les uns des autres étaient souvent exprimés par des caractères qui n'avaient aucune relation apparente entre eux ; ou si leurs expressions avaient des élémens communs, le rapport de grandeur de ceux-ci aux dissemblables n'était pas mis en évidence par l'expression numérique même ; au lieu que ces deux sortes d'évidence excitent et frappent pour ainsi dire les regards dans notre manière actuelle d'écrire les nombres, surtout lorsque, généralisant l'idée qui donne une valeur de position aux chiffres, on l'étend dans un sens inverse aux subdivisions de l'unité par l'emploi des chiffres décimaux. C'est encore ici un exemple de l'influence des signes sur l'extension des idées dont l'histoire des Mathématiques abonde. Faisons remarquer à ce sujet, que Napier employa le premier en Europe, cette généralisation si simple dans le mode d'écrire les subdivisions décimales qui était indispensable pour effectuer ses soustractions successives et les contenir dans des limites fixées d'erreurs. Si l'on veut se convaincre que cette idée n'était pas si simple à découvrir que nous pourrions le croire aujourd'hui, qu'elle nous est familière par l'usage, il n'y a qu'à voir les

moyens compliqués et presque impraticables par lesquels Stevin, un habile et ingénieux géomètre, essayait d'écrire les décimales peu de temps auparavant. A la vérité Pitiscus y substitua la notation actuelle, en 1612, dans la seconde édition de sa *Trigonométrie* et le *Canon mirificus* où Napier emploie cette notation, ne parut qu'en 1614, ce qui laisse à Pitiscus le mérite comme l'antériorité de la publication ; mais, que Napier qui l'emploie constamment dans ses tables, eût dû l'imaginer aussi de son côté, indépendamment de Pitiscus, cela semblera incontestable, si l'on fait attention au nombre d'années considérable que le calcul de ces tables a dû exiger. Or toute leur construction est fondée sur l'emploi de cette notation ; et ainsi elles en attestent l'usage antérieur, probablement même fort antérieur, à Pitiscus qui ne l'employait pas dans son édition précédente en 1599.

Le système de logarithmes adopté par Napier était le plus simple et le plus commode qu'on pût concevoir alors pour former les termes successifs de la progression géométrique. Les tables qu'il avait construites ainsi, offraient déjà pour les multiplications et les divisions ces avantages de simplification immenses que nous avons plus haut expliqués. Képler les adopta, et en publia une copie dans les *Tables Rudolphines* dont il transforma le plan pour leur en adapter l'usage. Toutefois l'invention une fois trouvée, on pouvait bien voir que le système logarithmique de Napier n'était pas celui qui s'appropriait le mieux à notre mode décimal de numération. Briggs, professeur d'Oxford, contemporain de Napier, en imagina un autre qui offre cet avantage ; et qui est le même dont nous nous servons aujourd'hui. Il paraît qu'il reçut cette idée de Napier même, avec lequel il alla plusieurs fois conférer en Ecosse : et, à la fin de l'ouvrage posthume de Napier, on trouve un appendice dans lequel la méthode employée par Briggs est indiquée. Quoi qu'il en soit, Briggs construisit avec habileté sur ce nouveau système des tables excellentes, les plus exactes, les plus abondantes en décimales qui aient été publiées jusqu'ici. C'est une œuvre estimable de patience et même d'habileté ingénieuse aux approximations numériques. Mais on s'est quelquefois autorisé de cette amélioration pour attribuer à Briggs une part dans l'invention même. En vérité, c'est confondre deux mérites trop dissemblables, le génie et le labeur ; mais le vif sentiment des découvertes n'est pas une faculté vulgaire et il est trop souvent remplacé par un autre moins honorable qui est le penchant secret des esprits médiocres à rabaisser ce qui est élevé.

Après cette exposition générale, nous allons entrer dans l'exposition numérique des procédés que Napier a employés. Pour cela, nous rappellerons d'abord la manière dont il conçoit la génération des logarithmes. Nous traduirons cette définition dans le langage analytique

actuel pour en établir et en voir aisément les conséquences. Nous rapporterons ensuite la série des procédés que Napier emploie pour réaliser sa conception, et nous apprécierons le degré de précision qu'ils atteignent ; nous montrerons enfin que tous les systèmes de logarithmes imaginables peuvent être déduits d'un mode de génération analogue avec de simples changements de constantes ; et cela nous fera voir en quoi le système particulier adopté par Napier était spécialement favorable pour la marche du calcul numérique qu'il employait.



Napier considère deux droites parallèles AB, *ab* ; la première AB, est finie et il exprime sa longueur par 10 000 000 ; nous la représenterons par A : la seconde *ab* est indéfinie.

Aux origines A et *a* sont deux points matériels M, *m*, qui, d'abord en repos, partent simultanément pour parcourir les droites AB, *ab*. Les vitesses initiales de ces deux points sont égales entre elles ; mais les lois de leurs mouvements sont différentes. *m* se meut uniformément sur *ab* avec sa vitesse initiale. M se meut sur AB avec une vitesse continuellement décroissante, et toujours proportionnelle à l'espace qui lui reste à décrire pour arriver à l'extrémité B.

Cela posé, si l'on conçoit qu'à un même instant quelconque, le mobile *m* soit parvenu en m_1, sur la droite *ab*, et le mobile M en M_1 sur la droite AB ; mm_1 sera le logarithme de BM_1. Telle est la définition de Napier.

Pour en voir d'abord les conséquences, écrivons-là en analyse. Soit $am_1 = x$; $AM_1 = y$, concevons le temps t partagé en intervalles égaux et très petits que nous prendrons pour unité de temps, et nommons αA la vitesse initiale commune aux deux mobiles pour une unité pareille. Puis, substituons à la continuité du mouvement géométrique, un mouvement discontinu dont les intermittences se succèdent après chaque unité de temps, en conformant toujours les vitesses successives à la condition géométrique que leur assigne Napier.

Alors la correspondance des y et des x aux époques successives du mouvement sera telle que la montrent les colonnes suivantes :

Unités de temps écoulées depuis le départ.	Valeur de am_1 ou x à cette époque.	Valeur correspondante de BM. ou A — y.	Accroissement de y pendant l'instant suivant.	Valeur nouvelle de y résultante de l'accroissement précédent.
0	0	A	aA	$y_1 = a\text{A}$
1	aA	$\text{A}(1-a)$	$a\text{A}(1-a)$	$y_2 = a\text{A} + a\text{A}(1-a) = \text{A} - \text{A}(1-a)^2,$
2	$2a$A	$\text{A}(1-a)^2$	$a\text{A}(1-a)^2$	$y_3 = y_2 + a\text{A}(1-a)^2 = \text{A} - \text{A}(1-a)^3,$
3	$3a$A	$\text{A}(1-a)^3$	$a\text{A}(1-a)^3$	$y_4 = y_3 + a\text{A}(1-a)^3 = \text{A} - \text{A}(1-a)^4,$
4	$4a$A	$\text{A}(1-a)^4$	$a\text{A}(1-a)^4$	$y_5 = y_4 + a\text{A}(1-a)^4 = \text{A} - \text{A}(1-a)^5,$
etc.	etc.			

La loi de ces successions est évidente. Après un nombre quelconque n d'unités de temps, elle donnera pour les positions simultanées des deux mobiles

$$x = na\text{A}, \quad y = \text{A} - \text{A}(1-a)^n;$$

de là, en éliminant a, l'on tire

$$y = \text{A} - \text{A}\left(1 - \frac{x}{n\text{A}}\right)^n,$$

ou, en développant le facteur binome,

$$y = \text{A}\left(\frac{x}{\text{A}} - \frac{n.n-1}{1.2}\cdot\frac{x^2}{n^2\text{A}^2} + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}\frac{x^3}{n^3\text{A}^3} - \frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4}\cdot\frac{x^4}{n^4\text{A}^4}\ldots, \text{etc.}\right).$$

Ici le nombre n des intermittences est quelconque. Pour passer de la discontinuité à la continuité, il faut le supposer infini, x restant fini ; alors x sera logarithme de A — y selon la définition de Napier. Or, cette supposition donne

$$y = \text{A}\left(\frac{x}{\text{A}} - \frac{x^1}{1.2}\frac{x^2}{\text{A}^2} + \frac{1}{1.2.3}\frac{x^3}{\text{A}^3} - \frac{1}{1.2.3.4}\cdot\frac{x^4}{\text{A}^4}\ldots.., \text{etc.}\right).$$

Maintenant la série comprise dans les parenthèses est le développement de $1 - e^{-\frac{x}{\text{A}}}$, e étant la base des logarithmes hyperboliques, c'est-à-dire le nombre 2,7182818 ; en le remplaçant par cette valeur contractée, on a

$$y = \text{A} - \text{A}e^{-\frac{x}{\text{A}}} \quad \text{d'où} \quad \text{A} - y = \text{A}e^{-\frac{x}{\text{A}}}.$$

A — y est le nombre dont x est le logarithme dans le système de Napier. Représentons-le pour partager par N. On aura donc dans ce système

$$\frac{\text{N}}{\text{A}} = e^{-\frac{x}{\text{A}}};$$

mais en désignant par z le logarithme de $\frac{N}{A}$ dans le système hyperbolique dont la base est e, on a

$$\frac{N}{A} = e^z;$$

il en résulte donc que l'on a aussi

$$z = -\frac{x}{A},$$

ou, en remplaçant les lettres x et z par les espèces particulières de logarithmes qu'elles représentent,

$$\log \text{hyp.} \left(\frac{N}{A}\right) = -\frac{\log \text{népérien (N)}}{A}$$

et inversement

$$\log \text{népérien (N)} = -A \log \text{hyp.} \left(\frac{N}{A}\right).$$

Ces relations très simples reproduisent en effet tous les logarithmes de la table de Napier, quand on donne les logarithmes hyperboliques ordinaires et réciproquement.

Par exemple, dans la table de Napier, le rayon étant représenté par 10 000 000, le sinus de 30°, moitié du rayon, est représenté par 5 000 000 ; et sa table, corrigée d'une petite faute de calcul accidentelle, donne

$$\log 5000000 = 6931471{,}808942;$$

prenant donc 5 000 000 pour le nombre N et observant que A est 10 000 000, on devra avoir

$$\log \text{hyp} \left(\frac{N}{A}\right) \text{ou} \log \text{hyp.} \left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{6931\,47{,}808942}{10\,000\,000} = -0{,}6931478089 42.$$

Or, d'après les tables hyperboliques de Callet, on trouve en effet,

$$\log \text{hyp.} \left(\frac{1}{2}\right) = -0{,}6931471805599:$$

l'erreur de Napier n'est donc que de trois unités sur la dixième décimale.

Connaissant ainsi la constitution de sa table, d'après la définition même qu'il a assignée à ses logarithmes, nous pouvons apprécier le degré plus ou moins parfait d'exactitude que lui donnent les limites entre lesquelles il démontre que le logarithme doit être compris pour

chaque nombre ; limites qui lui servent à obtenir les vraies valeurs résultantes du mouvement continu.

Le nombre étant toujours supposé $A - y$, son logarithme x est toujours plus grand que y et moindre que $\frac{Ay}{A - y}$: telle est sa proposition.

Pour en démontrer la première partie, il considère que x et y sont deux espaces décrits en temps égal sur les deux droites ab, AB, le premier avec un mouvement uniforme, le second avec une vitesse continuellement décroissante, depuis l'origine A. Or, par définition, les vitesses initiales étaient égales à cette origine pour les deux mobiles : donc la somme des espaces décrits par m avec cette vitesse initiale constamment conservée, surpasse la somme des espaces correspondants, en même nombre, décrits par M avec la même vitesse initiale perpétuellement affaiblie ; donc premièrement, on aura toujours $x > y$.

Quant à l'autre limite $\frac{Ay}{A - y}$, il la construit d'abord sur BA prolongé ; et la représentant par AM_2, il reporte de même la valeur

M_2 A B
M M_1

a b
m_2 m m_1

am_1 ou x, sur le prolongement de ba en m_2 ; puis il dit : les espaces M_2A, m_2a, peuvent être considérés comme décrits dans un même temps, le premier avec une vitesse continuellement décroissante jusqu'en A, le second avec une vitesse uniforme. Mais, par définition, la plus petite vitesse de M_2 qui a lieu en A est égale à la vitesse de m_2 en a, et dans tout le reste de l'espace M_2A, elle lui est supérieure, donc on aura toujours

$$m_2a < M_2A \quad \text{ou } x < \frac{Ay}{A - y}.$$

Ayant ainsi démontré l'existence de ces deux limites, il forme leur valeur numérique lorsqu'il a besoin d'un logarithme exact ; et lorsqu'elles diffèrent seulement au-delà de l'ordre de décimales qu'il se propose de conserver, il prend la moyenne entre elles, comme étant une valeur suffisamment exacte, ce qui est en effet évident.

Puisque nous connaissons l'expression analytique exacte de ses logarithmes, nous pouvons apprécier le degré absolu de cette approximation ; pour cela, revenons à la relation générale,

$$A - y = Ae^{-\frac{x}{A}}.$$

En prenant de part et d'autre les logaritmes dans le système hyperbolique, il viendra

$$x = -\text{A log hyp.}\left(\frac{\text{A} - y}{\text{A}}\right) = -\text{A log hyp.}\left(1 - \frac{y}{\text{A}}\right),$$

et en développant le second membre,

$$x = y + \frac{1}{2\text{A}}y^2 + \frac{1}{3\text{A}^2}y^3 + \frac{1}{4\text{A}^3}y^4 \ldots\ldots,$$

c'est la valeur vraie du logarithme népérien x en fonction de y. Maintenant la limite supérieure $\frac{\text{A}y}{\text{A} - y}$ ou $\frac{y}{1 - \frac{y}{\text{A}}}$ étant développée, donne

$$y + \frac{y^2}{\text{A}} + \frac{y^3}{\text{A}^2} + \frac{y^4}{\text{A}^3} \ldots\ldots, \text{etc.};$$

ajoutant donc la limite inférieure y, et prenant la moyenne des deux, comme le fait Napier, on a pour résultat,

$$y + \frac{1}{2\text{A}}y^2 + \frac{1}{2\text{A}^2}y^3 + \frac{1}{2\text{A}^3}y^4 \ldots\ldots, \text{etc.}$$

On voit donc qu'en prenant cette moyenne pour la vraie valeur de son logarithme, c'est-à-dire pour x, l'erreur de Napier ne commence qu'aux quantités du troisième ordre ; et encore, pour cet ordre, elle consiste seulement dans l'excès de $\frac{1}{2\text{A}^2}y^3$ sur $\frac{1}{3\text{A}^2}y^3$, de sorte qu'elle est seulement $\frac{1}{6\text{A}^2}y^3$. D'après cela, si l'on veut savoir pour quelle valeur de y elle produira une unité sur les décimales du quatorzième ordre de ses logarithmes, ce qui répond au vingt-unième des nôtres, il n'y a qu'à supposer

$$\frac{1}{6\text{A}^2}y^3 = 0{,}00000\,0000000\,001,$$

et puisque $\text{A} = 10000000$, il viendra $y = \sqrt[3]{6}$;
c'est-à-dire que y sera plus grand que 1 et moindre que 2, d'où $\text{A} - y$ moindre que 9999999, et plus grand que 9999998. Or, en effet, l'emploi fondamental que Napier fait de ces limites, pour la construction de sa table, s'applique au nombre 9999999, et aussi le logarithme se trouve-t-il seulement en erreur de $\frac{1}{3}$ d'unité sur les décimales de l'ordre quatorzième comme on le verra plus loin.

Ici Napier établit plusieurs théorèmes très dignes de remarque, non

[illegible] contraire fort simples, mais par [illegible] s annoncent. Le but de ces théo- [illegible] es d'approximation des résultats [illegible] par l'addition, soustraction, mul- [illegible] qui ne sont elles-mêmes connues [illegible] rreur.

[illegible] des logarithmes pour les nom- [illegible] un même rapport. Ce théorème [illegible] ur les relations qu'ont entre eux [illegible] progressions de l'*Arénaire*. Mais [illegible] i devient fort utile pour déduire, [illegible] thme d'un nombre, du logarithme [illegible] le plus grand des deux nombres, [illegible] me N_2 qui soit à A, comme N_1 [illegible]

$$[illegible] A \frac{(N - N_1)}{N}.$$

[illegible] ntité très petite, N_2 différera très [illegible] xprime cette différence sera par sa [illegible] ement. Mais, par hypothèse, A sert [illegible] n a pris zéro pour son logarithme. [illegible] son logarithme pourra être donné [illegible] des deux limites y et $\frac{Ay}{A - y}$, qui [illegible], ou, en éliminant N_2, $\frac{A(N - N_1)}{N}$ [illegible]

[illegible] t de cette condition par l'étendue [illegible]

[illegible] lles diffèrent seulement dans les [illegible] u de négliger. Alors en prenant [illegible] herchée des logarithmes de N et [illegible] iquer dans le sens convenable à [illegible] onné. Napier n'a pas présenté ces [illegible] que nous venons d'employer, et il [illegible] cette époque, mais sa méthode et [illegible] tes.

[illegible] limites d'erreur que la réduction [illegible] final, c'est-à-dire dans la déter- [illegible] n'y a qu'à employer séparément

les limites trouvées pour le logarithme de N_2 et les combiner avec celles du logarithme donné, soit par somme, soit par différence, selon qu'il sera nécessaire ; de manière à connaître les limites extrêmes du résultat final, conformément aux règles établies plus haut par Napier pour ce mode de combinaison.

Mais il peut arriver que le moyen proportionnel auxiliaire N_2 ne se trouve pas assez voisin de A pour que son logarithme soit donné immédiatement avec une précision suffisante par la moyenne des deux limites qui l'embrassent. Alors, comme la table générale des logarithmes calculés commence au nombre A, on cherchera dans cette table le nombre qui diffère le moins de N_2. Soit ce nombre N_3 ; son logarithme sera connu par la table même ; il ne restera donc qu'à déterminer la différence des logarithmes de N_2 et de N_3, ce qui se fera par un nouveau moyen auxiliaire N_4, comme nous venons tout à l'heure de l'expliquer. Si N_4 se trouve assez près de A pour que son logarithme puisse être assigné avec une exactitude suffisante par la moyenne des limites qui l'embrassent, on en déduira celui de N_2, puis enfin celui de N ou de N_1 ; mais, si N_4 se trouvait encore compris entre des limites trop larges, on le comparerait encore au nombre tabulaire qui en approche le plus, et l'on formerait un nouveau moyen auxiliaire N_5 pour déterminer la différence des logarithmes ; puis, au besoin, on recourrait à un autre, à un autre encore, jusqu'à ce qu'enfin les limites du dernier logarithme diffèrent entre elles aussi peu qu'on le voudra.

Ces préliminaires étant établis, je passe à la construction des tables. Une disposition très ingénieusement choisie par Napier, c'est d'avoir pris sa progression géométrique descendante, ce qui lui permet d'en former les termes successifs avec autant de précision qu'il le désire par de simples soustractions successives sans multiplications ni divisions. Ainsi, prenant pour terme supérieur le nombre 10 000 000, si la raison de la progression doit être $\frac{9999999}{10000000}$, comme il le fait dans une première table préparatoire indispensable à expliquer d'abord, il est évident qu'il suffira de retrancher du premier terme 10000000, sa dix-millionième partie, ou simplement 1 pour avoir le second terme de la progression qui sera 9999999 ; puis de celui-ci encore ôtant sa dix-millionième partie, ou 0,9999999, on aura le troisième terme et ainsi de suite, aussi loin que l'on voudra. Napier pousse d'abord cette première table jusqu'à 101 termes en comptant le premier. On comprendra tout à l'heure la raison de ce nombre. Pour le moment, je me borne à présenter la succession de ces calculs, comme le fait Napier, en y signalant l'usage des décimales avec la même généralité et

simplicité que nous leurs donnons aujourd'hui, sauf qu'il emploie un point au lieu d'une virgule pour les séparer.

Rangs successifs des termes, à partir du premier	Termes successifs de la progression géométrique.
0	10000000.0000000
	1.0000000
1	9999999.0000000
	.9999999
2	9999998.0000001
	.9999998
3	9999997.0000003
etc.	etc.
100	9999900.0004950.

La vraie valeur de ce centième terme, calculée directement avec vingt décimales, par nos méthodes de développement actuelles, est

9999900,00049 49983 83003 92122.

On l'obtient aisément, d'après l'expression générale de ce 101e terme qui est $10^7 (1 - \alpha)^{100}$, α représentant la fraction un dix-millionième, ou $\frac{1}{10^7}$. Cette expression développée devient

$$10^7 \left(1 - 100\alpha) + \frac{100.99}{1.2}\alpha^2 - \frac{100.99.98}{1.2.3}\alpha^3 + \frac{100.99.98.97}{1.2.3.4}\alpha^4 \ldots\right.$$

et en mettant pour α sa valeur

$$10^7 - 100 + \frac{100.99}{1.2}.\frac{1}{10^7} - \frac{100.99.98}{1.2.3}\frac{1}{10^{14}} + \frac{100.99.98.97}{1.2.3.4}\frac{1}{10^{21}}, \text{etc.}$$

Le calcul effectué jusqu'aux α^4 donne la valeur que nous venons de rapporter. On voit que celle de Napier n'en diffère que dans la neuvième décimale.

Cette table sert à Napier pour deux choses : d'abord pour trouver le logarithme du premier terme 9999999, et par déduction, tous les logarithmes des termes suivants qui dérivent les uns des autres par le

même rapport ; secondement, pour calculer, d'après le dernier terme de la table, le logarithme du nombre 9999900 qui est extrêmement peu différent de ce terme-là.

Pour la première opération, il considère que le nombre 9999999 étant égal à A — 1, y est 1 ; de sorte que les limites de son logarithme sont 1 et $\frac{10000000}{9999999}$ ou 1,00000 01000 0001... ; lesquelles ne diffèrent l'une de l'autre que par la septième décimale, on peut donc, dans cet ordre d'approximation, prendre pour valeur du logarithme, la moyenne de ces limites, c'est-à-dire 1,00000 005. Napier s'arrête à ce résultat. Pour en apprécier la précision, il n'y a qu'à reprendre la relation générale trouvée plus haut entre ses logarithmes et les nôtres, laquelle est

$$\text{log nép. } N = - A \text{ log hyp. } \left(\frac{N}{A}\right),$$

ici l'on a

$$A = 10^7; \quad N = 9999999 = 10^7 - 1$$

d'où

$$- \text{log hyp. } \left(\frac{N}{A}\right) = - \text{log hyp. } \left(\frac{10^7 - 1}{10^7}\right) = - \text{log hyp. } \left(1 - \frac{1}{10^7}\right).$$

et en développant ce logarithme en série, puis effectuant la multiplication par A ou 10^7, il vient

$$\text{log nép. } (9999999) = 1 + \frac{1}{2.10^7} + \frac{1}{3.10^{14}} + \frac{1}{4.10^{21}} \cdots\cdots,$$

ou, en effectuant les calculs,

$$\text{log nép. } (9999999) = 1,00000\ 00500\ 00003\ 333,$$

d'où l'on voit que le résultat de Napier n'est en erreur que de $\frac{1}{3}$ d'unité sur la quatorzième décimale.

Le logarithme du premier terme de sa progression géométrique étant connu, il en déduit aussitôt ceux de tous les termes suivants par la la condition d'équidifférence, c'est-à-dire, en multipliant ce premier logarithme, par le rang successif de chaque terme ; le centième et dernier terme de sa progression se trouve donc ainsi avoir pour logarithme cent fois la valeur précédente, c'est-à-dire 100,000050, avec ses limites comprises entre 100,000000 et 100,000010 ; d'après le résultat exact obtenu plus haut, on voit que cette évaluation n'est en erreur que de $\frac{1}{3}$ d'unité sur la douzième décimale.

Ceci est le logarithme du dernier terme de sa première table. Pour passer de là au logarithme de 9999900, Napier emploie des moyens proportionnels auxiliaires qui se rapprochent davantage du premier terme de la progression. Nous avons expliqué plus haut ce procédé d'après lui. Ceci va nous fournir un exemple de la manière dont il l'applique.

Il cherche donc d'abord un moyen auxiliaire N_2, tel qu'on ait

$$\frac{N_2}{A} = \frac{N_1}{N}, \quad \text{ou} \quad N_2 = \frac{AN_1}{N} = A - \frac{A(N - N_1)}{N},$$

ici l'on a

$$A = 10^7, \quad N = 9999900{,}0004950\,; \; N_1 = 9999900.$$

Conséquemment le terme correctif

$$\frac{A(N - N_1)}{N} = \frac{10^7.0{,}000495}{9999900} = \frac{10^5.0{,}000495}{10^5 - 1} = \frac{0{,}000495}{1 - \frac{10^5}{1}}$$
$$= 0.000495000495\ldots.$$

Ainsi, d'après les formules de la page 340, les deux limites du logarithme de N_2, selon Napier, seront

$$\frac{A(N - N_1)}{N} = 0{,}000495000495 \text{ et } \frac{A(N - N_1)}{1 - \frac{(N - N_1)}{N}} = \frac{0{,}000495000495}{1 - 0{,}0000000000495}.$$

Ces deux quantités étant égales, dans les douze premières décimales, on peut prendre à volonté l'une ou l'autre pour la limite de N_2, et les ajoutant à celles déjà obtenues pour le logarithme du dernier terme de la progression, c'est-à-dire à 100,000000 et 100,000010, on aura celles du logarithme de 9999900, lesquelles seront ainsi

$$100{,}000495000495 \quad \text{et} \quad 1{,}000505000495\,;$$

ce qui, en se bornant à huit décimales, donne pour la valeur moyenne de ce logarithme,

$$100{,}00050\;000495$$

C'est la valeur que lui donne Napier. Le calcul exact, par les séries, donne un résultat qui diffère à peine. En effet, on a alors

$$N = 9999900 = 10^2.(10^5 - 1) = 10^7\left(1 - \frac{1}{10^5}\right);$$

ce qui étant mis dans l'expression générale du logarithme népérien

donne

$$\text{log nép. } (9999900) = -10^7 \text{ log hyp. } \left(1 - \frac{1}{10^5}\right) = 100 + \frac{1}{2.10^3} + \frac{1}{3.10^8} + \frac{1}{4.10^{14}} \ldots\ldots,$$

ou en réduisant

$$\text{log nép. } (9999900) = 100{,}00050\,00033\,33358,$$

résultat différent de celui de Napier seulement dans les neuvièmes décimales.

Ce nombre 9999900 lui sert pour premier terme d'une nouvelle progression plus rapide dont la raison est $\frac{9999900}{10000000}$ ou $\frac{99999}{100000}$ et dont les termes se déduisent encore par simple soustraction, en retranchant de chaque terme sa centième partie, comme le montre le tableau suivant qui n'a plus besoin d'explication :

Rangs successifs des termes à partir du premier	Termes successifs de la progression géométrique.
0	10000000.000000
	100.000000
1	9999900.000000
	99.999000
2	9999800.001000
	99.998000
3	9999700.003000
	99.997000
4	9999600.006000
etc.	etc.
50	9995001,224804.

Napier ne conduit cette progression que jusqu'au cinquantième terme, parce que son but est seulement d'en déduire le logarithme de 9995000, dont il va avoir besoin tout à l'heure. Dans les soustractions qui l'ont conduit à ce cinquante-unième terme, il faut qu'il ait

commis quelque petite faute de calcul, car la valeur qu'il donne est seulement 9995001, 222927, et elle est en erreur dès la troisième décimale. Ce résultat devenant uue base fondamentale de sa table, comme on va le voir, altère nécessairement les dernières décimales de la plupart de ses logarithmes, et y cause les erreurs que l'on y a remarquées; mais la faute est dans le détail mécanique du calcul non dans la méthode.

Nous avons déterminé tout à l'heure le logarithme du nombre 9999900 qui est le premier de cette seconde table, et nous l'avons trouvé égal à 100,000500; ceux de tous les autres termes suivent donc celui-là par équidifférence, puisque ces termes procèdent les uns des autres, suivant le même rapport. Le logarithme du cinquante-unième et dernier sera donc égal à 50 fois la différence commune, ou à

$$5000,02500\,;$$

c'est ainsi que fait Napier. La valeur exacte déduite de nos résultats précédents serait

$$5000,02500\ 01666\ 679\,;$$

elle diffère seulement dans la septième décimale.

De là, en appliquant ses théorèmes de limites, Napier conclut le logarithme de 9995000, et il le trouve ainsi égal à 5001,2485357; mais ce résultat est influencé par la faute qu'il a commise sur son cinquante-unième terme. En refaisant le calcul par sa méthode, après avoir corrigé l'erreur, on trouva 5001,25041645; la valeur exacte directement

Rangs successifs des termes à partir du premier.	Termes successifs de la progression géométrique.
0...........	10000000.000000
	5000.000000
1...........	9995000.000000
	4997.500000
2...........	9990002.500000
	4995.001250
3...........	9985007.498750
etc.	etc.
20...........	9900473.578080

déduite des séries, serait 5001,25041 68230, et elle ne diffère encore que dans la septième décimale de celle que Napier aurait dû obtenir.

Enfin, avec ce dernier nombre, 9995000, il construit une troisième table qu'il forme encore par soustraction avec le rapport $\frac{10000000}{9995000}$ ou $\frac{10000}{9995}$ qui est précisément $1 - \frac{1}{2000}$, et il obtient ainsi le tableau de la page 346.

Napier ne conduit cette troisième progression que jusqu'au vingtième terme, parce qu'il veut seulement en déduire le logarithme de 9900000. Or, cela lui suffit pour l'obtenir; car, d'abord, comme il a le logarithme du premier terme de sa nouvelle progression, il peut en conclure tous ceux des autres termes par la loi d'équidifférence; et ainsi le logarithme du vingtième terme s'obtiendra en multipliant par 20 cette différence commune, ce qui lui donne 100024,970774, qu'il se borne à remplacer par 100025, et de là, il conclut le logarithme voisin du 9900000 qu'il trouve égal à 100503.3210291. Mais ces résultats sont encore viciés par la petite erreur du dernier terme de sa seconde table; et, en les en dépouillant, on trouve par sa méthode le logarithme de 9900000 égal à

100503,35852 28,

tandis que le calcul direct par les séries, donne

100503,35852 5350;

de sorte que l'erreur du résultat obtenu par sa méthode ne commence plus qu'à la sixième décimale.

Ayant obtenu, par ce qui précède, le logarithme de 9995000 et celui de 9900000, Napier s'en sert pour construire, toujours par soustraction et par équidifférence, une nouvelle table beaucoup plus étendue, qu'il appelle *Table radicale*, parce que c'est généralement aux termes qui la composent qu'il rapporte les nombres quelconques, dont il veut déterminer le logarithme. Cette table contient 69 colonnes verticales, comprenant chacune 21 termes, ce qui fait en tout 1449 termes, ou nombres, accompagnés de leurs logarithmes. Nous rapportons ici, comme type, les deux premières colonnes et la dernière, en rectifiant seulement les conséquences de la faute de calcul que nous avons signalée. (Voir le tableau de la page 348).

La formation de toutes ces colonnes est très simple. D'abord, quant aux nombres naturels, les premiers de chaque colonne se déduisent successivement les uns des autres, par le rapport commun $\frac{99}{100}$, ou

$1 - \frac{1}{100}$, c'est-à-dire en retranchant de chaque terme précédent la centième partie de sa valeur. Par exemple, de 10000000 retranchant le centième qui est 10000, il reste 9900000 qui devient le premier nombre de la seconde colonne et ainsi des autres successivement.

Dans le sens vertical, les nombres naturels de chaque colonne se déduisent les uns des autres par la proportion commune $\frac{10000000}{9995000}$ ou $1 - \frac{1}{2000}$; leur formation successive est donc facile en les dérivant des premiers de chaque colonne.

1re colonne		2e colonne			69e colonne	
Nombres naturels	Logarithme	Nombres naturels	Logarithme		Nombres naturels	Logarithme
10000000.0000	0.0	9900000.0000	100503.4	......	5048858.8879	6834228.4
9995000.0000	5001.2	9895050.0000	105504.6	......	5046334.4584	6839229.6
9990002.5000	10002.5	9890102.4750	110505.9	......	5043811.2112	6844230.9
9985007.4987	15003.7	9885157 4237	115507.1	......	5041289 3856	6849232.1
9980014.9950	20005.0	9880214.8451			5038768.7409	6852433.4
etc.	etc.	etc.	etc.	......	etc.	etc.
					5031109.6568	6929252.1
9900373.5780	100025.0	9801468.8422	200528.4	......	4998609.4019	6934253.4

Quant aux logarithmes qui correspondent à ces nombres, ils sont également faciles à calculer. Car, d'abord pour les premiers nombres de chaque colonne qui ont un rapport constant, leurs logarithmes marchent par équidifférence, et la raison de leur progression est le logarithme de 9900000 moins celui de 10000000, c'est-à-dire celui même de 9900000, l'autre étant zéro.

Ainsi, par les déterminations précédentes, cette différence commune est 100503,3585228.

Dans le sens vertical, les logarithmes de chaque colonne sont encore équidifférents. Mais la raison est égale à la différence des logarithmes de 9995000 et de 10000000, c'est-à-dire à 5001,25041645, d'après les évaluations rapportées plus haut.

Cette table radicale étant ainsi formée, seulement à l'aide de sous-

tractions et d'additions, Napier y ramène tous les nombres dont il veut trouver les logarithmes.

Cherchons, par exemple, le logarithme de 5000000 nombre qui représente le sinus de 30°, lorsque le rayon est 10000000 ou 10^7. Ce logarithme se trouve évidemment compris entre les deux derniers de la dernière colonne; et l'on peut calculer combien il en diffère, par la méthode des moyens auxiliaires expliquée plus haut. Partant donc ainsi du nombre tabulaire 5001109,9568, qui est le plus voisin de 500000, le premier moyen proportionnel auxiliaire, est 9997780,5790294. Si l'on veut le considérer comme suffisant, il donne pour la différence cherchée, des logarithmes 2219,6673162. Mais on pourrait craindre que ce premier moyen ne fût trop différent de 10^7, pour qu'on pût lui appliquer directement les conditions des limites avec une suffisante exactitude. En ce cas, il faudrait le comparer à son analogue tabulaire qui se trouverait être le vingt-troisième terme de la seconde table préparatoire, lequel a pour valeur 9997800,230988, avec un logarithme égal à 2200,011000. Alors, en rapportant à ce terme le premier moyen auxiliaire, on formerait un second moyen qui, cette fois, par ses limites, donnerait pour différence des derniers logarithmes 19,6563115; laquelle étant ajoutée à 2200,011000, donne 2219,667311, résultat qui diffère seulement dans la sixième décimale de celui qui donnait la première proportionnalité. Toutefois ce second résultat étant déduit de limites plus étroites, est préférable; l'ajoutant donc au logarithme tabulaire de 5001109,9568 qui est 6929252, 141631, on aura le logarithme de 500000 qui se trouvera être 6931471, 808942, lequel, ainsi qu'on l'a vu plus haut, n'est en erreur que de trois unités sur la quatrième décimale. Napier, dans son ouvrage, lui attribue une valeur différente et plus fautive, laquelle est 6931469.22. Mais cela provient sans doute de la petite faute de calcul qu'il avait faite dans sa seconde table préparatoire; et, dans tous les cas, la valeur que nous venons d'obtenir est bien réellement celle que sa méthode doit donner.

J'ai calculé de même par sa méthode le logarithme de 8000000 dont il fait également un usage spécial, comme nous le verrons tout à l'heure. Pour l'obtenir, n'ayant pas toute sa table radicale explicitement formée, je cherche d'abord la puissance de $\frac{99}{100}$ qui en diffère le moins, et je trouve par une évaluation facile que c'est la 23°. Le calcul exact de $\left(\frac{99}{100}\right)^{23}$ qui se fait aisément par la formule du binome, me donne le premier terme de cette 23° colonne que je trouve égale à

$$8016305,89539\,046.$$

Son logarithme est 22 fois la différence commune horizontale

$$100503,3585228,$$

ce qui produit 2231078891672. Maintenant, pour se rapprocher du nombre proposé 8000000, il faut descendre graduellement dans cette 23ᵉ colonne, suivant les conditions de proportion et de différences assignées plus haut. Alors, après quatre opérations de ce genre, on trouve pour le 5ᵉ terme le nombre 8000285,30405085, ayant pour logarithme 2231078,8891672. C'est le plus voisin de 8000000 qui soit dans la colonne. La différence des logarithmes de ces deux nombres conclue d'un seul moyen auxiliaire, se trouve être 356,6235045 : et en l'ajoutant au logarithme tabulaire, on a le logarithme de 8000000 égal à 2231435,5126717. C'est aussi généralement celui du rapport abstrait $\frac{8}{10}$; car ce rapport est le même que $\frac{8000000}{10000000}$, et dans le système de Napier, le logarithme de 10000000 est nul.

Or, nous avons trouvé tout à l'heure le logarithme de 5000000, lequel est aussi celui du rapport abstrait $\frac{1}{2}$ par une raison pareille ; donc, en le triplant, nous aurons le logarithme de $\frac{1}{8}$, lequel sera

$$20724415,426826;$$

Ajoutons ce dernier logarithme à celui de $\frac{8}{10}$, nous aurons le logarithme du produit $\frac{1}{10}$, lequel sera ainsi 23025850,9394977 ; ce sera le logarithme du nombre 1000000.

Si nous voulons celui de $\frac{1}{5}$, il est aussi celui de 2000000 ; il n'y a qu'à retrancher de ce résultat le logarithme de $\frac{1}{2}$, et il viendra le logarithme de $\frac{1}{5}$ égal à 16094379,1305557.

On peut aisément apprécier le degré de précision de ces résultats en les comparant à nos tables actuelles, d'après les relations assignées plus haut entre les logarithmes népériens et nos logarithmes hyperboliques. Mais il y a une de ces vérifications qui se présente d'elle-même ; car puisqu'on a généralement

$$\text{log hyp.}\left(\frac{N}{A}\right) = -\frac{\text{log nép. N}}{A} \quad \text{ou} \quad \text{log. hyp.}\left(\frac{A}{N}\right) = \frac{\text{log. nép. N}}{A};$$

si l'on fait $N = 1000000 = 10^6$, comme $A = 10^7$, on aura

$$\text{log hyp. } 10 = \frac{\text{log nép. } 10^6}{10^7} = 2{,}30258\,50939\,495770.$$

Or, d'après nos tables actuelles, on a

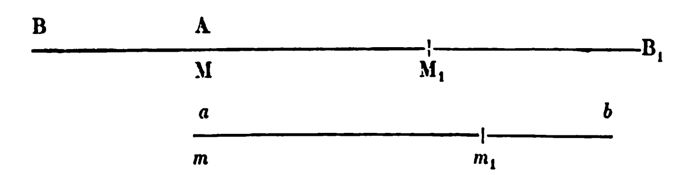
$$\log \text{hyp. } 10 = 2{,}30258\,50929\;\;940.$$

L'erreur de Napier n'est donc que d'une unité sur la 9e décimale de ce logarithme.

Les logarithmes des rapports $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{10}$, trouvés tout à l'heure, servent à Napier pour obtenir les logarithmes des nombres inférieurs à 5000000; car il est évident qu'en multipliant ces nombres par 2, 5, ou 10 : ou par une puissance quelconque de ces rapports, il peut les ramener dans sa table radicale et en déduire leurs logarithmes dans cet état. Après quoi, ajoutant au résultat les logarithmes des rapports employés pour les multiplier, il obtient les logarithmes qui conviennent à ces mêmes nombres, dans leur état primitif.

L'application principale que Napier avait en vue en construisant sa table, c'était de donner les logarithmes des lignes trigonométriques, dont les valeurs numériques étaient alors consignées dans des tables continuellement employées par les astronomes. Voilà pourquoi Napier appelle toujours les nombres naturels des sinus. Dans sa table, le nombre 10000000 représente le sinus de l'angle droit, et sa moitié 5000000, celui de 30°. Sa table radicale ne descendant pas plus bas que ce dernier arc, il trouve les logarithmes des sinus qui conviennent aux arcs moindres en les ramenant dans sa table radicale par les artifices de multiplications indiqués ci-dessus, et il emploie aussi au même usage les relations trigonométriques qui peuvent abréger les calculs pour les diverses parties d'un même quadrans. Mais comme ces détails n'ont plus de rapport avec son invention originale, nous cesserons de nous en occuper.

Seulement pour achever de mettre en rapport ses idées avec les nôtres nous appliquerons à un système de logarithmes quelconque, le mode de génération qu'il a imaginé pour les siens. Concevons donc de nouveau deux droites BAB_1, ab, sur ces droites, deux mobiles M, m,



lesquels partent simultanément du repos en A et a avec des vitesses initiales données Aa et Aα, se meuvent tous deux dans le même sens sur leur droite, le premier M avec une vitesse géométriquement va-

riable, toujours proportionnelle à sa distance à un point fixe B, tel que $AB = A$, et le second m, avec vitesse constante toujours égale à sa vitesse initiale $A\alpha$. Supposons qu'après un temps fini quelconque, M soit arrivé en M_1, m en m_1 aux distances y et x de leurs points de départ respectifs. Partageons le temps t en un très grand nombre de parties très petites que nous prendrons pour unité, et concevons que les vitesses Aa et $A\alpha$ soient exprimées pour cette unité-là. Alors, en substituant au mouvement continu géométrique, un mouvement intermittent, modifié après chaque unité de temps écoulée précisément comme nous l'avons fait pour le cas particulier de Napier; nous trouverons qu'après un nombre quelconque d'instants n, les positions simultanées des deux mobiles sont liées par les relations suivantes :

$$x = nA\alpha, \quad y = -A + A(1 + a)^n;$$

ici $A + y$ est le nombre dont x est le logarithme; de là on tire

$$y = -A + A\left(1 + \frac{a}{\alpha}\cdot\frac{x}{nA}\right)^n.$$

ou en développant le second membre,

$$y = A\left[\left(\frac{a}{\alpha}\right)^1 \frac{x}{A} + \frac{n.n-1}{1.2}\left(\frac{a}{\alpha}\right)^2 \frac{x^2}{n^2A^2} + \frac{n\,n-1.n-2}{1.2.3}\cdot\left(\frac{a}{\alpha}\right)^3 \frac{x^3}{n^3A^3}\cdots\right].$$

Ici, le nombre n des intermittences est quelconque; en le faisant infini, x restant fini, nous passerons de la discontinuité à la continuité. Alors il restera

$$y = A\left[\left(\frac{a}{\alpha}\right)\frac{x}{A} + \frac{1}{1.2}\left(\frac{a}{\alpha}\right)^2\frac{x^2}{A^2} + \frac{1}{1.2.3}\left(\frac{a}{\alpha}\right)^3\frac{x^3}{A^3}\cdots\cdots\right].$$

La série comprise entre les parenthèses est égale à

$$-1 + e^{\left(\frac{a}{\alpha}\right)\frac{x}{A}},$$

e étant le nombre qui sert de base aux logarithmes hyperboliques; on aura donc par cette contraction,

$$y = -A + Ae^{\left(\frac{a}{\alpha}\right)_A}, \quad \text{d'où} \quad A + y = Ae^{\left(\frac{a}{\alpha}\right)\frac{x}{A}},$$

$A + y$ est généralement le nombre dont x est le logarithme dans le système donné. Représentons pour abréger ce nombre par N, et nous aurons

$$N = Ae^{\left(\frac{a}{\alpha}\right)\frac{x}{A}}.$$

Dans le système adopté par Napier, les deux vitesses initiales Aa et Aα sont égales, mais de signes opposés, puisqu'il fait décroître les nombres, quand les logarithmes augmentent. On a donc, par ces suppositions,

$$N = Ae^{-\frac{x}{A}},$$

comme nous l'avions trouvé directement, page 336. Dans le système appelé *hyperbolique*, on suppose que chaque nombre N est donné par l'équation

$$N = e^x,$$

x étant son logarithme dans ce système; on a donc alors $a = \alpha$, et en outre, $A = 1$, c'est-à-dire que les vitesses initiales des deux progressions sont égales, comme dans le système de Napier, mais elles sont de même sens, au lieu qu'il les met en sens contraire; et en outre, $A = 1$, tandis que Napier le fait égal à 10^7.

Dans notre système décimal de logarithmes, en les représentant par x, on a généralement.

$$N = (10)^x = e^{x \text{ log hyp. } (10)};$$

donc, pour assimiler ces logarithmes à ceux qui seraient engendrés par le mouvement, il faut prendre $A = 1$, comme dans les logarithmes hyperboliques, et en outre faire

$$\frac{a}{\alpha} = \text{log hyp. } 10,$$

c'est-à-dire que le rapport des deux vitesses initiales des deux progressions est précisément égal au logarithme hyperbolique de la base. Il est pareillement facile de voir que, pour ce cas, où les logarithmes croissent dans le même sens que les nombres, la marche arithmétique de Napier serait encore applicable, pourvu que la progression choisie fût ascendante. Par exemple, si sa raison était $\frac{10000001}{10000000}$, en sorte que chaque terme se déduirait du précédent par simple addition, en *lui ajoutant* sa dix-millionième partie qui se prend à vue. Si Napier eût voulu, ou bien eût vécu assez, pour effectuer cette application de sa méthode avec des progressions convenablement choisies, il aurait pu obtenir nos tables actuelles ou des tables analogues, aussi exactement et plus aisément que par les bissections dont Briggs s'est servi pour les former.

NOTE III

SUR KÉPLER

Nous croyons devoir ajouter quelques pages à ce que M. Ball dit de Képler, en nous inspirant du bel ouvrage de M. Joseph Bertrand « les fondateurs de l'Astronomie » Képler est à la fois l'un des plus grands génies et l'une des plus nobles figures que l'humanité ait produits.

Né de parents pauvres, maltraité dans son enfance, occupé dans sa jeunesse aux plus vils travaux, obligé de lutter toute sa vie contre la pauvreté, persécuté pour ses opinions religieuses, il ne cessa de poursuivre avec une énergie indomptable et inlassable le problème le plus difficile que l'homme ait encore osé abordé. Mais avant de parler des lois de Képler, je veux ajouter quelques mots à ce que M. Ball a dit de Képler considéré comme géomètre. M. Ball a parlé de l'ouvrage de Képler sur le jaugeage des tonneaux. Dans ce travail il y a un passage qu'il faut citer ; c'est la remarque faite par Képler que, dans le voisinage d'un maximum la variation d'une fonction est insensible, je cite textuellement Képler :

« Sous l'influence d'un bon génie qui sans doute était géomètre, les constructeurs de tonneaux leur ont précisément donné la forme qui, pour une même longueur de la ligne mesurée par les jaugeurs, leur assure la plus grande capacité possible ; et comme aux environs du maximum les variations sont insensibles, les petits écarts accidentels n'exercent aucune influence appréciable sur la capacité, dont la mesure expéditive est par suite suffisamment exacte. » Cette idée sur les maxima, jetée en passant, mais en termes si assurés, par Képler, devait être développée vingt ans plus tard par Fermat, dont elle est un des titres de gloire.

Nous devons citer encore, de Képler, (¹) sa belle méthode des projec-

(¹) Chasles. — *Histoire de la géométrie.*

tions, pour déterminer, par une construction graphique, les circonstances des éclipses de soleil pour les habitants des différents points de de la terre. C'était, deux cents ans avant l'invention de la géométrie descriptive, une application ingénieuse de la doctrine des projections comme on ferait aujourd'hui. Cette méthode a été suivie, par les célèbres astronomes et géomètres Cassini, Flamsteed, Wren Halley, et généralisée par Lagrange dans un mémoire où il est intéressant de voir avec quelle habileté l'illustre auteur de la mécanique analytique savait aussi se servir des procédés de la géométrie descriptive vingt ans avant que cette production du génie de Monge eût vu le jour.

Je ne veux pas exposer ici comment après neuf années d'efforts poursuivis avec une application infatigable, et une contention d'esprit qui parfois « le tourmenta, dit-il, presque jusqu'à la démence, *diu nos torserat pene ad insaniam* », Képler parvint à représenter le mouvement de Mars par deux des lois reconnues ensuite applicables aux autres planètes, et qui ont immortalisé son nom.

M. Bertrand a signalé, et nous croyons devoir reproduire deux circonstances remarquables, qui venant en aide à la pénétration d'esprit de Képler, l'ont conduit plus facilement au but dont elles auraient pu l'éloigner.

« Le mouvement de la Terre, dont la connaissance présumée a servi de base à tous ses calculs, était théoriquement aussi mal connu que celui de Mars. Le cercle dans lequel il fait mouvoir notre planète doit être remplacé par une ellipse ; mais cette ellipse, fort heureusement, diffère assez peu d'un cercle pour que la substitution de l'une à l'autre soit indifférente au degré d'approximation qu'il fallait adopter. S'il en eût été autrement, la méthode devenait inexacte, et les chiffres, en se contredisant, auraient averti et découragé le judicieux et sincère inventeur.

La seconde circonstance, plus remarquable encore peut-être, est l'imperfection des méthodes d'observation et des instruments de Tycho.

Képler a pu affirmer, il est vrai, qu'une erreur de huit minutes était impossible, et cette confiance a tout sauvé ; s'il avait pu en dire autant d'une erreur de huit secondes, tout était perdu. L'organe intérieur du jugement aurait cessé, suivant une expression de Gœthe, d'être en harmonie avec l'organe extérieur de la vue, devenu trop délicat et trop précis.

Képler se trompait, en effet, en regardant l'important avantage obtenu sur la planète rebelle et opiniâtre, comme une de ces victoires décisives qui terminent à jamais la lutte ; ces grandes lois, éternellement vraies dans de justes limites, ne sont pas rigoureuses et mathématiques. De nombreuses perturbations écartent incessamment Mars de

[illegible] eu des liens délicats dans lesquels [illegible] lacer à jamais. Pour qui pénètre [illegible] quées et prévues confirment, il est [illegible] ion qu'elles agrandissent en l'éclai- [illegible] rée de ces perturbations, consé- [illegible] précises, en enveloppant la vérité [illegible] t retardé pour bien longtemps [illegible] ue du ciel. Képler, rejetant alors [illegible] ême titre que l'orbite circulaire, [illegible] t les lois du mouvement perturbé, [illegible] bles obstacles, toutes les ressources [illegible] a patience.

[illegible] dans les mystères de la nature, et [illegible] ont il avait révélé les lois. Après [illegible] des orbites circulaires obligatoires, [illegible] r lequel repose aujourd'hui toute [illegible] ement naturel d'un corps est tou- [illegible] eureusement : « S'il n'a pas une [illegible] ion gâte tout. *Nego ullum motum* [illegible] *esse, præsidio mentali destitutum.* Il [illegible] ncessante pour conduire la planète [illegible] rce réside dans le soleil. Képler [illegible] *orpus esse fontem virtutis quæ plane-* [illegible]

[illegible] our parler mieux, c'est la vérité.

[illegible] épler, il nous faut parler du plus [illegible] *s mundi libri quinque* » et ici encore [illegible]

[illegible] uement plusieurs figures régulières [illegible] els il est conduit auraient suffi, [illegible] astres confrères (¹), pour préserver [illegible] roblème en équation et interprète [illegible] 'est encore tout ce que nous pou- [illegible] l résultat ne satisfait pas Képler. [illegible] s des polygones réguliers doivent [illegible] ture introuvables. Et il n'y a rien [illegible] *se rencontrer dans l'archétype du* [illegible] *a conformation de ses parties.* S'oc- [illegible] ine, et reprenant l'idée de Pytha-

[illegible] *historique sur l'origine et le développement* [illegible]

gore, qui comparait, dit-on, les planètes aux sept cordes de la lyre, il veut montrer comment l'homme, imitant le Créateur par un instinct naturel, sait, dans les notes de sa voix, faire le même choix et observer la même proportion que Dieu a voulu mettre dans l'harmonie générale des mouvements célestes ; la même pensée du Créateur se traduisant ainsi dans tous ses desseins, dont l'un peut servir d'interprète et de figure à l'autre.

Cherchant des harmonies partout où elles sont possibles, Képler consacre un chapitre à la politique :

« Cyrus, dit-il, vit dans son enfance un homme de haute taille, vêtu d'une courte tunique, et près de lui un nain avec une robe longue et traînante. Il fut d'avis qu'ils échangeassent leurs robes, afin que chacun eût celle qui convenait à sa taille ; mais son maître déclara qu'on devait laisser à chacun ce qui lui appartenait. On aurait pu concilier les deux avis, en ordonnant au premier de donner au nain, après l'échange, une certaine somme d'argent.

« Tout le monde, ajoute Képler, voit clairement par cet exemple qu'une proportion géométrique peut être aussi harmonique : telle est 1, 2, 4, ou encore l'heureux arrangement qui donne au plus grand la robe la plus longue. Une proportion arithmétique peut aussi être harmonique : telle est 2, 3, 4, ou encore l'utile échange qui permet au nain, possesseur d'une longue robe, de ne pas perdre son bien, mais de le changer en argent qu'il pourra appliquer à un meilleur usage. »

Ce passage, que je traduis de mon mieux, et je n'ai pas besoin de le dire, sans en bien pénétrer le sens, suffit, je crois, pour donner une idée du chapitre sur la politique.

Le dernier chapitre enfin précise la nature des accords planétaires : Saturne et Jupiter font la basse, Mars le ténor, Vénus le contralto, et Mercure le fausset.

Ces idées obscures et chimériques, dans lesquelles l'esprit de Képler se fatigue et s'égare, semblent l'inutile et vain amusement d'une imagination affranchie du joug de la raison ; on s'avance avec tristesse, sans oser sonder la mystérieuse profondeur de cette grande intelligence conduite, par une inspiration sans lumière, dans le pur domaine de la fantaisie.

Mais, aux dernières pages du livre, le génie du rêveur inspiré se réveille tout à coup pour lui dicter de fiers et magnifiques accents, devenus non moins immortels que la découverte qu'ils annoncent :

« Depuis huit mois, dit-il, j'ai vu le premier rayon de lumière ; depuis trois mois, j'ai vu le jour ; enfin, depuis peu de jours, j'ai vu le soleil de la plus admirable contemplation. Je me livre à mon enthousiasme, je veux braver les mortels par l'aveu ingénu que j'ai dérobé les

vases d'or des Egyptiens, pour en former à mon Dieu un tabernacle loin des confins de l'Egypte. Si vous me pardonnez, je m'en réjouirai ; si vous m'en faites un reproche, je le supporterai ; le sort en est jeté. J'écris mon livre ; il sera lu par l'âge présent ou par la postérité, peu importe ; il pourra attendre son lecteur : Dieu n'a-t-il pas attendu six mille ans un contemplateur de ses œuvres ? »

Puis, revenant au langage précis de la science, il révèle la célèbre loi qui, reliant tous les éléments de notre système, rattache les grands axes des orbites planétaires à la durée des révolutions : rien de plus inattendu que cette vive lumière qui semble s'élancer du chaos. Le lecteur étonné se demande comment ces règles précises et ces proportions mathématiques apparaissent tout à coup dans un monde où Képler semblait entrer en rêvant : comment tant de clarté subite après des obscurités si profondes ? comment cette pure mélodie après les harmonies douteuses qui précèdent ? Nul aujourd'hui ne saurait le dire. Képler annonce sa loi, la vérifie sans songer à faire connaître comme d'habitude l'histoire de ses idées ; puis, charmé par la pleine et entière possession de l'un des secrets les plus longtemps et les plus ardemment désirés, la joie le pénètre avec trop d'abondance pour qu'il se contente des expressions humaines ; toutes les puissances de son âme éclatent en actions de grâces, et le pieux Képler, empruntant les paroles majestueuses de l'Ecriture, s'écrie avec le Psalmiste : « La sagesse du Seigneur est infinie, ainsi que sa gloire et sa puissance. Cieux, chantez ses louanges ! Soleil, lune et planètes, glorifiez-le dans votre ineffable langage ! Harmonies célestes, et vous tous qui savez les comprendre, louez-le ! Et toi, mon âme loue ton Créateur ! c'est par lui et en lui que tout existe. Ce que nous ignorons est renfermé en lui, aussi bien que notre vaine science. A lui, louange, honneur et gloire dans l'éternité ! »

Et dans une note non moins émue, et plus touchante peut-être que le texte, il ajoute « Gloire aussi à mon vieux maître Mœstlin ! »

NOTE IV

DÉVELOPPEMENT DES PRINCIPES DE LA DYNAMIQUE
TRAVAUX DE GALILÉE ET HUYGHENS

Les travaux de Galilée et Huyghens ont une telle importance, que nous croyons devoir ajouter une note étendue à l'exposition de M. Rouse Ball. — Elle est extraite textuellement de l'ouvrage de Mach, dont la traduction a été une véritable révélation pour le public français.

1. — Nous en arrivons maintenant à la discussion des principes de la dynamique. La dynamique est une science toute moderne. Toutes les spéculations mécaniques des anciens, et des Grecs en particulier, se rapportent à la statique. Le fondateur de la dynamique est Galilée. On peut s'en convaincre par la simple considération de quelques propositions des Aristotéliciens, qui étaient courantes à son époque. Pour expliquer la descente des corps lourds et l'ascension des corps légers (dans les liquides ou dans l'air par exemple) on disait que chaque corps cherche son lieu, et que les plus pesants ont leur lieu en bas, les plus légers, en haut. On distinguait les mouvements en mouvements naturels, tels que celui de chute des graves, et en mouvements violents, tels que celui des projectiles. On tirait d'un très petit nombre d'observations et d'expériences superficielles la conclusion que les corps lourds tombent plus vite et les corps légers plus lentement, ou plus exactement, que les corps de plus grand poids tombent plus vite et ceux de moindre poids, moins vite. Ces quelques extraits montrent suffisamment combien les connaissances dynamiques des anciens et en particulier des Grecs, étaient insignifiantes ; les temps modernes eurent donc tout d'abord à poser les bases de la science du mouvement.

On a fait ressortir maintes fois et de divers côtés que les idées de Galilée n'étaient pas sans relations avec celles de prédécesseurs illustres Il serait puéril de se le dissimuler, mais encore faut-il dire que Galilée les dépasse tous de loin. Le plus grand des devanciers de Galilée est

Léonard de Vinci (1452-1519) dont nous avons déjà parlé dans le chapitre précédent. Mais ses travaux n'eurent aucune influence sur la marche de la science, car ils ne furent publiés pour la première fois qu'en 1797 par Venturi, et seulement en partie. Léonard de Vinci connaissait le rapport des durées des chutes suivant la hauteur et suivant la longueur du plan incliné. Peut-être connaissait-il aussi le principe de l'inertie.

Il est incontestable que tous les hommes ont une certaine connaissance instinctive d'une résistance à toute mise en mouvement, mais Léonard de Vinci paraît être allé un peu plus loin. Etant donné une colonne de dés, il sait que l'on peut en projeter *un* sans mettre les autres en mouvement ; il sait aussi qu'un corps mis en mouvement se meut plus longtemps si la résistance est moindre, mais il suppose que le corps cherche à parfaire une *longueur de parcours* mesurée par l'impulsion : il ne parle jamais en termes exprès de la résistance au mouvement lorsque les empêchements sont complètement écartés (Cf. Wohlwill ; *Bibliotheca mathematica* ; Stockholm, 1888, p. 19). Benedetti (1530-1590) connaît l'accélération dans la chute des corps ; il l'attribue à l'addition des impulsions successives de la pesanteur (*Divers. speculat. math. et phys. liber*, Taurini, 1585). Il attribue la continuation du mouvement d'un corps lancé, non point, comme les péripatéticiens, à l'influence du milieu, mais à une certaine *virtus impressa*. sans cependant parvenir à résoudre complètement le problème. Les travaux de jeunesse de Galilée se rapprochent de ceux de Benedetti, qu'il semble avoir utilisés. Galilée accepte aussi une *virtus impressa*, mais il la considère comme allant en décroissant, et ce n'est qu'après 1604 (selon Wohlwill) qu'il paraît être en possession complète des lois de la chute des corps. G. Vailati a fait une étude spéciale des travaux de Benedetti (*Atti della R. Acad di Torino* ; vol XXXIII, 1898). Il considère que Benedetti a rendu un service capital en examinant les conceptions aristotéliciennes à un point de vue critique et mathématique, en les corrigeant et en cherchant à découvrir les contradictions qu'elles renferment : il préparait ainsi le progrès ultérieur. Les aristotéliciens supposaient communément la vitesse de la chute en raison inverse de la densité du milieu ambiant. Benedetti montra que cette hypothèse est inadmissible, ou du moins qu'elle ne peut tenir que dans des cas particuliers. Il admit que la vitesse est proportionnelle à la différence $p - q$ entre le poids p du corps et la poussée q qu'il subit de la part du milieu. Dès lors, si dans un milieu de densité double, le corps tombe avec une vitesse égale à la moitié de la vitesse précédente, on aura : $p - q = 2(p - 2q)$, condition qui n'est vérifiée que lorsque $p = 3q$. Pour Benedetti un corps *léger* en soi n'existe pas ; il attribue

à l'air un poids et une poussée ; il considère plusieurs corps *identiques* tombant ensemble les uns à côté des autres, une première fois libres, et une seconde fois liés entre eux ; et, comme cette liaison ne peut altérer en rien le phénomène de la chute, il en déduit que des corps inégaux de même substance tombent également vite. Il se rapproche donc ici de la manière de penser de Galilée, quoique ce dernier pénètre plus profondément le problème. Les travaux de Benedetti contiennent toutefois encore beaucoup d'erreurs ; il croit, par exemple, que les vitesses de deux corps de même volume et de même configuration, sont entre elles comme leurs poids ou comme leurs densités. Il faut encore signaler ses recherches interressantes sur la fronde et son étude de l'oscillation d'un corps de part et d'autre du centre de la terre dans un canal diamétral traversant le globe terrestre, à laquelle il y a peu à retrancher. Les corps lancés horizontalement lui paraissent se rapprocher plus lentement du sol et c'est pour cette raison qu'il croit à la diminution du poids d'une toupie tournant autour d'un axe vertical. Benedetti ne résout donc pas complètement les problèmes qu'il aborde, mais il prépare leur solution.

2. — Dans les « *Discorsi e Dimostrazioni matematiche* » parus en 1638, Galilée exposa ses premières recherches sur les lois de la chute des corps. Galilée possède l'esprit moderne : il ne se demande pas *pourquoi* les corps tombent, mais bien *comment* ils tombent, d'après quelle loi se meut un corps tombant librement ? Pour déterminer ces lois, il fait certaines hypothèses ; mais, au contraire d'Aristote, il ne se borne pas à les poser, il cherche à en prouver l'exactitude par l'expérience.

Comme la vitesse d'un corps qui tombe va manifestement en croissant sans cesse, il lui parut, en premier lieu, raisonnable d'admettre que cette vitesse est double après le parcours d'un chemin double, triple au bout d'un chemin triple, en résumé, que les vitesses acquises par la chute croissent proportionnellement aux espaces parcourus. Avant de vérifier cette hypothèse par l'expérience, il examina si les conséquences que l'on peut logiquement en déduire ne l'infirment pas. Son raisonnement est le suivant : lorsqu'un corps acquiert une certaine vitesse après être tombé d'une certaine hauteur, une vitesse double après une hauteur de chute double, etc., comme sa vitesse dans la seconde chute est double de sa vitesse dans la première, il en résulte que le second chemin, qui est double, est parcouru dans un même temps que le premier, qui est simple. Or, dans le cas d'un chemin double à parcourir, comme la première moitié doit en être parcourue tout d'abord, on voit qu'il ne resterait aucun temps pour le parcours

de la seconde moitié. La chute des corps serait donc un transport instantané, ce qui est contradictoire non seulement avec l'hypothèse, mais encore avec l'expérience visuelle. Nous reviendrons d'ailleurs plus tard sur ce raisonnement erroné.

3. — Galilée, croyant avoir prouvé que sa première hypothèse était inadmissible, supposa ensuite que la vitesse acquise est proportionnelle à la durée de la chute. D'après cela, si un corps tombe deux fois de suite, de telle façon que la seconde chute dure deux fois plus longtemps que la première, la vitesse acquise dans la seconde chute sera double de la vitesse acquise dans la première. N'ayant découvert aucune contradiction dans cette hypothèse, Galilée se préoccupa de vérifier par l'expérience si elle était conforme aux faits. Il était fort difficile de prouver directement que les vitesses croissent proportionnellement au temps mais il lui sembla par contre plus aisé de déterminer la loi suivant laquelle l'espace parcouru croît avec la durée de chute. Il déduisit donc de son hypothèse la relation entre l'espace parcouru et le temps employé à le parcourir et c'est cette relation qu'il soumit à l'expérience. Sa déduction est simple, claire et parfaitement correcte. Il représenta les temps écoulés par des longueurs prises sur une ligne droite, et éleva à leurs extrémités des perpendiculaires (ordonnées) représentatives des vitesses acquises. Un segment quelconque OG de la droite OA représente ainsi une durée de chute et la perpendiculaire correspondante GH la vitesse acquise.

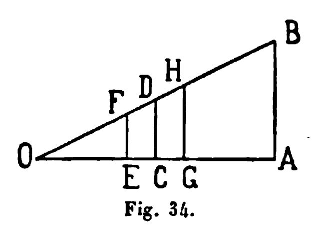


Fig. 34.

En considérant le mode d'accroissement de la vitesse, Galilée remarqua qu'à l'instant *c*, où la moitié de la durée OA de la chute est écoulée, la vitesse acquise CD est la moitié de la vitesse finale AB, et que pour deux instants E et G également distants de l'instant C, l'un avant, l'autre après, les vitesses (EF et GH) sont également différentes de la vitesse *moyenne* CD, l'une en moins, l'autre en plus. Or, à chaque instant qui précède C correspond un instant également éloigné qui le suit. Si donc nous comparons le mouvement réel avec un mouvement *uniforme*, dont la vitesse serait la demi-vitesse finale, nous voyons que ce qui est perdu par le mouvement réel sur le mouvement uniforme dans la première moitié est regagné dans la seconde. Nous pouvons donc regarder l'espace parcouru dans la chute comme ayant été parcouru d'un mouvement uniforme de vitesse égale à la moitié de la vitesse finale. En appelant v la vitesse acquise pendant le temps t on a, puisqu'elle est proportionnelle à t, $v = gt$, formule

dans laquelle g est la vitesse acquise dans l'unité de temps (que l'on appelle accélération). L'espace parcouru s est alors donné par $s = \frac{gt}{2}.t = \frac{1}{2} gt^2$. On a appelé *mouvement uniformément accéléré* ce mouvement dans lequel, d'après l'hypothèse, la vitesse s'accroit de quantités égales dans des temps égaux.

Le tableau suivant donne les durées de chutes, les vitesses acquises et les espaces parcourus correspondants :

t	v	s
1	$1g$	$1.1.\frac{g}{2}$
2	$2g$	$2.2.\frac{g}{2}$
3	$3g$	$3.3.\frac{g}{2}$
4	$4g$	$4.4.\frac{g}{2}$
. . . .	. . . .	. . . .
t	tg	$t.t.\frac{g}{2}$

4. — La relation entre t et s peut être vérifiée expérimentalement et Galilée a procédé à cette vérification de la manière que nous allons décrire.

Remarquons tout d'abord qu'aucune des notions et des données qui nous sont maintenant si familières n'était connue à cette époque : c'était au contraire Galilée qui devait les découvrir pour nous. Il lui était donc impossible de procéder comme nous le ferions aujourd'hui. Dans le but de pouvoir observer avec plus de précision le mouvement de chute des corps, Galilée chercha d'abord à le ralentir. Il observa des sphères roulant dans des rainures sur un plan incliné, et admit que ce procédé ralentissait seulement la vitesse du mouvement sans altérer la forme de la loi de chute. L'hypothèse qu'il s'agit de vérifier exige que des rainures de longueur 1. 4. 9. 16...,. correspondent à des durées de chutes respectives 1. 2. 3. 4..... L'expérience confirme le résultat théorique. Galilée mesura le temps d'une façon très habile. Nos chronomètres actuels n'existaient pas alors ; leur construction ne devint possible qu'après l'acquisition des connaissances dynamiques dont Galilée posa les bases. On se servait à cette époque d'horloges mécaniques, très peu précises, qui ne pouvaient servir qu'à la mesure approximative de grands espaces de temps ; les plus couramment employées

étaient les horloges à eau et à sable, déjà en usage dans l'antiquité. Galilée construisit une horloge à eau fort simple, qui, chose peu ordinaire pour l'époque, fut spécialement adaptée à la mesure des durées très petites ; elle consistait en un vase de très grande section, rempli d'eau, dont le fond était percé d'un petit orifice que l'on pouvait boucher avec le doigt. Dès que la sphère commençait son mouvement sur le plan incliné, Galilée écartant le doigt ouvrait l'orifice ; l'eau s'écoulait et était recueillie dans un récipient, placé sur une balance, et au moment où la sphère arrivait au bout du parcours déterminé, il refermait l'orifice. A cause de la grande section du vase, la pression ne variait pas sensiblement, le poids de l'eau écoulée était donc proportionnel au temps. Il constata que les temps croissaient comme la suite des nombres entiers pendant que les espaces parcourus croissaient comme la suite des carrés. L'expérience vérifiait donc les conséquences de l'hypothèse et par suite l'hypothèse elle-même.

Pour comprendre parfaitement la marche de la pensée chez Galilée, il faut se rappeler qu'avant d'aborder l'expérimentation il se trouve déjà en possession d'expériences instinctives. Les yeux suivent le corps qui tombent d'autant plus difficilement qu'il tombe depuis plus longtemps ou qu'il a parcouru plus de chemin dans sa chute ; le choc qu'il donne à la main qui le reçoit devient en même temps de plus en plus sensible, et le bruit qu'il fait en heurtant les objets, de plus en plus fort. La vitesse croît par conséquent avec la durée de la chute et la longueur du parcours. Mais, pour l'usage scientifique, la représentation mentale des expériences sensibles doit encore être figurée *abstraitement*. Ce n'est qu'ainsi qu'on peut les utiliser pour trouver une propriété *dépendante* d'un fait, ou pour compléter une propriété partiellement établie, par une *construction de calculs* abstraite basée sur une *appréciation abstraite* de la propriété caractérisée. Cette figuration se fait par la mise en évidence des points que l'on tient pour importants, en négligeant ce qui est accessoire, par *abstraction, idéalisation*. L'expérience décide si elle est ou non suffisante. Sans conception préexistante quelconque, toute expérience est en général impossible, car cette dernière reçoit précisément sa forme de la conception préalable que l'on possède. Quels seraient en effet le moyen et le but de la recherche si l'on n'avait pas déjà une certaine tendance ? La voie dans laquelle l'expérience doit être engagée pour *se compléter* dépend des données acquises auparavant. L'expérience étaie, modifie ou ruine la conception qui en a donné l'idée. Dans un cas semblable, le chercheur moderne se poserait la question : De quoi v est-il fonction ? v étant fonction de t, quelle est la forme de cette fonction ? Galilée, à la manière naïve des temps primitifs, se demande : v est-il proportionnel à s ou est-il proportionnel

à t? Il procède synthétiquement et à tâtons, et arrive pareillement au but. Les méthodes classiques, qui sont en quelque sorte des patrons ou des modèles, sont un des résultats de la recherche, et ne peuvent être parfaitement développées dès les premiers pas que fait le génie (Cf. *Ueber Gedankenexperimente*, Zeitschr. f. d. phys. u. chem. Unterricht ; 1887, I).

5. — Dans le but de se représenter la relation entre le mouvement sur le plan incliné et le mouvement de chute libre, Galilée supposa qu'un corps acquiert la même vitesse en tombant suivant la hauteur ou suivant la longueur du plan. Cette hypothèse paraît un peu hasardée, mais il y parvint d'une façon qui la rend très naturelle et que nous allons exposer en quelques mots. Lorsqu'un corps tombe librement, il acquiert une vitesse proportionnelle à la durée de la chute ; Galilée imagina qu'au moment où le corps arrive à l'extrémité de sa chute sa vitesse soit brusquement renversée et dirigée vers le haut. Le corps se met à monter et l'on peut accepter que son mouvement actuel est pour ainsi dire une image réfléchie du précédent. La vitesse, qui tantôt croissait proportionnellement au temps, diminue dans le même rapport et ne devient nulle qu'au moment où le corps est monté pendant aussi longtemps qu'il était descendu et se retrouve à son niveau primitif. Donc la vitesse qu'un corps acquiert en tombant lui permet de monter à une hauteur *égale* à la hauteur de sa chute. Or, si en tombant le long d'un plan incliné, un corps acquérait une vitesse qui lui permît de remonter, sur un autre plan incliné, plus haut que son niveau initial, il s'ensuivrait que le poids même des corps pourrait produire leur ascension. L'hypothèse que les vitesses acquises ne dépendent que de la hauteur *verticalement* parcourue, et non pas de l'inclinaison des plans, ne contient donc que l'affirmation et la notion logique du *fait* que les corps pesants tendent non à monter, mais à *descendre*. Si, en effet, dans la chute inclinée, le corps prenait une vitesse un tant soit peu plus grande qu'en tombant verticalement suivant la hauteur, il suffirait de le faire passer, avec sa vitesse acquise, sur un plan vertical ou sur un plan autrement incliné pour l'amener plus haut que son point de départ. Si la vitesse acquise obliquement était au contraire moindre, on arriverait au même résultat en renversant l'expérience. Dans les deux cas on pourrait, par une succession de plans inclinés convenablement disposés, forcer un corps pesant à monter indéfiniment par son propre poids, — ce qui est en contradiction absolue avec notre connaissance instinctive de la nature des corps graves.

6. — Ici encore Galilée ne se contenta pas de l'examen logique et philosophique de son hypothèse ; il voulut la soumettre à l'expérience.

Il prit dans ce but un pendule simple formé d'une sphère lourde attachée à un fil mince. Ecartant le pendule de sa position d'équilibre, il souleva la sphère jusqu'à une hauteur quelconque et vérifia, en l'abandonnant à elle-même, qu'elle remontait jusqu'au même niveau. Il reconnut que, lorsqu'il n'en est pas *exactement* ainsi, la résistance de l'air est la cause de l'écart, puisque celui-ci est plus grand pour une balle de liège, moindre pour une sphère plus lourde. Abstraction faite de cette résistance, le corps remonte à la même hauteur. Or, le mouvement de la sphère du pendule sur son arc de cercle peut être considéré comme une chute sur une succession de plans inégalement inclinés. Galilée fit ensuite remonter le corps sur un autre arc de

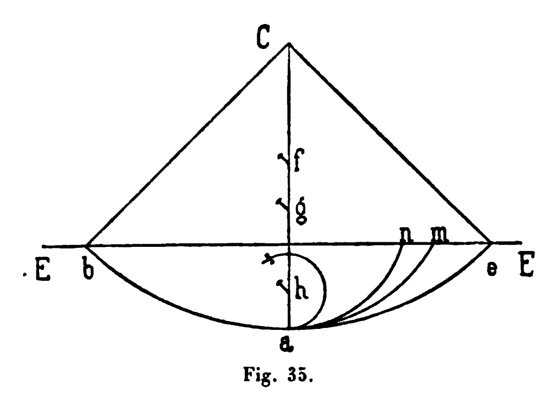


Fig. 35.

cercle, c'est-à-dire sur une autre série de plans inclinés, en se servant pour cela d'un arrêt qu'il fixait en un point quelconque *f*, *g* (fig. 35), d'un côté de la position d'équilibre du fil, afin d'empêcher tel segment de fil qu'il voulait d'accomplir la seconde moitié du mouvement. Dès que le fil, dans son mouvement, atteint la position d'équilibre, il rencontre l'arrêt, et la sphère qui est descendue le long de l'arc *ba*, remonte le long d'une autre série de plans inclinés, donnée par l'arc *am* ou l'arc *an*. On constate qu'elle revient à son niveau horizontal initial EE, ce qui n'arriverait pas si l'inclinaison du plan avait une influence sur la vitesse acquise dans la chute. En fixant l'arrêt suffisamment bas (en *h*) on peut raccourcir à volonté la longueur du pendule dans la deuxième demi-oscillation sans changer l'allure du phénomène ; et, s'il est fixé assez bas pour que le fil ne puisse plus remonter jusqu'au plan EE, la sphère passera rapidement par dessus l'arrêt

sur lequel elle enroulera le fil, car elle possède encore un reste de vitesse lorsqu'elle arrive à la plus grande hauteur qu'il lui est possible d'atteindre. On sait d'ailleurs que, dans ce cas, le point h doit être assez rapproché de a pour que le fil ne puisse se détendre.

7. — On voit que la vitesse qu'un corps acquiert en tombant sur le plan incliné lui permet de remonter exactement au niveau d'où il est descendu. L'hypothèse de l'égalité des vitesses acquises dans la chute inclinée et dans la chute verticale de même hauteur ne contient rien d'autre que l'expression de ce fait. Galilée en déduisit aisément que les durées des chutes suivant la longueur et la hauteur sont dans le rapport de ces deux chemins, et que les accélérations sont dans le rapport inverse, puisqu'elles sont inversement proportionnelles aux durées des chutes.

Considérons en effet un plan incliné ; sa hauteur AB et sa longueur AC sont toutes deux parcourues d'un mouvement uniformément accéléré dans des temps t et t'. Soit v la vitesse finale commune ; on sait que :

$$AB = \frac{v}{2}\,t, \quad AC = \frac{v}{2}\,t',$$
$$\frac{AB}{AC} = \frac{t}{t'}.$$

En appelant g et g' les accélérations respectives, on aura :

$$v = gt, \quad v = g't',$$
$$\frac{g'}{g} = \frac{t}{t'} = \frac{AB}{AC} = \sin\alpha.$$

On peut donc calculer, par cette méthode, l'accélération d'un corps

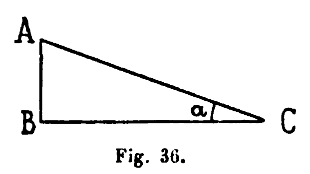


Fig. 36.

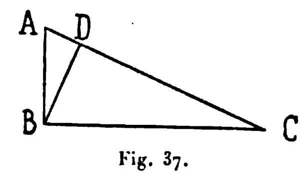


Fig. 37.

tombant librement, étant donnée celle qu'il possède sur le plan incliné.

Galilée déduisit de cette théorie quelques corollaires dont plusieurs sont passés dans nos traités élémentaires. Considérons, par exemple, deux corps tombant, l'un verticalement, l'autre obliquement. Leurs accélérations sont entre elles dans le rapport inverse de la hauteur à la

longueur : pour avoir les chemins qu'ils parcourent en des temps *égaux*, il suffira donc d'abaisser la perpendiculaire BD du pied de la hauteur sur le plan incliné : Les deux chemins AB et AD sont donc parcourus dans des temps égaux par deux corps, l'un tombant librement du point A, l'autre glissant sur le plan incliné. Il s'ensuit que si plusieurs plans inclinés AC, AE, AF aboutissent en A, les cordes d'intersections AD, AG, AH de leurs lignes de plus grande pente avec la circonférence décrite sur AB comme diamètre sont parcourues dans des temps égaux. Comme cette propriété ne dépend que des longueurs des cordes et des inclinaisons, et non point de la situation des plans inclinés dans l'espace, elle reste valable pour les cordes BD, BG, BH aboutissant à l'extrémité inférieure. On peut donc dire en général qu'un corps soumis à la seule action de son poids met le même temps pour décrire le diamètre vertical d'un cercle ou l'une quelconque des cordes qui aboutissent à l'une de ses extrémités (fig. 38).

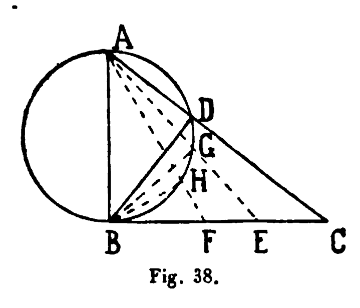


Fig. 38.

Galilée ajoutait encore à ceci quelques considérations fort élégantes que les manuels ne contiennent d'habitude pas : ainsi il considérait des obliques diversement inclinées, partant d'un même point A, et situées dans un même plan vertical. Si l'on abandonne au même instant au point A un corps pesant sur chacune de ces droites, ces corps, commençant ensemble leurs mouvements de descente, se trouveront à chaque instant en des points d'une même cicconférence dont le diamètre est donné par l'espace verticalement parcouru et croît par suite proportionnellement au carré du temps. En faisant tourner la figure autour de la verticale AV, on voit sans peine que ces circonférences sont remplacées par des sphères lorsque les obliques sont distribuées d'une façon quelconque dans l'espace autour du point A.

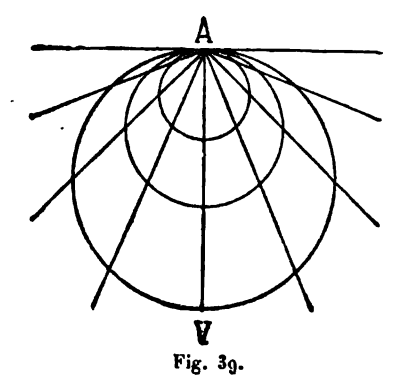


Fig. 39.

8. — Galilée ne cherche donc pas à faire une *théorie* de la chute des corps. Tout au contraire, il observe le *phénomène* de la chute et l'étudie

sans idées préconçues. Dans cette recherche, *adaptant* graduellement sa pensée aux phénomènes et la *poursuivant* dans toutes ses conséquences logiques, il est arrivé à une conception qui, probablement pour lui-même beaucoup moins que pour ses successeurs, a eu le caractère d'une loi particulière nouvelle. Galilée suit dans toutes ses déductions un principe d'une grande fécondité scientifique, que l'on peut justement appeler *principe de continuité* et qui consiste à modifier, graduellement et autant qu'il est possible, les circonstances d'un cas particulier quelconque dont on s'est fait une idée claire, en se tenant toujours aussi près que possible de cette idée antérieurement acquise. Aucune autre méthode ne permettra la compréhension des phénomènes naturels avec plus de certitude et de *simplicité*, avec moins de fatigue ou un moindre effort intellectuel.

Un exemple particulier fera mieux saisir notre pensée que ces considérations générales. Galilée considère un corps qui tombe sur le plan incliné AB et que l'on place avec sa vitesse acquise sur un autre plan incliné BC, le long duquel il remonte. Sur tous les plans inclinés BC, BD, etc., ce corps monte et s'élève jusqu'au plan horizontal passant par A. Mais de même que ce corps tombe le long de BD avec une

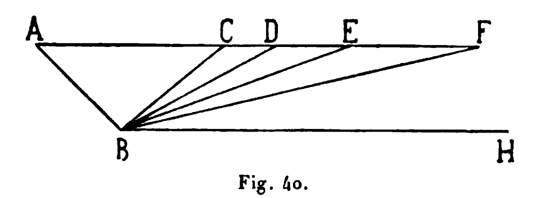


Fig. 40.

accélération moindre que le long de BC, de même il monte le long de BD avec un *ralentissement* moindre que le long de BC. A mesure que les plans BC, BD, BE, BF se rapprochent du plan horizontal, le ralentissement du corps devient de plus en plus petit ; le chemin parcouru et la durée du mouvement deviennent par conséquent de plus en plus grands. Sur le plan horizontal BH, le ralentissement disparait *tout à fait*, — abstraction faite, évidemment, du frottement et de la résistance de l'air — le corps se meut indéfiniment loin et indéfiniment longtemps avec une vitesse *constante*. En atteignant ainsi le cas limite du problème, Galilée découvre la loi connue sous le nom de *loi d'inertie*, d'après laquelle un corps sur lequel n'agit aucune circonstance modificatrice de mouvement (force) conserve indéfiniment sa vitesse (et sa direction). Nous reviendrons plus loin sur ce sujet.

Dans une remarquable étude publiée en 1884 dans le *Zeitschrift für Völkerpsychologie* sous le titre *Die Entdeckung des Beharrungs gesetzes*

(vol. XIV, pp. 365-410 et vol. XV, pp. 70-135. 337-387), E. Wohlwill a montré que les prédécesseurs et les contemporains de Galilée, et Galilée lui-même, n'abandonnèrent que *très lentement et par degrés* les idées aristotéliciennes pour en arriver à la loi de l'inertie. Même chez Galilée le *mouvement circulaire uniforme* et le *mouvement horizontal* uniforme prennent une signification singulière. L'étude très intéressante de Wohlwill montre que Galilée lui-même n'arrive pas à une conception parfaitement claire des principes fondamentaux qu'il a posés et qui ont permis le développement de la science et qu'il est sujet à de fréquents retours aux idées anciennes, ce qui n'est d'ailleurs que très naturel.

Le lecteur peut du reste voir à l'exposé que j'en ai fait que la loi d'inertie ne possédait point, dans l'esprit de Galilée, la clarté et la généralité qu'elle acquit plus tard (Cf. *Erhaltung der Arbeit*, p. 47.) Contrairement à l'opinion de Wohlwill et de Poske, je crois toujours avoir, dans mon exposition, indiqué le point qui devait *faire sentir* le plus clairement possible, à Galilée et à ses successeurs, le *passage* de la conception ancienne à la nouvelle. Galilée fut bien près de la conception complète de la loi d'inertie, et je n'en veux comme preuve que le fait signalé (par Wohlwill lui-même, *l. c.* p. 112) que Baliani déduisit de l'exposé de Galilée l'indestructibilité d'une vitesse une fois acquise. Il n'est pas même surprenant que, là où il s'agit uniquement de mouvements de corps *pesants,* Galilée emploie la loi d'inertie surtout pour les mouvements horizontaux. Il sait cependant qu'une balle *sans poids* continuera à se mouvoir en ligne droite dans la direction du jet (*Dialogue sur les deux systèmes du monde*; Leipzig; 1891, p. 184), mais il n'est pas extraordinaire qu'il hésite devant l'énoncé général d'une proposition à première vue si étrange.

9. — La chute des corps est donc un mouvement dans lequel la vitesse croit proportionnellement au temps, c'est-à-dire un mouvement uniformément accéléré.

Parfois l'accélération uniforme du mouvement de la chute des graves est présentée comme une conséquence de l'action constante de la pesanteur. Ce procédé d'exposition est un anachronisme et un non-sens historique. « La gravité, dit-on, est une force constante; *par conséquent* elle engendre, dans des éléments égaux de temps, des éléments égaux de vitesse et le mouvement qu'elle produit est ainsi uniformément accéléré. » Cette exposition est antihistorique, ainsi que toutes celles du même genre. Elle présente sous un jour entièrement faux le fait capital de la découverte de ces lois. La notion de force, telle que nous la possédons aujourd'hui, fut en effet créée par Galilée. Auparavant l'on ne

connaissait la *force* qu'en tant que *pression*. Ce n'est que l'expérience qui peut apprendre qu'en général la pression provoque un mouvement. A plus forte raison encore ne peut-on savoir, autrement que par l'expérience, *comment* la pression se transforme en mouvement, et reconnaître qu'elle ne détermine ni une position, ni une vitesse, mais bien une accélération. La simple logique ne pourrait nous donner sur ce point que des hypothèses ; l'expérience seule peut nous éclairer avec autorité.

10. — Des analogies tirées d'autres parties de la physique font immédiatement saisir qu'il n'est nullement évident *a priori* que les circonstances déterminantes de mouvement (forces) produisent des *accélérations*. Ainsi, les différences de température provoquent aussi des changements des corps, mais elles déterminent des *vitesses* compensatrices et non pas des *accélérations*.

Galilée *discerne* dans les phénomènes naturels le fait que les circonstances déterminantes de mouvement produisent des accélérations. Mais auparavant on y avait déjà discerné un grand nombre d'autres points. Par exemple, lorsque l'on dit que toute chose cherche son lieu, cette observation est parfois fort juste, mais elle n'est pas valable dans tous les cas et n'épuise point complètement le sujet. Ainsi jetons une pierre en l'air ; cette pierre ne cherche plus son lieu, puisqu'elle monte et que son lieu est en bas ; mais l'accélération vers la terre ou le ralentissement du mouvement d'ascension est toujours présent. Galilée est le premier qui ait aperçu ce fait : son observation est juste dans tous les cas, elle est valable en général, *elle embrasse d'un seul coup d'œil un domaine bien plus grand.*

11. — Ainsi que nous l'avons déjà remarqué, c'est tout à fait *incidemment* que Galilée trouva la loi d'inertie. On énonce d'habitude cette loi en disant qu'un corps, sur lequel n'agit aucune force, conserve une vitesse et une direction invariables. Cette loi d'inertie a eu une fortune étrange. Il ne paraît pas qu'elle ait jamais joué un bien grand rôle dans la pensée de Galilée. Mais ses successeurs, et notamment Huyghens et Newton, en ont fait une loi spéciale. Bien plus, certains ont considéré l'inertie comme une propriété générale de la matière. Il est cependant facile de reconnaître qu'elle ne constitue en rien une loi particulière, mais qu'elle est au contraire déjà contenue dans cette idée (de Galilée) que les circonstances déterminantes de mouvement (c'est-à-dire les forces) produisent des *accélérations*. En effet, s'il est donné qu'une force ne détermine ni une position, ni une vitesse, mais bien une accélération c'est-à-dire une *variation* de vitesse, il va de soi que là où il n'y a

pas de force, il ne peut se produire de variation de vitesse. Il est inutile de donner de ce corollaire un énoncé spécial ; en le faisant, on présente un fait unique comme *deux faits distincts*, on formule *deux fois le même fait*. De grands génies ont commis cette erreur de méthode, et l'on ne peut se l'expliquer que par cette perplexité des débutants, qui peut s'emparer des plus grands chercheurs et les faire hésiter lorsqu'ils voient devant eux une énorme accumulation de matériaux nouveaux.

En tout état de choses, il est complètement erroné de se représenter l'inertie soit comme une propriété évidente par elle-même, soit comme une conséquence du principe général d'après lequel « l'effet d'une cause persiste ». L'origine de toutes ces erreurs est une recherche mal comprise de la rigueur. Les principes du genre de celui que nous venons de citer sont d'ailleurs des propositions scolastiques qui n'ont que faire dans la science. La proposition contraire : « cessante causa, cessat effectus », est tout aussi valable, car si l'on appelle « effet » la vitesse acquise, c'est la première proposition qui tient ; si l'on appelle « effet » l'accélération, c'est la seconde qui est correcte.

12. — Nous étudierons maintenant les travaux de Galilée en nous plaçant à un autre point de vue. Galilée commença ses recherches en se servant des notions qui étaient familières de son temps et qui s'étaient développées grâce surtout aux arts manuels. Parmi celles-ci se trouve la notion de vitesse que le mouvement uniforme fournit immédiatement. Si, en effet, un corps décrit dans chaque seconde le même chemin c, en t secondes il décrira le chemin $s = ct$. On appelle vitesse le chemin c décrit par seconde, que l'on peut d'ailleurs mesurer en observant un chemin quelconque et le temps correspondant ; la formule donne alors $c = \frac{s}{t}$. La vitesse s'obtient donc en divisant le nombre qui mesure l'espace parcouru par celui qui mesure le temps écoulé.

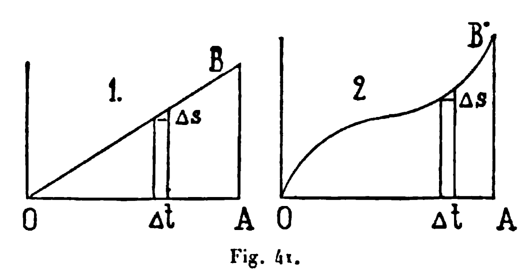


Fig. 41.

Or Galilée ne pouvait achever ses travaux sans modifier et étendre tacitement la notion traditionnelle de vitesse. Pour fixer les idées, re-

présentons par les diagrammes un mouvement uniforme et un mouvement variable (fig. 41, 1 et 2), les temps écoulés étant portés en abscisses sur l'axe OA et les espaces parcourus en ordonnées, dans la direction AB. Dans le premier cas, nous obtenons constamment la même valeur c pour la vitesse, quel que soit l'accroissement d'espace parcouru que nous divisions par le temps correspondant. Mais il n'en est pas ainsi dans le second : en procédant de même, nous obtenons pour la vitesse les valeurs les plus différentes. Il s'ensuit qu'alors la notion ordinaire de vitesse n'a plus de signification déterminée. Si toutefois l'on considère l'espace parcouru dans un élément de temps assez petit pour que l'élément de courbe de la figure 2 s'approche de la ligne droite, on pourra regarder cet accroissement comme uniforme et définir la vitesse de ce mouvement élémentaire comme étant le quotient $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ du chemin élémentaire par l'élément de temps correspondant. Cette définition sera plus précise encore si l'on définit la vitesse à un instant donné comme la limite vers laquelle tend le quotient $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ lorsque l'élément de temps devient infiniment petit, limite que l'on représente par $\frac{ds}{dt}$. Cette conception nouvelle contient la première comme cas particulier ; elle s'applique immédiatement au mouvement uniforme. Bien qu'elle n'ait été formellement exprimée que longtemps après lui, on voit cependant que, dans sa pensée, Galilée se servait de cette extension de la notion de vitesse.

13. — La notion d'*accélération* à laquelle Galilée fut conduit est entièrement nouvelle. Dans le mouvement uniformément accéléré, la vitesse varie avec le temps, de la même façon que l'espace parcouru dans le mouvement uniforme. En appelant v la vitesse acquise au bout du temps t on a :

$$v = gt,$$

formule dans laquelle g représente l'accroissement de vitesse dans l'unité de temps, c'est-à-dire l'accélération, qui est donc aussi donnée par l'équation :

$$g = \frac{v}{t}.$$

Dès que l'on considère des mouvements non uniformément accélérés, on doit étendre la notion d'accélération de la même façon que l'on a du étendre celle de vitesse. Reprenons les figures 1 et 2, dans lesquelles les abscisses représentent toujours les temps, mais où, maintenant, les ordonnées représentent les *vitesses*. En reprenant point par point le

raisonnement précédent, nous définirons l'accélération par la formule $\frac{dv}{dt}$, où dv représente l'accroissement infiniment petit de vitesse pendant le temps infiniment petit dt. En nous servant des notations du calcul différentiel, nous aurons, pour l'accélération φ dans un mouvement *rectiligne* :

$$\varphi = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}.$$

Les idées qui viennent d'être développées sont d'ailleurs susceptibles d'une représentation graphique. En portant les temps en abscisses et les chemins en ordonnées, on obtient une courbe des espaces dont la *pente* en chaque point représente la vitesse à l'instant correspondant. En portant de même les temps et les vitesses en abscisses et en ordonnées, on obtient une courbe des vitesses dont la pente représente l'accélération. Mais la courbure de la courbe des espaces permet déjà de reconnaître la variation de la pente des vitesses. Considérons, en effet, un mouvement uniforme représenté, comme d'habitude, par la ligne droite OCD et comparons-le avec un second mouvement OCE dont la vitesse est la plus grande, dans la seconde moitié du mouvement et pour lequel l'ordonnée BE, correspondant à l'abscisse OB = 2 OA, sera par conséquent plus grande, et, enfin, avec un mouvement OCF, dont la vitesse dans la seconde moitié est moindre que la vitesse du mouvement uniforme et pour lequel l'ordonnée finale BF sera moindre que BD. La simple superposition des diagrammes de ces trois mouvements montre qu'à un mouvement accéléré correspond une courbe des espaces convexe vers l'axe des abscisses et à un mouvement retardé, une courbe concave. Supposons qu'un mobile, animé d'un mouvement verticale quelconque, porte un crayon dont la pointe reste en contact avec une feuille de papier que l'on déplace d'un mouvement horizontal uniforme de droite à gauche. Le crayon dessine un diagramme (fig. 43) d'où l'on peut déduire les particularités du mouvement. En *a*, la vitesse du crayon est dirigée vers le haut ; en *b*, elle est plus grande ; en *c*, nulle ; en *d*, elle est dirigée vers le bas ; en *e*, de nouveau nulle. En *a*, *b*, *d*, *e*, l'accélération est dirigée vers le haut ; en *c*, elle est dirigée vers le bas ; en *c* et en *e*, elle est maximum.

14. — Un tableau de temps, des vitesses acquises et des chemins parcourus permet d'embrasser d'un coup d'œil le résumé des découvertes de Galilée. (Voir le tableau de la page 375).

Les nombres qui y sont contenus suivent une loi si simple et si immédiatement reconnaissable qu'il est tout aussi facile de remplacer tout

La relation qui existe entre la
imée par l'équation suivante,
méthode de construction du

$$s$$

$$1.\frac{g}{2}$$

$$4.\frac{g}{2}$$

$$9.\frac{g}{2}$$

. . . . .

$$t^2\frac{g}{2}$$

nombres de la première et de
deuxième et de la troisième,

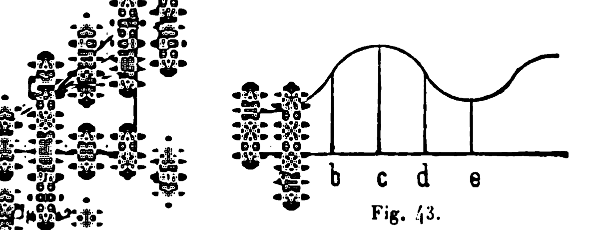
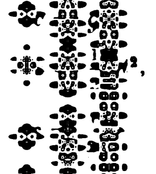


Fig. 43.

$= \frac{v^2}{2g}$. On trouve ainsi les trois



et (2) ; Huyghens, le premier,
ce qui fut pour la science un

tre faite à propos de ce tableau.
qu'il acquiert en tombant, un
st parti. Dans ce mouvement
port au temps et à l'espace)

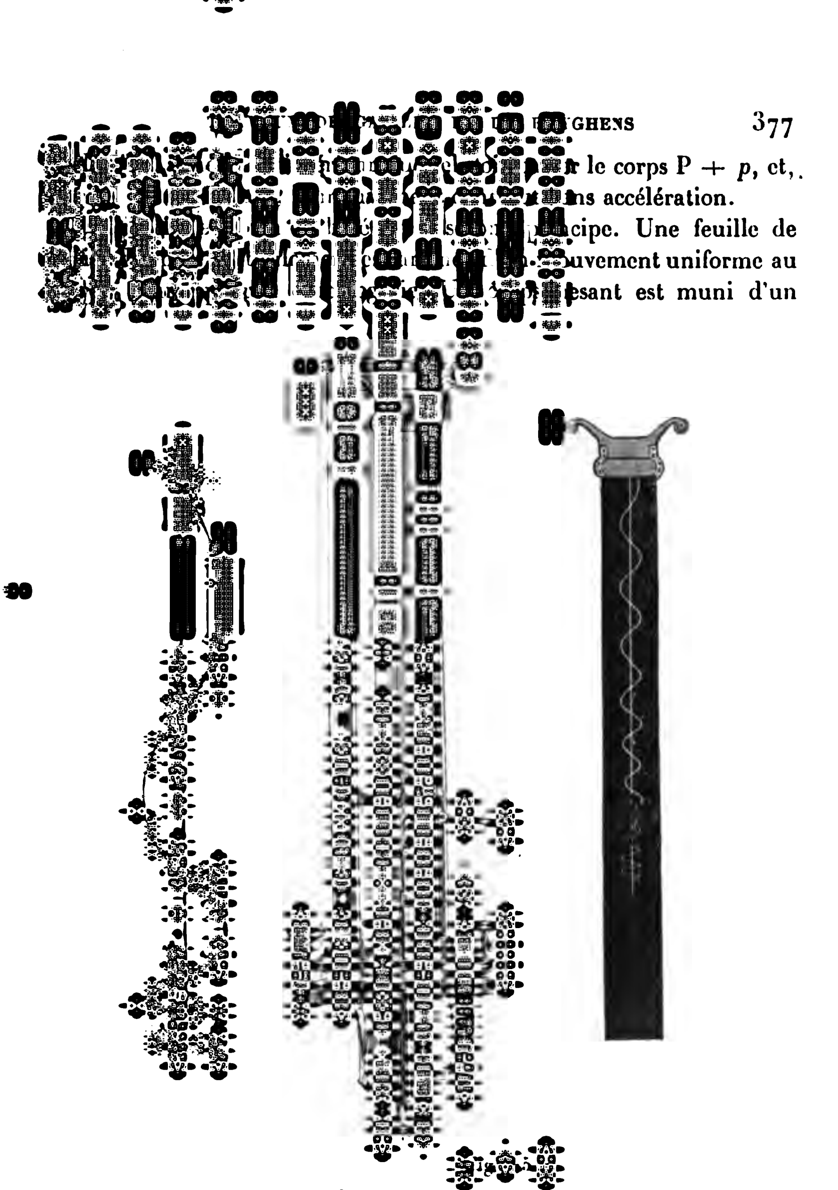
exactement de la même manière qu'elle avait augmenté pendant la chute. Or, un corps tombant librement acquiert une vitesse double dans une chute de durée double, mais la hauteur qu'il parcourt pendant ce temps double est quatre fois plus grande. Donc un corps lancé verticalement vers le haut avec une vitesse double montera pendant un temps *deux fois* plus grand et à une hauteur *quatre fois* plus grande qu'un corps lancé avec une vitesse simple.

Peu de temps après Galilée, ont reconnut que, dans la vitesse d'un corps, il se trouve quelque chose qui correspond à une force, par quoi une force peut être vaincue, une certaine « *capacité d'action* ». On ne discuta que le point de savoir si cette capacité d'action était proportionelle *à la vitesse*, ce qui était l'avis des cartésiens, ou bien au *carré de la vitesse*, ce que prétendait l'école de Leibnitz. Mais on sait aujourd'hui qu'il n'y a plus là matière à discussion. Le corps lancé vers le haut avec une vitesse double surmonte une force donnée pendant un temps *double* mais le long d'un chemin *quadruple*. Donc, par rapport au temps, la capacité d'action de la vitesse lui est proportionnelle, par rapport à l'espace, elle est proportionnelle à son carré. D'Alembert signale cette erreur, mais en termes peu clairs. Ajoutons encore que Huyghens déjà avait sur ce sujet des idées parfaitement précises.

16. — Les procédés expérimentaux par lesquels on vérifie aujourd'hui les lois de la chute des corps sont quelque peu différents de ceux de Galilée. On peut employer deux méthodes Ou bien, afin de pouvoir l'observer commodément, on ralentira le mouvement de chute qui, par sa rapidité, est difficile à observer directement, mais de telle façon qu'il ne s'ensuive aucune modification de sa loi ; ou bien on l'observera directement, sans y rien changer, par des procédés perfectionnés. Sur le premier de ces principes reposent le plan incliné de Galilée et la machine d'Atwood. Ce dernier appareil consiste en une poulie légère sur laquelle passe un fil tendu par deux poids égaux P suspendus à ses extrémités. Ajoutons à l'un des poids P un petit poids p. Ce petit excès de poids fait naître un mouvement uniformément accéléré d'accélération $\frac{p}{2P+p}g$, comme nous le verrons sans peine dès que nous aurons discuté le concept « masse ». Une échelle graduée verticale liée à la poulie permet alors de vérifier que les chemins, 1, 4, 9, 16... sont parcourus dans les temps 1, 2, 3, 4... Pour observer la vitesse finale acquise au bout d'une durée donnée de chute, on enlève le poids additionnel p, qui dépasse un peu P, à

P+p
P
Fig. 44.

... le corps P + *p*, et,
... ns accélération.
... cipe. Une feuille de
... uvement uniforme au
... esant est muni d'un



... ligne horizontale. Si
... rayon trace une droite
... nés, le crayon trace une
... tent les temps écoulés
... les espaces parcourus.
... données 1, 4, 9, 16...
... d'une feuille de papier
... rotation rapide autour

de son axe vertical ; le corps, guidé par un fil de fer, tombe le long d'une génératrice de ce cylindre.

Un appareil différent basé sur le même principe fut inventé à la fois par Laborde, Lippich et von Babo, indépendamment l'un de l'autre. Un long rectangle de verre noirci au noir de fumée tombe librement devant une tige élastique qui vibre horizontalement, en traçant une courbe sur le verre noirci. Le premier passage de la tige par sa position d'équilibre fait commencer le mouvement de chute. Les ondulations tracées sur le verre deviennent de plus en plus longues à cause de la constance de la durée d'oscillation et de l'accroissement de la vitesse verticale. On constate (fig. 45) que $bc = 3\,ab$, $cd = 5\,ab$, $de = 7\,ab$,... Les égalités :

$$ac = ab + bc = 4\,ab,$$
$$ad = ab + bc + cd = 9\,ab,$$
$$ae = ab + bc + cd + de = 16\,ab, \text{ etc.},$$

nous montrent immédiatement la loi des espaces. La loi des vitesses est vérifiée par l'inclinaison des tangentes aux points a, b, c, d, etc. Cette expérience permet de déterminer très exactement la valeur de g, si l'on connaît la durée de l'oscillation du barreau.

Wheatstone employa, pour la mesure des temps très petits, un chronoscope formé d'un mécanisme d'horlogerie à mouvement très rapide qui se mettait en marche au commencement du temps à mesurer et cessait de marcher à la fin. Hipp a modifié avantageusement ce procédé comme suit : Le mécanisme d'horlogerie à mouvement rapide est réglé par un diapason donnant une note élevée, au lieu de balancier. Un index très léger peut être engrené avec le mécanisme ou désengrené, par l'intermédiaire d'un courant électrique. Dès que le corps tombe, le courant s'ouvre et l'index est engrené ; dès que le corps arrive au but le courant se ferme, l'index est désengrené et le chemin qu'il a parcouru donne le temps écoulé.

17. — Parmi les travaux ultérieurs de Galilée nous devons encore citer ses réflexions sur le mouvement du pendule, et sa réfutation de l'opinion d'après laquelle les corps de poids plus grand tomberaient plus vite que ceux de poids moindre. Nous reviendrons plus tard sur ces deux points. On peut cependant signaler ici qu'en découvrant l'isochronisme des oscillations du pendule, il proposa immédiatement de s'en servir pour la mesure du nombre de battements du pouls des malades, ainsi que pour les observations astronomiques, et que, jusqu'à un certain point, il l'utilisa lui-même dans ce but.

18. — Ses recherches sur le mouvement des projectiles sont d'une importance plus grande encore. D'après Galilée un corps libre possède toujours une accélération verticale g dirigée vers la terre. Si au début du mouvement le corps est déjà animé d'une vitesse c, sa vitesse après le temps t sera :

$$v = c + gt,$$

formule dans laquelle la vitesse initiale est prise avec le signe moins lorsqu'elle est dirigée vers le haut. Le chemin parcouru au bout du temps t est donné par

$$s = a + ct + \frac{1}{2} gt^2 ;$$

ct et $\frac{1}{2} gt^2$ sont les parties de chemin décrites respectivement dans le mouvement uniforme et dans le mouvement uniformément accéléré. La constante a est nulle lorsque l'on compte les espaces à partir du point où le corps se trouve au temps $t = 0$.

Dès qu'il eut acquis ses conceptions fondamentales sur la dynamique, Galilée reconnut sans peine que le jet horizontal est une combinaison de deux mouvements *indépendants* l'un de l'autre, un mouvement horizontal uniforme et un mouvement vertical uniformément

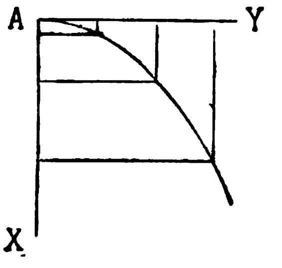


Fig. 46.

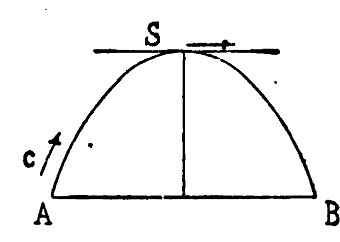


Fig. 47.

accéléré. Il fit ainsi connaître le *parallélogramme du mouvement*. Dès lors le jet oblique ne présentait pas de difficultés réelles.

Si un corps est animé d'une vitesse horizontale c, il décrit dans le temps t un chemin horizontal $y = ct$, pendant que, verticalement, il tombe de la hauteur $x = \frac{1}{2} gt^2$. Des circonstances déterminantes de mouvement distinctes n'exercent aucune influence les unes sur les autres et les mouvements qu'elles déterminent sont *indépendants les uns des autres*. Galilée fut conduit à cette hypothèse par une observation attentive et l'expérience l'a confirmée. Les deux équations ci-des-

... t, l'équation de la courbe décrite sous ... ouvements :

$$\sqrt{\frac{2c^2}{g}\,x}$$

... ius, à axe vertical et de paramètre $\frac{c^2}{g}$,

... re avec Galilée que le jet oblique ne ... eau. Si l'on imprime à un corps une ... sur l'horizon, on peut décomposer cette ... ontale $c \cos \alpha$ et une composante verti- ... monter le corps pendant un temps t ... l'acquérir le corps tombant librement.

... $\sin \alpha = gt$.

... uteur maximum, la composante ver- ... détruite et le mouvement continue à par- ... du jet horizontal. Considérons deux ... moment du passage en S, l'un avant, ... corps à ces deux instants se trouvent sur ... distances égales de la verticale du ... celle-ci. Cette verticale est donc un ... e, qui est une parabole de paramètre

... il suffit de considérer le mouvement ... la montée et de la descente du pro- ... oir que le projectile monte pendant le ... même temps pour descendre, soit en

... zontal pendant ce temps est :

$$\ldots = \frac{c^2}{g}\,2.\sin\alpha\cos\alpha = \frac{c^2}{g}\sin 2\alpha.$$

... ximum pour $\alpha = 45°$; elle est la même ... °.

... valeur l'importance du progrès réalisé ... uvement des projectiles, il est nécessaire ... s anciennes sur le même sujet. Sant- ... ulet de canon se meut en ligne droite

jusqu'à épuisement de sa vitesse et qu'alors il tombe verticalement. Tartaglia (1537) compose la trajectoire du projectile d'un segment de droite, d'un arc de cercle qui s'y raccorde et enfin de la tangente verticale à celui-ci. Il sait qu'en toute rigueur la trajectoire est courbe partout, puisque la pesanteur provoque en chaque point une déviation, mais il ne parvient pas à une analyse plus complète du phénomène. Rivius (1582) exprime encore plus clairement la même idée. La portion initiale de la trajectoire fait aisément croire à une destruction de la pesanteur par la très grande vitesse ; nous avons vu que Benedetti a commis cette erreur. Le segment de courbe ne présente pas de chute et nous oublions la petitesse de la *durée* de celle-ci. En négligeant cette circonstance, nous pourrions encore aujourd'hui regarder un jet d'eau comme un corps grave suspendu dans l'air, si nous faisions abstraction du mouvement rapide de ses particules. La même illusion est produite par le pendule conique, par la toupie, par la rotation rapide d'une chaîne solide (Philos. Mag. 1878), par la locomotive qui détruirait un pont délabré si elle reposait sur lui, mais qui, lancée à toute vitesse, parvient à le traverser sans encombre, grâce à une durée de chute et de travail insuffisante. Une analyse plus approfondie montre que ces phénomèmes ne sont pas plus merveilleux que les phénomènes les plus ordinaires. Ainsi que le croit Vailati, la diffusion de l'emploi des armes à feu, au XIV[e] siècle, a énormément réagi sur toute la mécanique. Il est vrai que ces phénomènes se présentaient déjà dans les anciennes machines de jet et aussi dans le jet à la main, mais leur forme nouvelle et imposante peut avoir forcé l'attention d'une manière particulièrement efficace.

20. — La reconnaissance de l'*indépendance* des circonstances déterminantes de mouvement (ou forces) qui se rencontrent dans la nature est d'une importance capitale. Elle fut découverte et exprimée à propos de l'étude du mouvement des projectiles. Supposons qu'un corps se meuve suivant AB (fig. 48) pendant que le champ du mouvement se déplace suivant AC. Le déplacement du corps est alors AD. Mais cela n'est vrai que si les circonstances qui, dans le même temps, déterminent les mouvements AB et AC n'ont aucune influence l'une sur l'autre. Dès lors on voit sans peine que la construction du parallélogramme donne non seulement la composition des mouvements simultanés, mais aussi celles des vitesses et des accélérations.

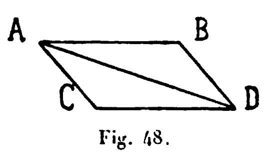


Fig. 48.

Galilée envisage donc le mouvement du projectile comme un phéno-

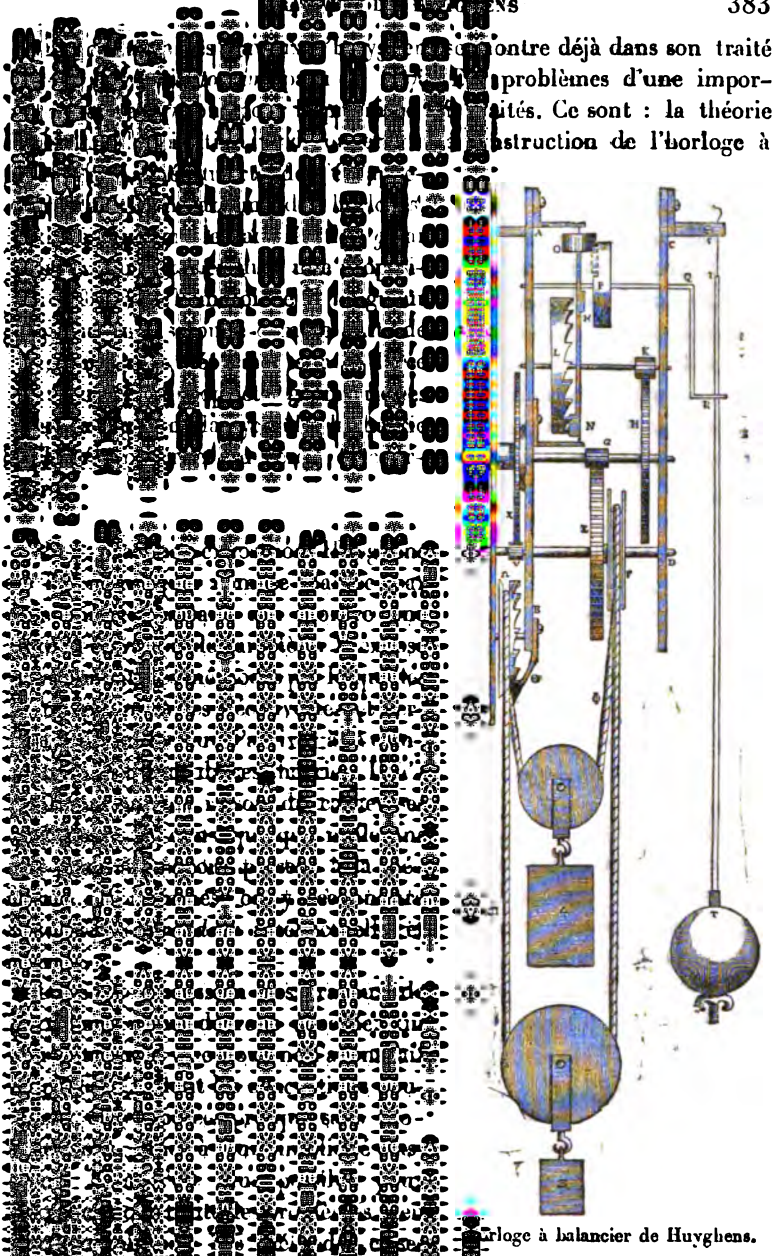
mène composé de deux mouvements indépendants l'un de l'autre. Cette conception ouvre tout un domaine de connaissances analogues fort importantes. On peut dire qu'il est de la même importance de reconnaître l'*indépendance* de deux circonstances A et B que la *dépendance* de deux circonstances A et C, car ce n'est qu'après avoir reconnu le premier de ces points que nous pouvons poursuivre, sans être troublé, l'étude du second. On peut comparer à la découverte de Galilée celles du parallélogramme des forces par Newton, de la composition des cordes par Sauveur, de la composition des mouvements de propagation de la chaleur par Fourier. Ces derniers chercheurs firent pénétrer dans tout le domaine de la physique mathématique la méthode de composition d'un phénomène à l'aide de phénomènes partiels indépendants les uns des autres, méthode analogue à la représentation d'une intégrale générale par une somme d'intégrales particulières. P. Volkmann a donné à cette méthode de décomposition d'un phénomène en parties indépendantes les unes des autres et de composition d'un phénomène à l'aide de parties de ce genre, les noms très justes *d'isolation* et de *superposition*. Ces deux procédés nous permettent de comprendre *par fragments* et de reconstruire dans la pensée ce que nous n'aurions pu concevoir *en une fois*.

« Ce n'est que dans des cas *très rares* que les phénomènes se présen-
« tent à nous avec un caractère parfaitement unitaire ; le monde des
« phénomènes offre tout au contraire un caractère entièrement *com-*
« *posite*... Notre connaissance doit alors résoudre le problème de discer-
« ner dans les phénomènes tels qu'ils se présentent les séries de phé-
« nomènes partiels qui les composent et d'étudier d'abord ces phé-
« nomènes partiels dans leur pureté. Nous ne nous rendons maître de
« l'ensemble qu'après avoir démêlé la part que chaque circonstance
« particulière prend au phénomène composé..... » Cf *Volkmann :*
« *Erkenntnisstheoretische Grundzüge der Naturwissenschaft,* 1896, p. 70,
« et mes *Principien der Warmelehre,* p. 123, 151, 452. »

TRAVAUX DE HUYGHENS

1. — Parmi les successeurs de Galilée on doit considérer Huyghens comme son égal à tous égards. Peut-être avait-il l'esprit moins philosophique, mais il compensait cette infériorité par son génie de géomètre. Non seulement Huyghens poussa plus loin les recherches commencées par Galilée, mais il résolut les premiers problèmes de la *dynamique de plusieurs masses,* alors que Galilée s'était toujours limité à la dynamique *d'un seul* corps.

ontre déjà dans son traité
problèmes d'une impor-
ités. Ce sont : la théorie
struction de l'horloge à



rloge à balancier de Huyghens.

ffisantes et pénibles. Pour
ceptions sous une forme
elles et caractéristiques.

3. — Nous commencerons par ses recherches sur la force centrifuge. Dès que l'on accepte cette conception de Galilée que la force détermine une accélération, on doit nécessairement attribuer à une *force* toute *modification* dans la vitesse et par conséquent aussi toute modification dans la *direction* d'un mouvement — car cette direction est déterminée par trois composantes de la vitesse perpendiculaires entre elles. Par conséquent le phénomène d'un corps, par exemple une pierre attachée à une corde, animé d'un mouvement circulaire uniforme, n'est concevable que dans l'hypothèse d'une force continue qui le fait dévier de son chemin rectiligne.

Cette force est la tension de la corde qui, à chaque instant, attire le corps vers le centre du cercle, hors de la ligne droite et qui représente donc une force centripète. D'un autre côté, elle agit aussi sur l'axe ou le centre fixe du cercle et, envisagée ainsi, elle constitue une force centrifuge.

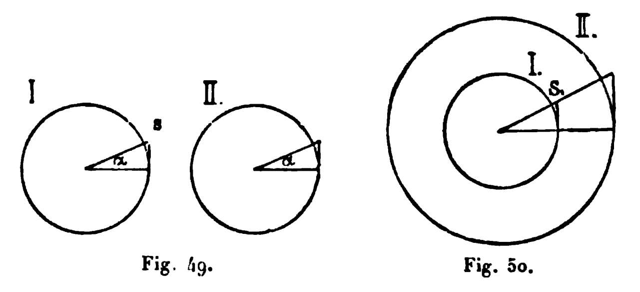


Fig. 49. Fig. 50.

Considérons un corps auquel on a donné une vitesse quelconque et que l'on force à se mouvoir d'un mouvement uniforme sur une circonférence, par une accélération constamment dirigée vers le centre, et proposons-nous de rechercher les circonstances dont dépend cette accélération. Soient (fig. 49) deux circonférences égales sur lesquelles se meuvent uniformément deux corps, l'un avec une vitesse simple sur la circonférence I, l'autre avec une vitesse double sur la circonférence II. Considérons dans ces deux cercles le même angle très petit α et son arc élémentaire ; soit s le chemin élémentaire correspondant dont le corps s'est éloigné du chemin rectiligne (suivant la tangente) sous l'influence de l'accélération centripète ; ce chemin est le même dans les deux cas. Soient φ_1 et φ_2 les accélérations respectives ; τ et $\frac{\tau}{2}$ sont les éléments de temps correspondants à l'angle α ; la loi de Galilée donne :

$$\varphi_1 = \frac{2s}{\tau^2}, \qquad \varphi_2 = 4 \cdot \frac{2s}{\tau^2},$$

d'où :

$$\varphi_2 = 4\,\varphi_1.$$

Par une généralisation fort simple on voit que dans des cercles égaux les accélérations centripètes sont entre elles comme les carrés des vitesses.

Etudions maintenant le mouvement sur les circonférences I et II de la figure 50, dont les rayons sont dans le rapport de 1 à 2 ; prenons des vitesses qui soient dans le même rapport, de telle sorte que des éléments semblables d'arc soient décrits dans des temps égaux. Soient φ_1, φ_2, s et $2s$ les accélérations et les chemins élémentaires, τ le temps qui a la même valeur dans les deux cas ; on a :

$$\varphi_1 = \frac{2s}{\tau^2}, \qquad \varphi_2 = \frac{4s}{\tau^2},$$

d'où

$$\varphi_2 = 2\,\varphi_1.$$

Si maintenant l'on réduit de moitié la vitesse sur la circonférence II, de telle sorte que les deux mouvements aient la même vitesse; φ_2 sera réduit au quart c'est-à-dire à $\frac{1}{2}\,\varphi_1$. En généralisant on voit que pour des vitesses *égales* les accélérations sont en raison inverse des rayons des circonférences.

4. — Les méthodes suivies par les chercheurs anciens les conduisirent presque toujours à trouver leurs théorèmes sous la forme pénible de proportions. Nous choisirons donc une autre voie. Sur un mobile animé d'une vitesse v, faisons agir pendant un élément de temps τ une force qui lui donne l'accélération φ perpendiculaire à la direction de son mouvement. Cette force fait naître une vitesse nouvelle $\varphi\tau$, qui, composée avec la vitesse primitive, donne la nouvelle direction du mouvement; soit α l'angle de celle-ci avec l'ancienne; supposons enfin que la trajectoire soit un cercle de rayon r, on trouve :

$$\frac{\varphi\tau}{v} = tg\,\alpha = \alpha = \frac{v\tau}{r},$$

car on peut remplacer la tangente par l'angle, qui est supposé *très petit*. On a donc :

$$\varphi = \frac{v^2}{r},$$

qui est l'expression complète de l'accélération centripète dans un mouvement circulaire uniforme.

Cette conception du mouvement circulaire uniforme produit par une accélération centripète constante a une apparence paradoxale.

Le paradoxe consiste dans l'acceptation du fait qu'une accélération centripète continue existe sans qu'il s'ensuive de rapprochement réel du centre ou d'accroissement de vitesse. Mais cette impression disparait si l'on réfléchit que, sans cette accélération centripète, le mobile s'éloignerait indéfiniment du centre, que la direction de l'accélération varie à chaque instant et qu'une variation de vitesse, inexistante dans le cas

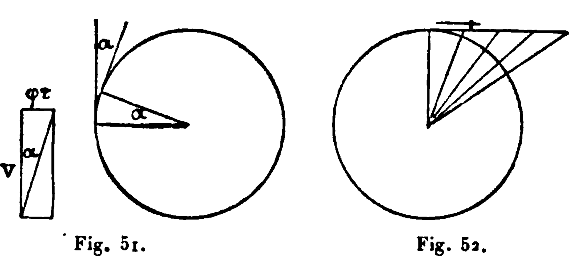


Fig. 51. Fig. 52.

présent, entraîne (comme on le verra dans la discussion du principe des forces vives) un rapprochement des corps qui se donnent mutuellement les accélérations. L'exemple plus compliqué du mouvement elliptique s'explique d'une manière analogue.

5. — On peut mettre sous une autre forme l'expression de l'accélération centripète ou centrifuge $\varphi = \frac{v^2}{r}$. Appelons T la durée d'une révolution du mobile. On a :

$$vT = 2r\pi,$$

$$\varphi = \frac{4r\pi^2}{T^2}.$$

Nous nous servirons plus tard de cette expression. Si plusieurs corps sont animés de mouvements circulaires uniformes tels que les durées des révolutions soient égales, les accélérations centripètes qui les retiennent sur leurs circonférences respectives sont proportionnelles aux rayons ; cela résulte évidemment de la formule que nous venons d'établir.

A propos de l'accélération centrifuge, disons aussi un mot des démonstrations qui reposent sur le principe de l'hodographe de Hamilton. Considérons un mobile parcourant uniformément le cercle de rayon r (fig. 52 *b*) : la tension du fil transforme la vitesse v au point A en une vitesse égale, mais d'une autre direction, au point B. Portons à partir d'une même origine O les vitesses successives du mobile en grandeur et directions (fig. 52 *c*) ; le lieu de leurs extrémités est une circonfé-

rence de rayon v. En même temps que OM se transforme en ON, il s'introduit une composante MN perpendiculaire à la première. Pendant la durée T d'une révolution du mobile, la vitesse croît *uniformément* de la quantité $2\pi v$ suivant la direction du rayon r.

La valeur de l'accélération centrale est donc $\varphi = \frac{2\pi v}{T}$ ou $\varphi = \frac{v^2}{r}$ puisque $vT = 2\pi r$.

Si l'on ajoute à OM $= v$ la petite composante w (fig. 52 *d*), la vi-

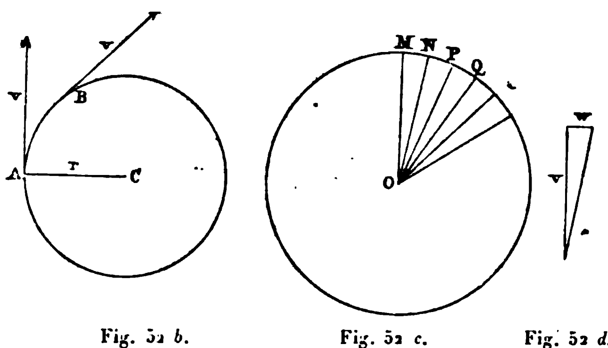


Fig. 52 *b*. Fig. 52 *c*. Fig. 52 *d*.

tesse résultante sera $\sqrt{v^2 + w^2} = v + \frac{w^2}{2v}$ approximativement ; mais, à cause de la rotation *continue* du rayon, le terme $\frac{w^2}{2v}$ disparaît devant v et l'on voit que seule la direction de la vitesse change, sa grandeur restant invariable.

6. — Les phénomènes tels que la rupture de fils trop peu résistants à l'aide desquels on imprime à des corps un mouvement de rotation trop rapide, ou l'aplatissement de sphères molles animées de mouvements de rotation sont bien connus et s'expliquent par les considérations précédentes. C'est ainsi qu'Huyghens put donner, à l'aide de cette notion nouvelle, l'explication immédiate de toute une catégorie de phénomènes. Ainsi, par exemple, une horloge à balancier ayant été transportée de Paris à Cayenne par Richer (1671-1673), il se trouva qu'elle retardait. Huyghens observant que la force centrifuge due à la rotation de la terre est maximum à l'équateur, en déduisit la diminution apparente de l'accélération g due à la pesanteur et donna ainsi l'explication immédiate du retard.

Parmi les expériences qu'Huyghens fit dans cet ordre d'idées, nous en citerons encore une, à cause de son intérêt historique. Lorsque Newton développa sa théorie de la gravitation universelle, Huyghens fut du

grand nombre de ceux qui ne purent pas admettre l'idée de l'action à distance. Il croyait pouvoir au contraire expliquer la gravitation par le mouvement très rapide de particules d'un milieu intermédiaire. Il enferma dans un corps plein d'eau quelques corps légers, tels que de petites sphère de bois, et fit alors tourner le vase autour d'un axe; il observa qu'aussitôt les sphères de bois se rapprochaient de celui-ci. Si l'on fait par exemple tourner autour d'un axe horizontal les tubes cylindriques de verre RR, fixés sur le pivot Z, et contenant les sphères de bois KK, celles-ci s'éloignent de l'axe dès que l'appareil est mis en mouvement. Lorsqu'on remplit d'eau les tubes, les sphères plus légères se placent aux extrémités supérieures EE et l'on voit qu'une rotation imprimée à l'appareil les rapproche de l'axe. L'explication de ce phénomème est la même que celle du principe d'Archimède : les sphères reçoivent une poussée centripète égale et directement opposée à la force centrifuge qui agirait sur le liquide dont elles tiennent la place.

Descartes pensait déjà à cette explication de la poussée centripète des corps flottants dans un milieu tourbillonnaire. Mais Huyghens remarqua avec raison que l'on doit alors accepter que les corps *les plus légers* reçoivent *la plus forte* poussée centripète et que, par conséquent, tous les corps pesants devraient être plus légers que le milieu tourbillonnaire. Il remarqua en outre que des phénomènes analogues doivent se produire avec des corps *quelconques* qui *ne* participent *pas* au mouvement du tourbillon, et qui se trouvent ainsi, sans force centrifuge, dans un milieu animé de forces centrifuges. Par exemple, une sphère de matière quelconque et mobile seulement autour d'un rayon *fixe* (fil de fer), sera, dans le milieu tourbillonnaire, poussée contre l'axe de rotation.

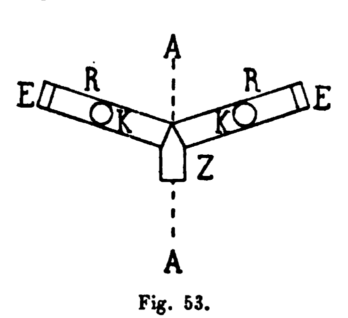


Fig. 53.

Huyghens immergea dans un vase fermé rempli d'eau des morceaux de cire à cacheter qui, à cause de leur densité un peu *plus grande*, se déposent sur le fond du vase. Celui-ci étant ensuite animé d'un mouvement de rotation, les morceaux de cire à cacheter vont se placer au bord extérieur. Si l'on fait cesser brusquement la rotation l'eau continue à tourner tandis que les morceaux de cire, qui reposent sur le fond et dont le mouvement est par suite plus vite contrarié, sont maintenant poussés sur l'axe. Huyghens voit dans ce phénomène une image de la pesanteur. L'acceptation d'un éther tourbillonnant *dans un sens* ne lui paraît correspondre à aucune nécessité; il est d'avis que cet éther

aurait tout entraîné avec lui. Il fait donc l'hypothèse de particules d'éther se mouvant rapidement dans tous les sens, et est d'avis que, dans un espace fermé, ce phénomène entraînera un mouvement circulaire prépondérant qui s'établira de lui-même. Cet éther lui semble suffisant pour l'explication de la gravité. L'exposition détaillée de cette théorie cinétique de la pesanteur, se trouve dans le traité d'Huyghens. « *Sur les causes de la pesanteur* » (1) ; cf. aussi Lasswitz « *Geschichte der atomistik* » 1890 vol. II, p. 344.

7. — Avant de parler des recherches d'Huyghens sur le centre d'oscillation, nous présenterons au sujet du mouvement pendulaire et oscillatoire en général, quelques considérations très élémentaires et par conséquent très claires, malgré leur manque de rigueur.

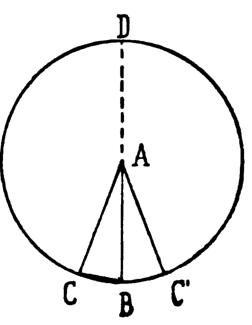


Fig. 54.

Galilée déjà connaissait plusieurs propriétés du mouvement du pendule. De nombreuses allusions disséminées dans ses dialogues prouvent qu'il possédait déjà les idées que nous allons exposer, ou qu'il était sur le point de les acquérir. Le corps pesant suspendu au fil du pendule se meut sur une circonférence dont le rayon est la longueur l de ce fil (fig. 54). Donnons-lui un déplacement très petit : il oscillera en décrivant un arc très petit, sensiblement confondu avec sa corde CB, qui est parcourue dans le même temps que le diamètre vertical $BD = 2l$. Soit t la durée de la chute ; on a :

$$2l = \frac{gt^2}{2}, \quad \text{d'où} \quad t = 2\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Mais comme le mouvement au-delà de B, sur l'arc BC′, prend le même temps que le mouvement sur CB, on obtient pour la durée MT d'une oscillation de C en C′.

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Malgré que cette explication soit grossière on voit qu'elle fait apparaître la *forme* réelle de la loi du pendule : on sait, en effet, que la formule exacte de la durée des oscillations très petites est

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

(1) *Discours sur les causes de la pesanteur*, à la fin du *Traité de la lumière*, Leyde, 1690.

Le mouvement du pendule peut être considéré comme une chute sur une succession des plans inclinés. Soit α l'angle du fil avec la verticale ; le pendule reçoit l'accélération $g \sin \alpha$ vers la position d'équilibre. Pour de *petites* valeurs de α, cette accélération peut s'écrire $g.\alpha$; elle est donc toujours proportionnelle à l'élongation et dirigée en sens contraire. Pour de *petites* élongations on peut aussi négliger la courbure du chemin.

8. — Ces préliminaires permettent de représenter par le *schéma élémentaire* suivant la notion fondamentale du mouvement oscillatoire. Un corps est mobile sur une droite OA (fig. 55) et est constamment animé d'une accélération dirigée vers le point O et proportionnelle à sa distance à ce point. Nous représenterons en chaque point cette accélération par une ordonnée normale à la droite du mouvement et portée au dessus ou au-dessous, suivant que l'accélération est dirigée vers la gauche ou vers la droite. Le corps, abandonné au point A, se mouvra vers O d'un mouvement uniformément accéléré, puis de O vers le point A_1 tel que $OA_1 = OA$, puis il reviendra de A_1 vers O, etc. On reconnait d'abord aisément l'indépendance de la durée d'oscillation (durée du mouvement AOA_1) et de son amplitude (longueur OA). Considérons à cet effet en I et II, deux oscillations semblables d'amplitudes 1 et 2. L'accélération étant variable d'un point à l'autre, partageons les longueurs OA et $O'A' = 2\,OA$ en un très grand nombre de parties élémentaires, chaque élément $A'B'$ de $O'A'$ étant double de l'élément correspondant AB de OA.

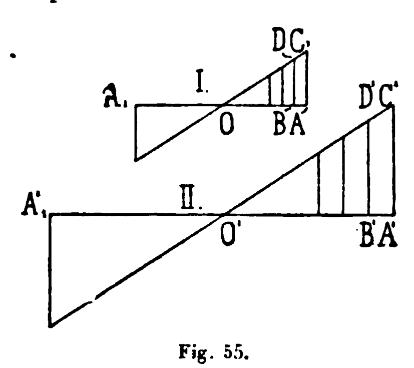


Fig. 55.

Les accélérations initiales φ et φ' se trouvent dans le rapport $\varphi' = 2\varphi$. Les éléments AB et $A'B' = 2\,AB$ seront donc parcourus par les accélérations respectives φ et 2φ dans le même temps τ et les vitesses des deux corps I et II, à la fin du premier élément de chemin, seront

$$v = \varphi\tau \text{ et } v' = 2\varphi\tau, \qquad \text{d'où} \qquad v' = 2v.$$

Les accélérations et les vitesses initiales se retrouvent dans le rapport 1 : 2 aux points B et B'. Les chemins infinitésimaux correspondants suivants seront parcourus dans le même temps et cette égalité des temps de parcours subsiste pour tous les couples consécutifs de chemins élé-

mentaires. Une généralisation immédiate montre que la durée de l'oscillation est indépendante de l'amplitude.

Considérons maintenant (fig. 56, I et II) deux mouvements oscillatoires de même amplitude mais tels que, dans l'oscillation II, le même écartement du point O produise une accélération quatre fois plus grande que dans le mouvement I. Partageons de même les deux amplitudes OA et O'A' = OA en un très grand nombre de parties égales ; les parties de I sont donc égales à celles de II. Des accélérations initiales en A et A' sont φ et 4φ ; les chemins élémentaires sont AB = A'B' = s et, en appelant τ et τ' les durées respectives de parcours, on voit que :

$$\tau = \sqrt{\frac{2s}{\varphi}}, \qquad \tau' = \sqrt{\frac{2s}{4\varphi}} = \frac{\tau}{2}.$$

L'élément A'B' est donc parcouru en un temps égal à la moitié de celui du parcours de l'élément AB. Les vitesses finales v et v' en B et B' sont :

$$v = \varphi\tau, \qquad v' = 4\varphi\frac{\tau}{2} = 2v.$$

Fig. 56.

Les vitesses initiales en B et B' étant dans le rapport de 1 à 2 et les accélérations dans le rapport de 1 à 4, on voit que l'élément de chemin suivant en I sera parcouru dans un temps double de celui du parcours de l'élément correspondant en II. En généralisant on voit que, pour des amplitudes égales, les durées des oscillations sont inversement proportionnelles aux racines carrées des accélérations.

9. — Ces considérations peuvent être abrégées et rendues beaucoup plus claires par un mode de représentation employé pour la première fois par Newton. Newton appelle systèmes matériels *semblables* des systèmes matériels dont les figures géométriques sont semblables et dont les masses homologues sont entre elles dans le même rapport de similitude. Il dit en outre que ces systèmes sont animés de mouvements semblables lorsque les points homologues décrivent des chemins semblables dans des temps proportionnels. Dans la terminologie géométrique actuelle, ces systèmes mécaniques, qui ont 5 dimensions, ne sont dits *semblables* que lorsque les dimensions linéaires, les temps et les masses sont dans le *même* rapport. Ils seraient donc plus correctement appelés *affins* l'un à l'autre.

Nous conserverons cette dénomination bien appropriée de systèmes semblables, et, dans les considérations qui suivent, nous ferons abstraction des masses. Soient donc, dans deux mouvements sembla-

bles, s et αs les chemins homologues, t et βt les temps homologues ; on aura :

pour les vitesses homologues : $v = \frac{s}{t}$, $\gamma v = \frac{\alpha s}{\beta t}$;

pour les accélérations homologues : $\varphi = \frac{2s}{t^2}$, $\varepsilon\varphi = \frac{\alpha}{\beta^2}\frac{2s}{t^2}$.

On reconnaît maintenant sans peine que les oscillations d'amplitudes 1 et α, décrites par un corps dans les conditions posées plus haut sont des mouvements *semblables*. Dès lors en remarquant que le rapport des accélérations homologues est $\varepsilon = \alpha$, on trouve

$$\alpha = \frac{\alpha}{\beta^2},$$

d'où, pour le rapport des temps homologues, et par suite aussi pour celui des durées d'oscillations :

$$\beta = \pm 1.$$

Il en résulte donc que les durées d'oscillations sont indépendantes des amplitudes.

Si deux oscillations ont leurs amplitudes dans le rapport 1 : α et leurs accélérations dans le rapport 1 : $\alpha\mu$, on trouve ;

$$\varepsilon = \alpha\mu = \frac{\alpha}{\beta^2} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{1}{\pm\sqrt{\mu}}.$$

ce qui démontre à nouveau la seconde loi du mouvement oscillatoire.

Deux mouvements circulaires uniformes sont toujours semblables ; appelons $\frac{1}{\alpha}$ le rapport des rayons et $\frac{1}{\gamma}$ celui des vitesses ; le rapport des accélérations sera :

$$\varepsilon = \frac{\alpha}{\beta^2},$$

d'où, puisque $\gamma = \frac{\alpha}{\beta}$:

$$\varepsilon = \frac{\gamma^2}{\alpha},$$

formule qui donne les lois de l'accélération centripète.

Il est regrettable que ces questions sur l'*affinité* mécanique et phoronomique soient *si peu* étudiées, car elles promettent le plus bel et le plus lumineux élargissement de nos conceptions.

10. — Entre le mouvement circulaire uniforme et les mouvements oscillatoires que nous avons étudiés existe une relation importante. Rapportons le mouvement circulaire à deux axes coordonnés rectangulaires, l'origine étant au centre de la circonférence, et décomposons suivant les directions X et Y l'accélération centripète φ qui est la condition de ce mouvement. Remarquons que la projection du mouvement sur les X ne dépend que de la composante X de l'accélération. Nous pouvons considérer les deux mouvements et les deux accélérations comme indépendants l'un de l'autre.

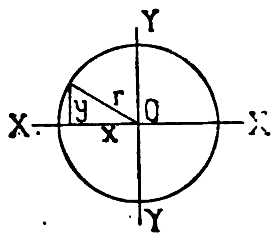


Fig. 57.

Les deux mouvements composants sont des mouvements oscillatoires autour du centre. L'écartement x correspond à une accélération $\varphi . \frac{x}{r}$ ou $\frac{\varphi}{r} . x$ dirigée vers le point o. L'accélération est donc *proportionnelle* à l'écartement et le mouvement est par conséquent identique au mouvement oscillatoire dont nous venons de parler. La durée T d'une oscillation complète, comprenant le mouvement d'aller et celui de retour, est égale à la durée de la révolution du mobile. Mais nous savons que :

$$\varphi = \frac{4\pi^2 r}{T^2},$$

nous avons donc

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{r}{\varphi}}.$$

Or $\frac{\varphi}{r}$ est l'accélération pour $x = 1$; en appelant f la valeur qu'elle possède pour un écartement égal à l'unité de longueur, il vient

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{1}{f}},$$

et, en désignant comme d'habitude par T la durée d'une oscillation simple, formée d'un aller ou d'un retour, nous aurons :

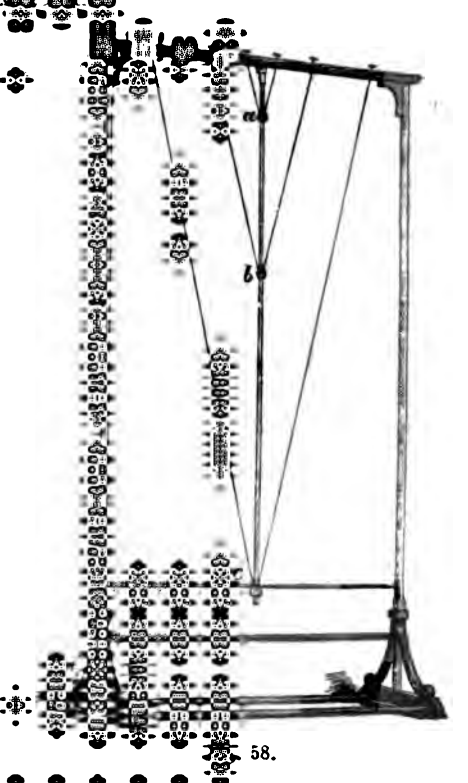
$$T = \pi \sqrt{\frac{1}{f}}.$$

11. — Ce résultat peut être immédiatement appliqué aux oscillations pendulaires d'amplitude *très petite*, pour lesquelles on pourrait répéter les raisonnements qui précèdent, parce que la courbure est négligeable. En appelant α l'angle du fil avec la verticale, la masse du

d'équilibre de la longueur $l\alpha$ et ; il s'ensuit que :

$$\text{et} \qquad T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

cillation est en raison directe de la dule et en raison inverse de la pesanteur. Un pendule dont la du pendule à seconde aurait par secondes. Un pendule à seconde, ne distance égale au rayon terrestre, ion $\frac{g}{4}$ et sa durée d'oscillation serait



58.

rouver par l'expérience la relation durée de son oscillation. On em- us par deux fils pour assurer l'inva-

…s respectives 1, 4, 9. On …mps où b n'en fait qu'une …e.

…imentalement la relation …onté l'accélération due à … ne faisant agir sur le …t AA l'axe … du dessin … du dessin …a position …e de rota- …le du plan …célération … Dès lors, …on α dans son plan d'os-

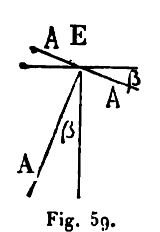
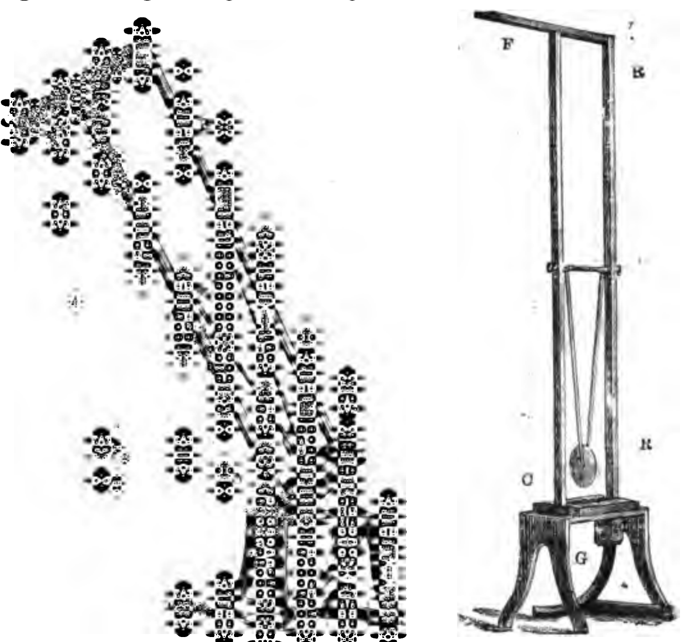


Fig. 59.





…$g \cos \beta) \alpha$, et la durée de

Il en résulte que lorsque β croît l'accélération g cos β diminue et que, par conséquent, la durée de l'oscillation augmente. L'expérience peut se faire aisément à l'aide de l'appareil de la figure 60. Le cadre RR, mobile autour d'une charnière C, peut être incliné et fixé dans une position d'inclinaison donnée, à l'aide d'un arc gradué G et d'une vis de pression. On constate que la durée d'oscillation augmente avec β. Si l'on amème le plan d'oscillation à être horizontal, le cadre reposant alors sur le pied F, la durée d'oscillation devient infiniment grande. Le pendule ne retourne plus alors vers aucune position d'équilibre déterminée, mais effectue des révolutions successives dans le même sens jusqu'à ce que toute sa vitesse ait été détruite par le frottement.

13. — Lorsque le pendule cesse de se mouvoir dans un *plan* et se meut dans l'*espace* autour du point de suspension, le fil du pendule décrit un cône. Huyghens étudia aussi le mouvement du pendule conique ; nous en examinerons un cas particulier simple. Considérons un pendule (fig. 61) de longueur l, écarté de la verticale d'un angle α et donnons à la masse qu'il soutient une vitesse v perpendiculaire au plan du fil et de la verticale. Si l'accélération centrifuge développée fait équilibre à celle de la pesanteur, c'est-à-dire si l'accélération résultante est dirigée suivant le fil, la masse suspendue décrira une circonférence horizontale. On a dans ce cas $\frac{\varphi}{g} = \text{tg } \alpha$. En appelant T la durée d'une révolution, il vient

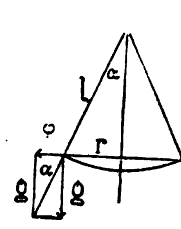


Fig. 61.

$$\varphi = \frac{4r\pi^2}{T^2}, \qquad \text{d'où} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{r}{\varphi}}.$$

et, en remplaçant $\frac{r}{\varphi}$ par sa valeur,

$$\frac{r}{\varphi} = \frac{l \sin \alpha}{g \text{ tg } \alpha} = \frac{l \cos \alpha}{g} ;$$

il vient donc pour la durée de la révolution du pendule :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l \cos \alpha}{g}}.$$

La vitesse v du mouvement est donnée par

$$v = \sqrt{r\varphi},$$

ou puisque $\varphi = g \operatorname{tg} \alpha$:

$$v = \sqrt{gl \sin \alpha \operatorname{tg.} \alpha}.$$

Si l'angle du cône est très petit on peut écrire

$$T = 2\sqrt{\frac{g}{l}},$$

formule identique à celle du pendule ordinaire, car *une* révolution du pendule conique correspond à *deux* oscillations simples du pendule plan.

14. — Huyghens, le premier, se proposa la détermination exacte de l'accélération de la pesanteur à l'aide du pendule. La formule d'un pendule simple, formé d'une petite sphère attachée à un fil, étant $T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, on a

$$g = \frac{\pi^2 l}{T^2}.$$

A la latitude de 45° on trouve pour g la valeur 9,806, exprimée en $\frac{\text{mètre}}{\text{seconde}^2}$, soit, en nombre rond, 10 mètres par seconde, valeur très suffisante pour un calcul provisoire et qui a l'avantage d'être facile à retenir.

15. — Tout commençant qui réfléchit se demande comment l'on peut trouver la durée de l'oscillation, c'est-à-dire un *temps*, en divisant un nombre qui mesure une *longueur* par un nombre qui mesure une *accélération*, et en prenant la racine carrée du quotient. Pour le comprendre il faut se rappeler que $g = \frac{2s}{t^2}$ est le quotient d'une longueur par le carré d'un temps. La formule de la durée est donc en réalité

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{2s}t^2};$$

$\frac{l}{2s}$, étant le rapport de deux longueurs, est un nombre ; la quantité, qui se trouve sous le radical est donc le carré d'un temps. Il va de soi que la valeur T sera exprimée en secondes si l'on a choisi la seconde pour unité de temps dans l'évaluation de g.

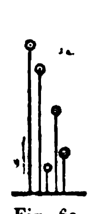
La formule

$$g = \frac{\pi^2 l}{T^2}$$

fait voir directement que g est le quotient d'une longueur par le carré d'un temps, ainsi que le veut la nature de l'accélération.

16. — Le plus important des résultats obtenus par Huyghens est la solution du problème de la détermination du centre d'oscillation. Tant qu'il ne s'agit que de la dynamique d'un corps *unique* les principes de Galilée suffisent parfaitement. Or ce nouveau problème consiste dans la détermination du mouvement de *plusieurs* corps qui agissent les uns sur les autres, et l'on ne peut le résoudre sans faire appel à un principe *nouveau*. C'est ce principe nouveau qui fut donné par Huyghens.

Nous savons que les pendules plus longs oscillent plus lentement et que les pendules plus courts oscillent plus vite. Un corps solide pesant, mobile autour d'un axe quelconque ne passant pas par son centre de gravité, constitue un pendule composé. Chacune des particules matérielles de ce corps, située seule à la même distance de l'axe, aurait une durée d'oscillation particulière; mais, à cause de la liaison de ses parties entre elles, le corps se meut comme un tout et la durée de son oscillation a une valeur unique et bien déterminée. Imaginons plusieurs pendules de longueurs inégales, les plus courts oscillant plus vite et les plus longs, moins vite; si on les réunit en un seul, on peut prévoir que le mouvement des pendules plus longs sera accéléré, celui des pendules plus courts retardé, et qu'il en résultera, pour l'ensemble, une durée d'oscillation intermédiaire. Il y aura donc un pendule simple, de longueur intermédiaire entre celles du plus grand et du plus petit des pendules considérés, dont l'oscillation aura la même durée que celle du pendule composé, on trouve un point qui, malgré ses liaisons avec les autres points, oscille comme s'il était seul. Ce point est appelé *centre d'oscillation*. C'est Mersenne qui, le premier, a posé le problème de la détermination de ce centre; la solution qu'en a donné Descartes est beaucoup trop rapide et insuffisante.


Fig. 62.

17. — La première solution générale fut donnée par Huyghens. En dehors de celui-ci presque tous les chercheurs de son époque se sont occupés de cette question et l'on peut dire qu'elle provoqua le développement des principes les plus importants de la mécanique moderne.

Huyghens partit de l'idée *nouvelle* suivante, de beaucoup plus importante que le problème lui-même : Dans tous les cas, quelles que soient les modifications que les réactions mutuelles des particules matérielles du pendule apportent au mouvement de chacune d'elles, les

vitesses acquises dans le mouvement de descente du pendule doivent être telles que le centre des masses puisse *remonter exactement à la hauteur d'où il est descendu*, soit que les masses conservent leurs liaisons, soit que ces liaisons soient détruites. Devant les doutes de ses contemporains au sujet de l'exactitude de ce principe, Huyghens se vit forcé de faire remarquer qu'il ne contient pas autre chose que l'affirmation du fait que les corps pesants ne se meuvent point *d'eux-mêmes* vers le haut. Supposons en effet que le centre de gravité de masses liées entre elles pendant la chute puisse, par la suppression des liaisons, monter à une hauteur plus grande que celle de la descente ; il s'ensuivra que des corps pesants peuvent, par leur propre poids, pourvu que cette opération soit répétée un nombre suffisant de fois, s'élever à une hauteur quelconque. Si, au contraire, après la suppression des liaisons, le centre de gravité ne peut s'élever qu'à une hauteur moindre que celle de la chute, il suffira de renverser le sens des opérations pour que, de nouveau, le corps s'élève par son propre poids à une hauteur quelconque. Le postulat de Huyghens était donc en réalité de ceux dont personne n'a jamais douté et que chacun au contraire connaît *instinctivement*. Huyghens donnait toutefois à cette connaissance instinctive une valeur *abstraite* et ne manqua pas de partir de ce point pour montrer l'inutilité de la recherche du mouvement perpétuel. Nous pouvons reconnaître dans la proposition que nous venons de développer *la généralisation d'une des conceptions de Galilée.*

18. — Occupons-nous maintenant du rôle de ce principe dans la détermination du centre d'oscillation. Considérons pour la simplicité un pendule linéaire OA (fig. 63) formé d'un grand nombre de masses indiquées sur la figure par des points. Si on l'abandonne à lui-même dans la position OA, il descendra jusqu'en B et montera jusqu'à la position A' pour laquelle AB = BA'. Son centre de gravité montera d'un côté aussi haut qu'il est descendu de l'autre. Mais la solution ne peut être déduite de cette remarque. Supposons maintenant qu'au moment où le pendule passe par OB les particules matérielles soient soudainement affranchies de leurs liaisons ; leurs vitesses acquises élèveront leur centre de gravité à la même hauteur qu'avant cette suppression, et si l'on imagine que chacune de ses particules matérielles, oscillant librement, soit fixée à sa position *d'élévation maximum*, les pendules plus courts se trouveront en deçà et les plus longs au delà de OA', mais le centre de gravité du système se trouvera

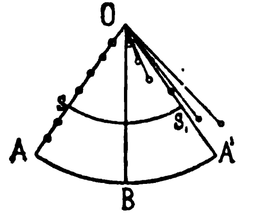


Fig. 63.

sur cette ligne, à sa hauteur primitive. D'autre part les vitesses imprimées aux particules matérielles sont proportionnelles à leurs distances à l'axe ; une de ces vitesses étant *donnée*, toutes les autres sont connues et la hauteur d'ascension du centre de gravité s'en déduira. Inversement, la vitesse d'une masse quelconque est déterminée par la hauteur du centre de gravité. Or, pour connaître tout le mouvement d'un pendule, il suffit de la vitesse correspondant à une hauteur de chute donnée.

19. — Ces remarques faites, nous aborderons la solution du problème. Etant donné un pendule linéaire, coupons-en un segment de longueur 1 à partir de l'axe et soit k la hauteur d'où tombe l'extrémité de ce segment lorsque le pendule se meut de sa position d'écart maximum à sa position d'équilibre. Les hauteurs de chute des masses m, m', m'',..., situées aux distances r, r', r'',..., de l'axe, seront rk, $r'k$, $r''k$,..., et la hauteur de chute du centre de gravité sera

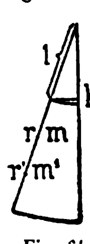


Fig. 64.

$$\frac{mrk + m'r'k + m''r''k + \ldots.}{m + m' + m'' + \ldots..} = k\,\frac{\Sigma mr}{\Sigma m}.$$

Ce passage à la position d'équilibre communique au point situé à la distance 1 de l'axe une vitesse v encore inconnue. La hauteur d'ascension de ce point, après la suppression des liaisons, sera donc $\frac{v^2}{2g}$ et les hauteurs correspondantes pour les autres masses seront $\frac{(rv)^2}{2g}$, $\frac{(r'v)^2}{2g}$, $\frac{(r''v)^2}{2g}$,... La hauteur d'ascension du centre de gravité des masses rendues libres sera par conséquent :

$$\frac{m\,\frac{(rv)^2}{2g} + m'\,\frac{(r'v)^2}{2g} + m''\,\frac{(r''v)^2}{2g} + \ldots..}{m + m' + m'' + \ldots..} = \frac{v^2}{2g}\,\frac{\Sigma mr^2}{\Sigma m}.$$

Le principe fondamental de Huyghens donne

$$k\,\frac{\Sigma mr}{\Sigma m} = \frac{v^2}{2g}\,\frac{\Sigma mr^2}{\Sigma m}. \qquad a)$$

Cette équation lie la hauteur de chute k à la vitesse v. Puisque tous les mouvements pendulaires de même écartement sont phoronomiquement semblables, il s'ensuit que le mouvement étudié est entièrement déterminé.

Pour trouver la longueur du pendule simple dont l'oscillation se fait

dans le même temps que celle du pendule composé proposé, remarquons qu'entre sa hauteur de chute et sa vitesse il doit exister la même relation que dans le cas de la chute libre. Soit y la longueur de ce pendule, sa hauteur de chute est ky et sa vitesse vy, on a :

$$\frac{(vy)^2}{2g} = ky,$$

ou

$$y \cdot \frac{v^2}{2g} = k; \qquad b)$$

en multipliant membre à membre les équations a) et b) il vient :

$$y = \frac{\Sigma mr^2}{\Sigma mr}.$$

On peut aussi se servir de la similitude phoronomique et procéder comme suit : a) donne

$$v = \sqrt{2gk}\sqrt{\frac{\Sigma mr}{\Sigma mr^2}}.$$

Le pendule simple de longueur 1, a, dans les circonstances présentes, la vitesse

$$v_1 = \sqrt{2gk}.$$

Soit T la durée d'oscillation du pendule composé ; celle du pendule simple de longueur 1 est $T_1 = \pi\sqrt{\frac{1}{g}}$, et l'on trouve, dans l'hypothèse des écartements égaux où nous sommes placés :

$$\frac{T_1}{T} = \frac{v_1}{v},$$

d'où

$$T = \pi\sqrt{\frac{\Sigma mr^2}{g\Sigma mr}}.$$

20. — On découvre sans peine que le principe fondamental posé par Huyghens consiste dans la reconnaissance du *travail comme déterminante de la vitesse* ou plus exactement *comme déterminante de la force vive*. On appelle force vive d'un système de masse m, m', m'',..., animées des vitesses respectives v, v', v'',..., la somme

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{m'v'^2}{2} + \frac{m''v''^2}{2} + \dots$$

Le principe fondamental de Huyghens est identique au principe des forces vives et les additions qu'y apportèrent plus tard les autres chercheurs en intéressent bien moins le fond que la forme.

Considérons un système tout à fait quelconque de poids p, p', p'',..., liés entre eux ou non, tombant de hauteurs h, h', h'',... et acquérant ainsi des vitesses v, v', v''... ; le principe de Huyghens, exprimant l'égalité de la *hauteur de chute* et de la *hauteur d'ascension* du centre de gravité, fournit l'équation

$$\frac{ph + p'h' + p''h'' + \dots}{p + p' + p'' + \dots} = \frac{p\frac{v^2}{2g} + p'\frac{v'^2}{2g} + p''\frac{v''^2}{2g} + \dots}{p + p' + p'' + \dots},$$

ou

$$\Sigma ph = \frac{1}{g}\Sigma\frac{pv^2}{2}.$$

Une fois en possession du concept « masse », qui manquait encore à Huyghens, on peut remplacer le rapport $\frac{p}{g}$ par la masse m et l'on obtient

$$\Sigma ph = \frac{1}{2}\Sigma mv^2,$$

équation que l'on peut très aisément généraliser pour le cas de forces variables.

21. — Le théorème des forces vives permet de déterminer la durée des oscillations infiniment petites d'un pendule quelconque. Abaissons, du centre de gravité S du corps, une normale à l'axe de rotation et fixons sur celle-ci le point qui se trouve à l'unité de distance de l'axe ; appelons k la hauteur verticale dont est tombé ce point au moment où il passe par sa position d'équilibre et v la vitesse qu'il possède alors. Le travail effectué pendant la chute est déterminé par le mouvement du centre de gravité ; nous avons donc :

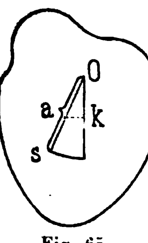


Fig. 65.

travail effectué pendant la chute = force vive,

$$akg\mathrm{M} = \frac{v^2}{2}\Sigma mr^2,$$

M étant la masse totale du corps. Dans cette formule nous faisons un usage anticipé de l'expression de la force vive. En raisonnant comme nous l'avons fait dans le cas précédent, nous aurons :

$$\mathrm{T} = \pi\sqrt{\frac{\Sigma mr^2}{ag\mathrm{M}}}.$$

22. — Nous voyons donc que la durée de l'oscillation infiniment petite d'un pendule dépend de deux facteurs ; la valeur de l'expression Σmr^2 qu'Euler a appelée *moment d'inertie* et que Huyghens emploie sans lui donner de nom particulier, et la valeur de agM. Cette dernière expression, que pour la brièveté nous appellerons *moment statique*, est le produit aP du poids du pendule par la distance du centre de gravité à l'axe de rotation. La connaissance de ces deux valeurs détermine la longueur du pendule simple de même durée d'oscillation (isochrone) et la position du centre d'oscillation.

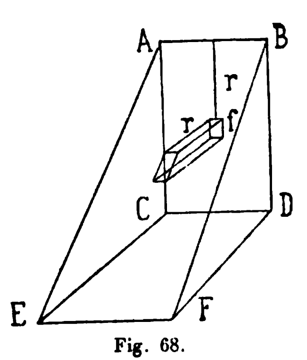


Fig. 68.

Pour calculer la longueur de ce pendule simple isochrome, Huyghens ne possédait pas de méthodes analytiques qui ne furent découvertes que plus tard. Il employa un procédé géométrique vraiment ingénieux dont nous donnerons quelques exemples. Proposons-nous de déterminer la durée d'oscillation d'un rectangle matériel pesant ABCD, oscillant autour de l'axe AB. Partageons le en petits éléments de surface f, f', f'',... situés aux distances r, r', r''... de l'axe. La longueur du pendule simple isochrone — égale à la distance du centre d'oscillation à l'axe, — est donnée par la formule

$$\frac{fr^2 + f'r'^2 + f''r''^2 + \ldots}{fr + f'r' + f''r'' + \ldots}.$$

Aux points C et D élevons CE et DF perpendiculaires sur ABCD, telles que CE = DF = AC = BD, et construisons ainsi le prisme homogène ABCDEF. Cherchons la distance du centre de gravité de ce prisme au plan mené par AB parallèlement à CDEF. Nous devons pour cela considérer les colonnes minces fr, $f'r$, $f''r$..., et leurs distances r, r', r'',... à ce plan ; la distance cherchée est donnée par l'expression :

$$\frac{fr \,.\, r + f'r' \,.\, r' + f''r'' \,.\, r'' + \ldots}{fr + fr' + f''r'' + \ldots}.$$

On retrouve donc la formule précédente. Le centre d'oscillation du rectangle et le centre de gravité du prisme sont donc situés à la même distance : $\frac{2}{3}$ AC.

Dans cet ordre d'idées on reconnaît sans peine l'exactitude des propositions suivantes : Pour un rectangle homogène de hauteur h, oscillant autour de sa base supérieure, le centre de gravité est à la distance

$\frac{h}{2}$ de l'axe et le centre d'oscillation à la distance $\frac{2h}{3}$. Pour un triangle homogène de hauteur h, dont l'axe de rotation passe par le sommet et est parallèle à la base, les distances à l'axe des centres de gravité et d'oscillation sont respectivement $\frac{2}{3}h$ et $\frac{3}{4}h$. En appelant Δ_1, Δ_2 les moments d'inertie et M_1, M_2 les masses du rectangle et du triangle on trouve :

$$\frac{2}{3}h = \frac{\Delta_1}{\frac{h}{2}M_1}, \qquad \frac{3}{4}h = \frac{\Delta_2}{\frac{2}{3}hM_2},$$

d'où

$$\Delta_1 = \frac{h^2M_1}{3}, \qquad \Delta = \frac{h^2M_2}{2}.$$

Fig. 69.

Fig. 70.

Ce procédé géométrique très élégant permet de résoudre nombre d'autres problèmes de ce genre, que l'on traite aujourd'hui d'une façon routinière mais sans contredit beaucoup plus commode.

23. — Huyghens se servit aussi, mais sous une forme un peu différente, du théorème suivant relatif aux moments d'inertie. Soit O le centre de gravité d'un corps quelconque (fig. 70) : choisissons-le pour origine d'un système d'axes coordonnés rectangulaires et supposons connu le moment d'inertie par rapport à l'axe des z. En appelant m un élément de masse et r sa distance à cet axe, ce moment d'inertie est :

$$\Delta = \Sigma mr^2.$$

Déplaçons l'axe de rotation, parallèlement à lui-même, d'une longueur a suivant l'axe x ; soit O′ sa nouvelle position. La distance r de l'élément de masse à l'axe devient ρ et le nouveau moment d'inertie est :

$$\begin{aligned}\theta &= \Sigma m\rho^2 = \Sigma m\,[(x-a)^2 + y^2],\\ &= \Sigma m\,(x^2+y^2) - 2a\Sigma mx + a^2\Sigma m,\end{aligned}$$

or $\Sigma m(x^2+y^2) = \Sigma mr^2 = \Delta$ et les propriétés du centre de gravité

donnent $\Sigma mx = 0$; d'autre part $\Sigma m = M$ est la masse totale du corps ; par conséquent :

$$\theta = \Delta + a^2 M.$$

Cette formule permet donc de calculer aisément le moment d'inertie par rapport à un axe quelconque, étant donné le moment d'inertie par rapport à une axe passant par le centre de gravité et *parallèle* au premier.

24. — Ce théorème conduit à une proposition importante. La distance du centre d'oscillation est donnée par

$$l = \frac{\Delta + a^2 M}{aM},$$

Δ, M et a conservant leurs significations précédentes. Les valeurs Δ et M sont invariables pour un corps donné ; il s'en suit que l est constant tant que a ne varie pas. Donc le pendule composé formé par un corps oscillant autour d'un axe a la même durée d'oscillation pour tous les axes *parallèles situés à la même distance* du centre de gravité. En posant $\frac{\Delta}{M} = \varkappa$, il vient :

$$l = \frac{\varkappa}{a} + a,$$

l et a sont respectivement les distances à l'axe du centre d'oscillation et du centre de gravité. On voit donc que le centre d'oscillation est toujours plus loin de l'axe que le centre de gravité et que l'excès de sa distance à l'axe sur celle du centre de gravité est $\frac{\varkappa}{a}$, qui représente donc la distance de ces deux points. Menons par le centre d'oscillation un axe parallèle à l'axe primitif. Choisissons-le pour nouvel axe de rotation ; la longueur l' du pendule composé nouveau ainsi formé s'obtiendra en remplaçant a par $\frac{\varkappa}{a}$ dans la formule précédente, ce qui donne

$$l' = \frac{\varkappa}{\frac{\varkappa}{a}} + \frac{\varkappa}{a} = a + \frac{\varkappa}{a} = l.$$

La durée d'oscillation est donc la même pour un axe parallèle mené par le centre d'oscillation et, par conséquent, pour tout axe parallèle dont la distance au centre de gravité est égale à la distance $\frac{\varkappa}{a}$ du centre d'oscillation.

L'ensemble de tous les axes parallèles donnant la même durée d'oscillation et situés, par conséquent, aux distances a ou $\frac{x}{a}$ du centre de gravité forme donc deux cylindres coaxiaux. La durée d'oscillation est la même, quelle que soit la génératrice de ces cylindres que l'on prenne pour axe de rotation.

25. — Nous donnerons à ces deux cylindres le nom de cylindres des axes. Pour établir les relations qui existent entre eux, on peut procéder comme suit. Posons $\Delta = k^2M$, il vient

$$l = \frac{k^2}{a} + a.$$

En cherchant la valeur de a qui correspond à une valeur donnée de l, c'est-à-dire à une durée d'oscillation donnée, il vient :

$$a = \frac{l}{2} \mp \sqrt{\frac{l^2}{4} - k^2}.$$

Donc, en général, *deux* valeurs de a correspondent à *une* valeur de l. Mais si

$$\sqrt{\frac{l^2}{4} - k^2} = 0, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad l = 2k,$$

ces deux valeurs coïncident et deviennent $a = k$.

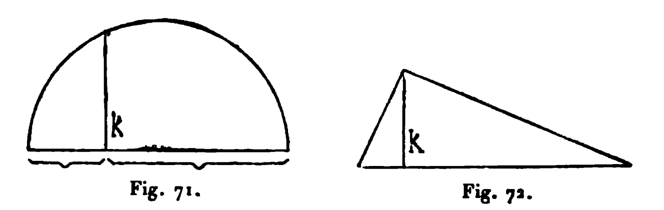


Fig. 71. Fig. 72.

Appelons α et β les deux valeurs de a correspondant à une valeur de l, nous aurons :

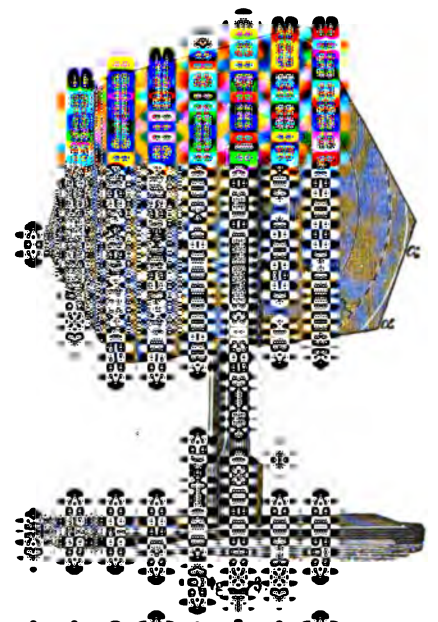
$$l = \frac{k^2 + \alpha^2}{\alpha} = \frac{k^2 + \beta^2}{\beta},$$

d'où

$$\beta(k^2 + \alpha^2) = \alpha(k^2 + \beta^2),$$
$$k^2(\beta - \alpha) = \alpha\beta(\beta - \alpha),$$
$$k^2 = \alpha\beta.$$

Supposons que l'on connaisse dans un corps *deux* axes parallèles, donnant la même durée d'oscillation et situés à des distances inégales

... lorsque l'on connaîtra le ... suspension quelconque. ... de construire k ; il suffit ... leur somme, une demi- ... te à l'extrémité commune ... ent, si k est donné, on ... α une autre valeur μ qui ... truisant un triangle rec- ... evée sur l'hypothénuse à ... μ sur le prolongement



... e de gravité O situé dans ... r autour de tous les axes ... port à la durée d'oscilla- ... ue ou l'autre des circon- ... ux. Si l'on substitue à α ... lacer β par une circonfé- ... en plus, les deux circon- ... le de rayon k.

... avons tant appuyé sur ... abord bien en lumière la

richesse des résultats de Huyghens, car tous ceux que nous avons donnés ici sont contenus dans ses écrits, quoique sous une forme un peu différente, et ceux qui n'y sont pas expressément s'y trouvent sous une forme si voisine que l'on peut les compléter sans la moindre difficulté. Bien peu de ces résultats se trouvent dans les traités élémentaires modernes; un de ceux que l'on y rencontre est la réversibilité des centres de suspension et d'oscillation, mais la façon dont il est ordinairement présenté n'épuise point le sujet. Kater s'est servi de ce résultat pour la détermination précise de la longueur du pendule à secondes.

Les considérations précédentes nous ont été utiles aussi en ce qu'elles ont éclairci la notion du « moment d'inertie ». Cette notion ne conduit à aucun aperçu de principe que l'on ne puisse acquérir sans elle, mais elle *épargne* la considération individuelle de chacune des masses du système et permet d'en disposer une fois pour toutes. Elle conduit donc ainsi à une solution plus rapide et plus commode et a, par conséquent, une importance dans l'économie de la mécanique. Après des essais moins heureux d'Euler et de Segner, Poinsot a beaucoup développé ces idées et y a apporté de nouvelles simplifications, par l'emploi de son ellipsoïde et de son ellipsoïde central d'inertie.

27. — Les recherches de Huyghens sur les propriétés géométriques et mécaniques de la cycloïde sont de moindre importance. Huyghens réalisa par le pendule cycloïdal l'isochronisme des oscillations, non plus approché, mais rigoureux, pour des oscillations d'amplitude quelconque. Ce pendule est aujourd'hui sans utilité pratique. Nous ne nous occuperons donc pas davantage de ces études, quelle que soit d'ailleurs leur beauté géométrique.

Quelque grands que soient les mérites de Huyghens dans les théories physiques les plus différentes, dans l'art de l'horloger, dans la dioptrique pratique et surtout dans la mécanique, son *chef-d'œuvre*, celui qui demanda la plus grande énergie intellectuelle et qui eut aussi les conséquences les plus importantes, reste l'énoncé du principe par lequel il résolut le problème du centre d'oscillation. Ce fut justement ce principe qui ne fut pas apprécié à sa valeur par les vues peu perspicaces de ses contemporains et même encore longtemps après. Nous avons montré qu'il est équivalent au principe de la force vive et nous pensons l'avoir ainsi présenté sous son véritable jour.

28. — Il est impossible de parler ici des importants travaux de Huyghens dans le domaine de la physique. Nous en citerons seulement quelques-uns. Il est le créateur de la théorie vibratoire de la lumière, qui l'a enfin emporté sur la théorie newtonienne de l'émission. Son at-

tention se tourna vers les côtés des phénomènes lumineux qui avaient échappé à Newton. En physique, il fut un ardent partisan de l'idée cartésienne du mécanisme universel, sans pourtant fermer les yeux sur ses défauts qu'il critiqua plus d'une fois d'une façon catégorique et rigoureuse. Ses préférences pour les explications purement mécaniques firent de lui un adversaire des actions à distance affirmées par l'école de Newton ; il les remplaçait volontiers par des pressions et des chocs, c'est-à-dire par des actions au contact. Dans cette controverse il émit certaines idées nouvelles, comme celle d'un flux magnétique, qui resta sans écho à cause de la grande influence de Newton, mais qui, grâce à l'impartialité de Faraday et de Maxwell, a été dans ces derniers temps apprécié à sa valeur. Huyghens fut en outre un grand géomètre et un grand mathématicien et, dans est ordre d'idées, il est nécessaire de citer sa théorie des jeux de hasard. Ses observations astronomiques et ses travaux dans la dioptrique théorique et pratique ont fait avancer considérablement ces sciences. Comme technicien, il est l'inventeur d'une machine à poudre dont l'idée a été pratiquement réalisée dans nos moteurs à gaz modernes. En physiologie, il pressentit la théorie de l'accommodation par déformation du cristallin. Tout cela peut à peine être indiqué ici. Le génie de Huyghens se révèle davantage à mesure que ses travaux viennent successivement au jour, dans la collection de ses œuvres complètes (1). Dans une courte notice, imprégnée d'une pieuse vénération, J. Bosscha a donné un aperçu de l'ensemble de ses travaux (cf. J. Bosscha : *Christian Huyghens* ; *Discours prononcé au* 200e *anniversaire de sa mort*, 1895).

(1) Christian Huyghens. — *Œuvres complètes*, publiées par la société hollandaise des sciences, Haarlem, 1888.

NOTE V

SUR LES ORIGINES DE LA STATIQUE

L'histoire de la *Statique* vient d'être complètement renouvelée par P. Duhem dans l'ouvrage qu'il vient de publier sur les origines de la *Statique*.

Nous croyons devoir reproduire la préface de cet important ouvrage.

Avant d'entreprendre l'étude des origines de la *Statique*, nous avions lu les écrits, peu nombreux, qui traitent de l'histoire de cette science ; il nous avait été facile de reconnaître qu'ils étaient, la plupart du temps, bien sommaires et bien peu détaillés ; mais nous n'avions aucune raison de supposer qu'ils ne fussent pas exacts, au moins dans les grandes lignes. En reprenant donc l'étude des textes qu'ils mentionnaient, nous prévoyions qu'il nous faudrait ajouter ou modifier bien des détails, mais rien ne nous laissait soupçonner que l'ensemble même de l'histoire de la *Statique* pût être bouleversé par nos recherches.

Ces recherches nous avaient amené, de prime abord, à quelques remarques imprévues ; elles nous avaient prouvé que l'œuvre de Léonard de Vinci, si riche en idées mécaniques nouvelles, n'était point, comme on le supposait communément, demeurée inconnue des géomètres de la Renaissance ; qu'elle avait été exploitée par maint savant du XVIe siècle, en particulier par Cardan et par Benedetti ; qu'elle avait fourni à Cardan ses vues si profondes sur la puissance motrice des machines et sur l'impossibilité du mouvement perpétuel. Mais, à partir de Léonard et de Cardan jusqu'à Descartes et à Torricelli, nous avions pu suivre le développement de la *Statique* sans que la marche de ce développement nous eût semblé essentiellement différente de celle qu'on lui attribuait communément.

Nous avions commencé à retracer ce développement en les pages hospitalières de la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES, lorsque la lecture de Tartaglia, dont aucune histoire de la *Statique* ne prononce

même le nom, vint inopinément nous montrer que l'œuvre déjà amorcée devait être reprise sur un plan entièrement nouveau.

Tartaglia, en effet, bien avant Stevin et Galilée, avait déterminé la pesanteur apparente d'un corps posé sur un plan incliné ; il avait très correctement tiré cette loi du principe dont Descartes devait plus tard affirmer l'entière généralité. Mais cette belle découverte, dont aucun historien de la Mécanique ne faisait mention, n'était pas le fait de Tartaglia ; elle était, dans son œuvre, un impudent plagiat ; Ferrari le lui reprochait durement et revendiquait cette invention pour un géomètre du XIII[e] siècle, pour Jordanus Nemorarius.

Deux traités avaient été publiés, au XVI[e] siècle, comme réprésentant la *Statique* de Jordanus ; mais ces deux traités étaient si différents, ils se contredisaient parfois si formellement, qu'ils ne pouvaient être l'œuvre d'un même auteur. Si nous voulions connaître exactement ce que la Mécanique devait à Jordanus et à ses disciples, il nous fallait recourir aux sources contemporaines, aux manuscrits.

Force nous fut donc de dépouiller tous les manuscrits relatifs à la *Statique* que nous avons pu découvrir à la Bibliothèque Nationale et à la Bibliothèque Mazarine. Ce dépouillement laborieux, pour lequel M. E. Bouvy, Bibliothécaire de l'Université de Bordeaux, voulut bien nous aider de ses conseils très compétents, nous a conduit à une conséquence absolument imprévue.

Non seulement le moyen âge occidental avait reçu, soit directement, soit par l'intermédiaire des Arabes, la tradition de certaines théories helléniques relatives au levier et à la balance romaine, mais encore sa propre activité intellectuelle avait engendré une *Statique* autonome, insoupçonnée de l'Antiquité. Dès le début du XIII[e] siècle, peut-être même avant ce temps, Jordanus de Nemore avait démontré la loi du levier en partant de ce postulat : Il faut même puissance pour élever des poids différents, lorsque les poids sont en raison inverse des hauteurs qu'ils franchissent.

L'idée dont le premier germe se trouvait dans le traité de Jordanus avait grandi, suivant un développement continu, au travers des écrits des disciples de Jordanus, de Léonard de Vinci, de Cardan, de Roberval, de Descartes, de Wallis, pour atteindre sa forme achevée dans la lettre de Jean Bernoulli à Varignon, dans la *Mécanique Analytique* de Lagrange, dans l'œuvre de Willard Gibbs. La Science dont nous sommes aujourd'hui si légitimement fiers dérivait, par une évolution dont il nous était donné de marquer les phases graduelles, de la Science qui naquit vers l'an 1200.

Ce n'est point seulement par les doctrines de l'École de Jordanus que la Mécanique du moyen âge a contribué à la formation de la

Mécanique Moderne. Au milieu du xive siècle, l'un des docteurs qui honoraient le plus la brillante École nominaliste de la Sorbonne, Albert de Saxe, inaugurait une théorie du centre de gravité qui devait avoir la plus grande vogue et la plus durable influence. Impudemment plagiée au xve siècle et au xvie siècle par une foule de géomètres et de physiciens qui la reproduisaient sans en nommer l'auteur, cette théorie florissait encore en plein xviie siècle ; à qui l'ignore, plus d'une controverse scientifique, ardemment débattue à cette époque, demeure incompréhensible. De cette théorie d'Albert de Saxe est issu, par une filiation qui n'a point subi d'interruption, le principe de *Statique* énoncé par Torricelli.

L'étude des origines de la *Statique* nous a conduit ainsi à une conclusion ; au fur et à mesure que nous avons poussé nos recherches historiques plus avant et en des directions plus variées, cette conclusion s'est imposée à notre esprit avec une force croissante ; aussi oserons-nous la formuler dans sa pleine généralité : La science mécanique et physique dont s'enorgueillissent à bon droit les temps modernes découle, par une suite ininterrompue de perfectionnements à peine sensibles, des doctrines professées au sein des écoles du moyen âge ; les prétendues révolutions intellectuelles n'ont été, le plus souvent, que des évolutions lentes et longuement préparées ; les soi-disant renaissances que des réactions fréquemment injustes et stériles ; le respect de la tradition est une condition essentielle du progrès scientifique.

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE III

LES ÉCOLES D'ATHÈNES ET DE CNIDE VERS — 420 A — 300

CHAPITRE IV

LA PREMIÈRE ÉCOLE D'ALEXANDRIE D'ENVIRON — 300 A — 30

V

.-C. A 641 APRÈS J.-C.

CHAPITRE VI

L'ÉCOLE BYZANTINE 641 A 1453

CHAPITRE VII

SYSTÈMES DE NUMÉRATION ET ARITHMÉTIQUE PRIMITIVE

SECONDE PÉRIODE

LES MATHÉMATIQUES AU MOYEN-AGE ET PENDANT LA RENAISSANCE

Cette période qui commence vers le sixième siècle peut être considérée comme prenant fin avec l'invention de la géométrie analytique et du calcul infinitésimal. Elle est essentiellement caractérisée par la création ou le développement de l'arithmétique moderne, de l'Algèbre et de la trigonométrie.

CHAPITRE VIII

LA NAISSANCE DE L'ENSEIGNEMENT DANS L'EUROPE OCCIDENTALE DE 600 A 1200

CHAPITRE IX

LES MATHÉMATIQUES CHEZ LES ARABES

CHAPITRE X

INTRODUCTION EN EUROPE DE LA SCIENCE ARABE ENVIRON 1150-1450

CHAPITRE XI

DÉVELOPPEMENT DE L'ARITHMÉTIQUE ENVIRON 1300-1637

CHAPITRE XII

LES MATHÉMATIQUES PENDANT LA RENAISSANCE, ENVIRON 1450-1637

CHAPITRE XIII

FIN DE LA RENAISSANCE, ENVIRON 1586-1637

TROISIÈME PÉRIODE

LES MATHÉMATIQUES MODERNES

Cette période commence avec l'invention de la géométrie analytique et du calcul infinitésimal. Les mathématiques sont bien plus complexes que dans les deux périodes précédentes, mais durant les dix-septième et dix-huitième siècles on peut les considérer généralement comme caractérisées par le développement de l'analyse et par ses applications aux phénomènes de la nature.

CHAPITRE XIV

L'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES MODERNES

CHAPITRE XV

HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES DE DESCARTES A HUYGENS (1635-1675) ENVIRON

NOTES

SAINT-AMAND (CHER). — IMPRIMERIE BUSSIÈRE

BRAIRIE

Théories physiques. Les
1903. . . . . 10 fr. » »
é de Physique, trad. Ed.
nt séparément. Tome I, partie I.
truments de mesure. 420 pages.
. . . . 16 fr. » »
. . . . 6 fr. » »
ue, ses Origines, Transfor-
avec portraits et fig. 5 fr. » »
ne et Chimie. 1903, grand in-8,
. . . . 15 fr. » »
tions mathématiques des
traduit par J. FITZ-PATRICK
rançaise a été revue et considéra-
au volume in-8, 352 pages. Nom-
. . . . 5 fr. » »
les nombres. 4e édition, nou-
900 pages. . . . . 40 fr. » »
mployées pour résoudre les
ssion fac-similé. 1903. 5 fr. » »
nématique théorique, avec
ERAT. Grand in-8, 500 pages.
. . . . 15 fr. » »
l'intégration des équations
nd ordre. 2 volumes grand in-8,
. . . . 18 fr. » »
cal Papers, published by
à la précédente. 1903. 20 fr. » »
Physique et ses applica-
ago à l'occasion du Centenaire de la
ORVISY. 1903. . . 3 fr. 50
ssées au Collège de France,
ricité, Histoire et théorie.
es, grand in-8. 1903. 15 fr. » »
essées au Collège de France
t les équations de l'hydro-
figures. 1903 . . . 18 fr. » »
a Mécanique, in-8, 350 pages
. . . . 5 fr. » »
ur la puissance motrice du
l'édition de 1824). . . 5 fr. » »
à la Théorie des fonctions
mes. Tome I . . . . 14 fr. » »
posé historique et critique
la 4e édit. par Ed. BERTRAND
D). 500 pages avec figures et
. . . . 15 fr. » »
plètes, réunies et analysées par
. . . . 15 fr. » »
trad. Barthélemy SAINT-
. . . . 20 fr. » »



IRE

TIQUES

BALL

llège (Cambridge)

te et augmentée

édition anglaise

ND

seau

XIÈME

tions de

SSUS

auréat de l'Institut

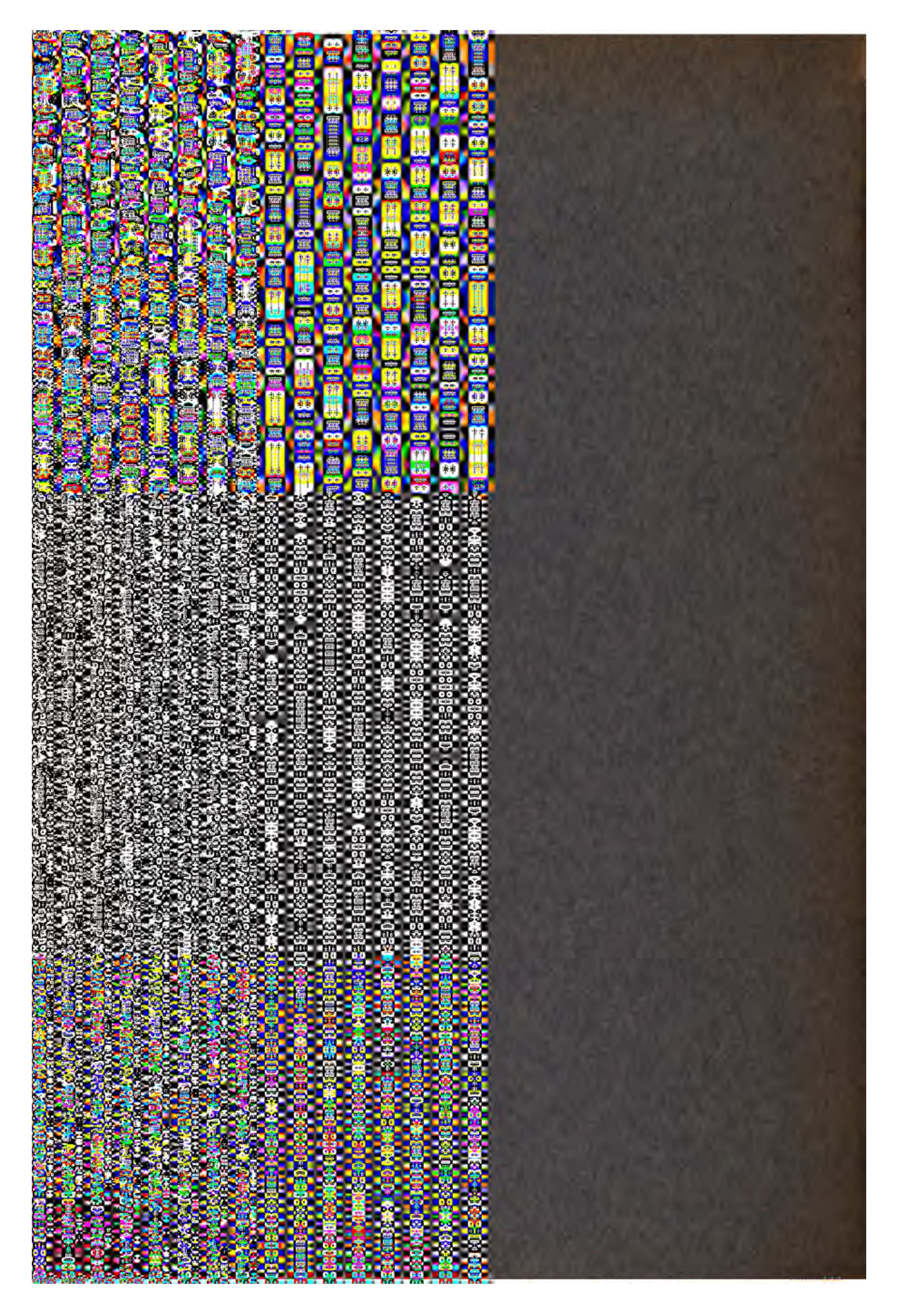
NES DEPUIS NEWTON

COMPLÉMENTAIRE DE

E A. HERMANN

LE ROI DE SUÈDE

RBONNE, 6



HISTOIRE

DES

MATHÉMATIQUES

Gand, a 11 nov[bre] '08
George Sarton

HISTOIRE

DES

MATHÉMATIQUES

PAR

W.-W. ROUSE BALL

Fellow and Tutor of Trinity College (Cambridge)

Edition française revue et augmentée

Traduite sur la troisième édition anglaise

PAR

L. FREUND

Lieutenant de vaisseau

TOME DEUXIÈME

Avec des Additions de

R. de MONTESSUS

Docteur ès-sciences mathématiques, Lauréat de l'Institut

LES MATHÉMATIQUES MODERNES DEPUIS NEWTON JUSQU'A NOS JOURS. — NOTE COMPLÉMENTAIRE DE M. G. DARBOUX.

PARIS

LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE A. HERMANN

ÉDITEUR, LIBRAIRE DE S. M. LE ROI DE SUÈDE

6, RUE DE LA SORBONNE, 6

1907

AVANT-PROPOS

Ce deuxième volume diffère du premier par la nature des additions et la manière dont elles ont été introduites dans l'ouvrage.

M. Freund avait bien voulu ajouter à la fin du tome I quelques notes complémentaires.

M. de Montessus connu par ses beaux travaux mathématiques, a bien voulu se charger d'enrichir le second volume de notes intéressantes, qui seront certainement appréciées par le lecteur.

A l'encontre de ce qui avait été fait par M. Freund pour le premier volume et par M. G. Loria pour l'édition italienne de cet ouvrage, les notes de M. de Montessus ont été intercalées dans le texte. Des astérisques les mettent en évidence.

Ces notes se rapportent surtout aux mathématiciens décédés. Si parfois M. de Montessus parle des mathématiciens vivants, c'est seulement pour faire connaître les développements qu'ils ont apportés à l'œuvre de leurs devanciers.

A. HERMANN.

HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

CHAPITRE XVI

—

LA VIE ET LES TRAVAUX D'ISAAC NEWTON (1)

Aux savants dont il a été question dans le dernier chapitre, revient l'honneur d'avoir posé les fondements des mathématiques modernes.

Homme d'un extraordinaire génie, Newton parvint en quelques années à perfectionner considérablement les méthodes inventées par ses devanciers, à en créer de nouvelles, et à faire progresser chacune des branches des mathématiques étudiées de son temps.

Contemporain et ami de Wallis, d'Huyghens et de plusieurs autres savants mentionnés dans le chapitre précédent, il fit la plupart de ses découvertes entre les années 1665 et 1686 mais ne les publia dans leur ensemble — tout au moins sous forme de livre — que postérieurement à cette dernière date.

Ses écrits eurent pendant un siècle l'influence la plus considé-

(1) La vie et les œuvres de NEWTON sont exposées dans l'ouvrage *The memoirs of Newton* de D. BREWSTER (Edimbourg, 1860, 2 vol). Une édition en 5 volumes des Œuvres de NEWTON a été publiée par S. HORSLEY (Londres, 1779-85); G. J. GRAY en fait le résumé bibliographique (Cambridge 1888). Voir aussi le catalogue de la collection Portsmouth des écrits de *Newton* (Cambridge, 1888). On peut encore consulter l'ouvrage de W. ROUSE BALL *Essay on the genesis, contents and history of Newton's Principia* (Londres, 1893).

2nd and rev. ed. 4to pp. 81 Macmillan 1908 5/

[illegible] tant sur le continent qu'en
[illegible] nous lui donnerons une place
[illegible] us étudierons son œuvre avec
[illegible]

[illegible] lnshire, près de Grantham,
[illegible] ensington, village aujourd'hui
[illegible] 27. Il fit ses études à Cam-
[illegible] à 1669 et y professa de 1669
[illegible] ode la totalité de ses travaux
[illegible] rtir de 1688 l'Université de
[illegible] anciens élèves, Charles Mon-
[illegible] mer en 1695, inspecteur de la
[illegible] 1699, ce qui était une charge
[illegible] nnée il devint associé corres-
[illegible] de Paris. En 1703, la Société
[illegible] dent. Newton vécut à Londres
[illegible]

[illegible] car il était né avant terme,
[illegible] sa naissance, se remaria lors-
[illegible] le confia à sa grand'mère.
[illegible] er la ferme que son père lui

[illegible] année, on l'envoya à l'école à
[illegible] s dispositions marquées pour
[illegible] tion de ses maîtres.

[illegible] récoce dont il faisait preuve,
[illegible] ne horloge hydraulique, mar-
[illegible] ur son temps.

[illegible] ernelle où il devait apprendre
[illegible] de la famille, à gérer ses
[illegible] les le portant bien plus à
[illegible] expériences de physique, à
[illegible] 'à s'occuper des travaux des
[illegible] nation de l'envoyer, sur le

conseil de l'un de ses oncles, poursuivre ses études au Trinity-College, à Cambridge.

Newton entra donc en 1661 au Trinity-College et, là, il se sentit enfin dans un milieu favorable au développement de ses facultés. Cependant, comme il avait peu de goût pour la société et pour toute occupation ne se rattachant pas aux études scientifiques, il redoutait la turbulence de ses camarades et s'en plaignait à ses amis.

Il a tenu, fort heureusement, un journal de ses occupations et nous pouvons ainsi nous faire une idée exacte du haut enseignement donné à cette époque dans les universités anglaises.

Avant son arrivé à Cambridge, il n'avait lu aucun ouvrage de mathématiques ; mais il connaissait la « Logic » de Sanderson, qui servait alors d'introduction ordinaire à l'étude des sciences exactes. Au commencement de son premier semestre, en octobre, il lui arriva de se rendre en flânant à la foire de Stourbridge et d'y trouver un traité d'astrologie, qu'il ne put comprendre, car il ne connaissait ni la géométrie, ni la trigonométrie. Il eut ainsi l'idée de se procurer un Euclide et constata avec surprise que les propositions de cet ouvrage lui paraissaient presque évidentes. Il lut ensuite le *Clavis* d'Oughtred et la *Géométrie* de Descartes, mais il paraît qu'il eut quelque difficulté à comprendre ce dernier ouvrage.

Le plaisir qu'il ressentit en venant à bout de ces premières études le confirma dans son intention de se consacrer à l'étude des mathématiques et il passa à l'*Optique* de Képler, aux œuvres de Viète, aux *Miscellanea* de Van Schooten, et à l'*Arithmetica Infinitorum* de Wallis. Entre temps, il suivait à l'Université les cours de Barrow.

Relisant plus tard Euclide avec attention, il se fit une haute idée de cet ouvrage d'enseignement et il lui arrivait d'exprimer ses regrets de ne s'être pas adonné à l'étude de la géométrie avant d'aborder l'analyse algébrique.

Il existe un manuscrit du journal de Newton, daté du 28 mai 1665, année où il prit le grade de bachelier-ès-arts ; c'est le plus ancien des documents tendant à prouver qu'il inventa le calcul des fluxions. C'est à peu près à la même époque qu'il découvrit le *Théorème du binôme* (1).

(1) Voir plus loin.

Par suite d'une épidémie, le collége fut fermé pendant une partie des années 1665 et 1666 et, à cette époque, Newton passa plusieurs mois dans sa famille. Ce fut une période de brillantes découvertes.

C'est alors qu'il eut la conception des principes fondamentaux de la gravitation, découverte qui eût suffi à l'immortaliser, et qu'il perfectionna sa méthode des fluxions; dans un manuscrit daté du 16 novembre 1665, il employait les fluxions à la détermination de la tangente et du rayon de courbure en un point quelconque d'une courbe et, en octobre 1665 il les appliquait à plusieurs problèmes relatifs à la théorie des équations. Newton communiqua ces résultats à ses amis et à ses élèves dès l'année 1669; il y revint plus tard, mais il ne les imprima que plusieurs années après.

A la même époque, il imagina des instruments capables de polir des lentilles ayant des formes spéciales autres que la forme sphérique ; et peut-être même commença-t-il alors ses études célèbres sur la décomposition de la lumière solaire.

La plus grande de ses découvertes est la loi de la gravitation universelle.

* La loi de la gravitation universelle s'exprime par la formule

$$f = C\frac{mm_1}{r^2}$$

où C est un coefficient constant; m, m_1 sont les masses des deux corps, r leur distance, f la force attractive qu'ils exercent l'un sur l'autre. Il est vraisemblable que Newton ne connut pas de façon bien approchée la valeur de C. Le calcul de C suppose en effet la connaissance du rayon et de la densité moyenne de la Terre, nombres que ne connaissait pas Newton. C'est à peu de chose près la quinze-millionième partie du milligramme. En d'autres termes, deux masses égales à un gramme placées à 1 centimètre l'une de l'autre s'attirent mutuellement avec une force qui est environ la quinze-millionième partie seulement d'un milligramme. *

Laissons de côté les détails et ne prenons que les chiffres ronds, il semble bien que son raisonnement pour arriver au principe de la

gravitation était le suivant. *Il supposait que la force qui retient la lune dans son orbite était la même que la gravité terrestre.* Voici comment il procédait pour vérifier cette hypothèse. Il savait qu'une pierre abandonnée à elle-même, dans le voisinage de la surface de la terre, parcourt sous l'influence de l'attraction terrestre, (c'est-à-dire de son poids) une distance de 10 pieds par seconde. L'orbite lunaire est sensiblement un cercle dont la terre est le centre. En la considérant comme telle, il pouvait calculer la longueur du chemin parcouru par la lune, connaissant sa distance à la terre ; sachant aussi que la lune décrit son orbite dans l'espace d'un mois, il lui était facile de déterminer la vitesse de cet astre en un point quelconque de sa course, tel que M. Il pouvait alors calculer la longueur MT du chemin parcouru dans l'espace d'une seconde par la lune supposée soustraite à l'influence de l'attraction terrestre. Or, à la fin de cette seconde, sa position réelle étant M', il en résultait que, dans l'espace d'une seconde, l'attraction terrestre déplaçait la lune de la distance TM' (en supposant constante la direction suivant laquelle agissait la terre). Newton, qui partageait les idées de plusieurs physiciens de l'époque, admettait, d'après la 3e loi de Képler, que l'attraction exercée par la terre sur un corps devait décroître à mesure que le corps s'éloignait, et qu'elle variait en raison inverse du carré de la distance au centre de la terre ([1]). Si donc cette loi était vraie et si la gravitation était la seule force faisant décrire à la lune son orbite, le rapport de la distance TM' à 10 pieds devait être égal à l'inverse du rapport existant entre le carré de la distance de la lune au centre de la terre et le carré du rayon de la terre. En 1679, lorsque Newton reprit ses recherches, il trouva pour la longueur de la distance TM' une valeur en concordance avec l'hypothèse d'où il était parti, et la vérification était dès lors complète. Mais en 1666, l'estimation usuelle de la distance à la lune n'était pas exacte, et

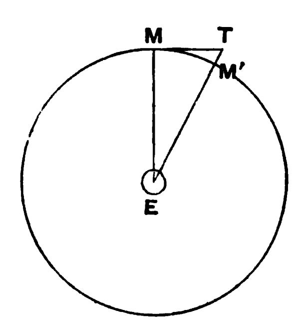


Fig. 1.

([1]) Nous donnerons plus loin, le raisonnement conduisant à ce résultat.

lorsqu'il fit ses calculs, il trouva que la valeur de TM' était moindre d'environ $\frac{1}{8}$ que celle qu'il aurait dû obtenir.

Cette différence ne paraît guère avoir changé la conviction où il était que l'effet de la gravité s'étendait jusqu'à la lune et qu'elle agissait en raison inverse du carré de la distance ; mais suivant les notes laissées par Whiston, et relatives à une conversation qu'il eut avec Newton, il semblerait qu'il en ait conclu que d'autres forces — probablement les tourbillons de Descartes — faisaient sentir leur action sur la lune en même temps que la gravité. Ce fait est confirmé par le récit que nous a laissé Pemberton des recherches de Newton. Il semble d'ailleurs que Newton croyait déjà d'une façon absolue, à la vérité du principe de la gravitation universelle, c'est-à-dire que tous les points de la matière s'attirent mutuellement, et qu'il soupçonnait que cette attraction était directement proportionnelle au produit des masses des points en présence, et inversement proportionnelle au carré de leur distance ; mais il est certain qu'il ne se rendait pas compte alors de ce que pouvait être l'attraction d'une masse sphérique sur un point extérieur quelconque, et vraisemblablement il ne pensait pas qu'un point matériel était attiré par la terre comme si toute la masse de cette dernière était concentrée en son centre.

* C'est le propre des grands hommes d'être défigurés par leurs admirateurs. Aristote l'a été par les diseurs de bonne aventure du moyen-âge et Newton par les physiciens qui ont imaginé l' « *actio in distans* ».

Newton avait découvert que les mouvements des corps célestes et la chute des corps à la surface de la Terre avaient lieu *comme si* tous les corps s'attiraient mutuellement avec une force exprimée par la formule

$$f = C \frac{mm_1}{r^2}.$$

Il ne chercha pas à déterminer les causes de l'existence de cette force ; son assertion *hypotheses non fingo*, le prouve.

Côtes, élève de Newton, employa le premier le mot malheureux d'« *actio in distans* » dans la préface de la deuxième édition des

Principes (Cf. infra) que Newton ne lut point avant son impression ; dès lors, l'*action à distance*, bien qu'inexplicable, fut admise par les physiciens comme une réalité, jusqu'au jour où Faraday, revènant à l'idée propre de Newton, montra, qu'en vertu de l'impossibilité d'admettre qu'un corps puisse produire une force dans un endroit où il ne se trouve pas, la loi de la gravitation devait être regardée comme purement *descriptive*. *

A son retour à Cambridge en 1667, Newton fut agrégé au collége et y résida alors de façon permanente. Au commencement de l'année 1669, ou peut être en 1668, il fit pour Barrow une révision des cours de ce professeur. On sait que Newton a écrit la fin de la quatorzième leçon, mais il n'est pas possible aujourd'hui de déterminer ce qui lui revient en propre dans les autres. Aussitôt ce travail terminé, Barrow et Collins l'engagèrent à préparer avec des notes additionnelles une traduction de l'*Algèbre* de Kinckhuysen ; il y consentit, mais à la condition de garder l'anonymat. Il commença aussi, en 1670, un exposé systématique de son analyse par les séries infinies. Il voulait donner l'expression de l'ordonnée d'une courbe au moyen d'une série algébrique infinie dont chaque terme pouvait s'intégrer par la règle de Wallis ; il avait communiqué dès 1669, les résultats auxquels il était arrivé à Barrow, à Collins et à d'autres. Ce travail ne fut jamais terminé : l'ouvrage incomplet a été publié en 1711 ; mais dès 1704, il avait été donné en substance, comme appendice, à son « *Optique* ». C'est pendant ses heures de loisirs que Newton produisait ses travaux ; la majeure partie de son temps, durant ces deux années, était consacrée à des recherches sur l'Optique.

Au mois d'octobre 1669, Barrow abandonna en faveur de Newton la chaire « *Lucasian* », dont il était titulaire au Trinity College. Désormais, Newton entrait dans la carrière du professorat. Pendant de longues années, il devait faire à ses auditeurs un cours semestriel d'une leçon par semaine, durant une demi-heure ou une heure à peu près.

Son cours comprenait 9 ou 10 leçons commençant chacune à l'endroit où s'était arrêtée la précédente.

Il dictait probablement de telle sorte que ses auditeurs puissent

aisément prendre les notes nécessaires, car jamais il ne reprenait les sujets déjà traités. Chaque semaine, il consacrait 4 heures aux étudiants désireux de discuter avec lui.

On a conservé les manuscrit des cours qu'il professa pendant les 17 premières années de sa carrière.

Lorsque Newton fut agréé à la chaire *Lucasian*, il prit l'optique comme sujet de ses leçons et de ses recherches, et se borna à enseigner cette branche de la physique pendant les années 1669, 1670 et 1671. Dès avant 1669, il avait découvert que le prisme décomposait la lumière blanche en rayons de différentes couleurs. Il tira de ce phénomène une théorie remarquable de l'arc-en-ciel.

Les principaux résultats, inconnus jusqu'alors, auxquels il parvint, ont été exposés dans un mémoire communiqué en février 1672 à la Société Royale et furent publiés, par la suite, dans les « *Philosophical Transactions* ». Le manuscrit de ses leçons originales a été publié en 1729 sous le titre *Lectiones Opticæ*. Cet ouvrage est divisé en deux livres dont le premier comprend quatre sections et le second cinq. Dans la première section du premier livre, il expose le phénomène de la décomposition de la lumière solaire au moyen d'un prisme, comme conséquence de l'inégale réfrangibilité des rayons qui la composent, et il fait la description de ses expériences. La deuxième section contient l'exposition de la méthode qu'il avait imaginée pour déterminer les indices de réfraction des différents corps. Il y arrive en faisant passer un rayon à travers un prisme constitué par la substance dont il cherche l'indice, de telle sorte que la déviation soit minimum ; il démontre qu'en désignant par i l'angle du prisme et par δ la déviation du rayon, l'indice de réfraction est donné par l'expression

$$\sin \frac{1}{2} (i + \delta) \operatorname{cosec} \frac{1}{2} i.$$

La troisième section traite des réfractions produites par les surfaces planes ; il montre que si un rayon traverse un prisme avec le minimum de déviation, l'angle d'incidence est égal à l'angle de sortie ; presque toute cette partie est consacrée à des solutions géométriques de différents problèmes. La quatrième section contient la discussion de la réfraction sur les surfaces courbes.

Le second livre expose sa théorie des couleurs et de l'arc-en-ciel.

Un curieux concours de circonstances fit que Newton ne parvint pas à corriger l'aberration chromatique de deux couleurs au moyen d'un couple de prismes. Il abandonna dès lors l'espoir d'imaginer un télescope à réfraction qui aurait été achromatique ; pour le remplacer, il proposa un télescope réflecteur, probablement d'après le modèle de celui qu'il avait déjà construit en 1668, mais de dimensions moindres. Il lui donna la forme bien connue de l'instrument qui porte son nom, et dont l'idée lui avait été naturellement suggérée par le télescope de Grégory. En 1672, il inventa un microscope réflecteur, et, quelques années plus tard, le sextant qui fut découvert à nouveau en 1731 par J. Hadley.

De 1673 à 1683, son cours eut pour objet l'algèbre et la théorie des équations, nous en parlons plus loin ; mais durant ces quelques années, une grande partie de son temps fut consacrée à d'autres recherches. Nous devons faire remarquer que Newton s'est occupé pendant son existence, au moins autant de chimie et de théologie que de mathématiques, mais ses travaux sur ces sujets ne présentent pas suffisamment d'intérêt pour être étudiés ici. Sa théorie des couleurs et les conséquences qu'il tirait de ses expériences en optique furent attaquées avec une grande violence par Pardies en France, Linus et Lucas à Liège, Hooke en Angleterre et Huyghens à Paris ; mais ses adversaires furent finalement confondus. La correspondance que Newton entretint à ce sujet occupa à peu près tous ses loisirs de 1672 à 1675, et lui fut extrêmement pénible. Dans une de ses lettres en date du 9 décembre 1675, il s'exprime ainsi : « J'ai été tellement tourmenté avec les discussions relatives à ma théorie de la lumière que je me suis durement reproché d'avoir commis l'imprudence d'abandonner un bien aussi grand que le repos pour courir après une ombre. » Il écrivait encore le 18 novembre 1676 : « Je vois que je me suis rendu l'esclave de la physique, mais si je parviens à en finir avec le travail de H. Linus, je me propose résolument de lui dire un éternel adieu. Si je la cultive, ce sera pour mon propre plaisir ou dans le dessein que mes découvertes ne paraissent qu'après ma mort ; car je crois qu'un homme doit se résoudre à ne rien publier de ses idées nouvelles ou à se résigner à devenir esclave en les défendant. » Un des traits

distinctifs du caractère de Newton était la répugnance déraisonnable qu'il éprouvait à voir ses conclusions mises en doute, ou à se trouver engagé dans une correspondance à leur sujet.

Une question qui intéressait profondément Newton était de savoir comment les effets de la lumière se produisaient réellement et vers la fin de 1675 il avait mis en avant la théorie corpusculaire ou de l'émission — théorie à laquelle il avait été probablement conduit par ses recherches sur le problème de l'attraction. On a expliqué de trois manières différentes la production de la lumière : Les uns (tels que les philosophes grecs) admettaient que l'œil émet quelque chose qui sent l'objet, si on peut ainsi parler ; d'autres, ce sont les partisans de la théorie de l'émission, pensaient que l'objet perçu envoie quelque chose qui frappe ou qui affecte l'œil ; d'autres enfin comme Hooke et Huyghens croyaient qu'il existe entre l'œil et l'objet un certain milieu, et que l'objet peut provoquer dans la forme ou la manière d'être de ce milieu des changements qui impressionnent l'œil, et qu'ils ont nommés ondulations. Il nous suffira de dire ici que les mathématiciens des XVIIe et XVIIIe siècles ont dû expliquer, tant avec l'une qu'avec l'autre de ces deux dernières théories, les phénomènes de l'optique géométrique, tels que la réflexion, la réfraction, etc.

Au début du XIXe siècle, les physiciens ont imaginé des expériences propres à décider en faveur de l'une des deux théories, telle la mesure de la vitesse de propagation de la lumière dans l'eau qui, d'après la théorie de l'émission devait être plus grande que dans l'air, tandis que, d'après la théorie des ondulations, elle devait être moindre.

Dans toutes ces expériences, les résultats se montrèrent conformes à ceux que prévoyait la théorie des ondulations et en désaccord avec ceux que nécessitait la théorie de l'émission.

L'hypothèse de Newton fut dès lors rejetée.

Il est juste de dire que c'est grâce aux travaux de Fresnel que la théorie des interférences parvint à prendre le pas sur la théorie de l'émission, malgré que les propriétés que les phénomènes ondulatoires supposent au milieu intermédiaire, l'éther, fussent en contradiction les unes avec les autres.

Il faut remarquer que Newton n'exprime nulle part cette opinion que la théorie de l'émission est vraie, mais qu'il la présente cons-

tamment comme une hypothèse permettant de prévoir certains faits. Bien plus, il semblerait que la théorie des ondes lui parût préférable, et qu'il ne la rejeta qu'en raison de la difficulté qu'il éprouvait à expliquer avec son concours le phénomène de la diffraction : deux siècles plus tard seulement, Fresnel devait vaincre cette difficulté.

La théorie de Newton fut exposée dans des mémoires communiqués en décembre 1675 à la Société Royale et reproduite en substance dans son *Traité d'Optique*, publié en 1704. Dans ce dernier ouvrage, il expose de façon détaillée ses théories de la réfrangibilité, de la transparence et des phénomènes lumineux que présentent les lames minces. Il y ajoute (Livre III, part. 4) une explication de la coloration des lames épaisses et (Livre II) des observations sur la diffraction.

* On peut dire que la science, comme l'histoire, est un perpétuel recommencement.

Des travaux sensationnels tendent depuis quelques années à faire revivre la théorie de l'émission.

Il semble bien avéré que tout corps, quel qu'il soit, est formé d'atomes, chargés d'électricité positive, et de corpuscules, chargés d'électricité négative, circulant autour des atomes. Les atomes ainsi définis ont été appelés *ions* et les corpuscules *électrons*.

La masse de l'électron parait être extrêmement faible ; elle ne dépasserait pas 10^{-27} gramme ; ses dimensions, 10^{-13} ou 10^{-14} centimètre, font qu'il est au centimètre ce que le centimètre est à 10 fois la distance de la Terre au Soleil. Enfin sa distance à l'atome (ion) autour duquel il circule, est évaluée à 10^{-8} centimètre.

L'atome, lui, est de dimensions relatives beaucoup plus grandes ; aussi bien, on a pu comparer l'atome et les électrons qui circulent autour de lui au système du soleil et des planètes, encore que le rapport de l'atome à l'électron (rapport d'une église de 60 mètres de long, 30 mètres de large et 15 mètres de hauteur à celui d'un des points de $\frac{1}{4}$ de millimètre de diamètre figurés dans cette page) dépasse considérablement celui du Soleil à la Terre.

Les particules lancées par la cathode d'un tube de Crookes ne seraient autres que des électrons, séparés de leurs atomes, et se

mouvant à l'énorme vitesse de 30000 kilomètres à la seconde, 100 fois plus vite que les étoiles douées du mouvement propre le plus rapide, mille fois plus vite que la Terre dans son mouvement autour du Soleil.

Il ne s'agit point là d'êtres de raison créés de toutes pièces par la théorie, car l'étude spectroscopique de l'arc voltaïque, combinée avec l'observation de l'usure des électrodes, révèle un transport effectif de matière aux dépens de ceux-ci. De plus, M. Rowland a montré que, conformément à une idée émise par M. Lorentz, les mouvements des ions peuvent être regardés comme la cause des mouvements électriques.

Voilà donc que l'incessant bombardement d'ions qui aurait lieu dans l'Univers tout entier ressuscite la théorie de l'émission ! sous une forme nouvelle et différente, il est vrai, et avec l'obligation de concilier cette notion avec celle de l'oscillation périodique qui avait échappé à Newton et dont la réalité est incontestable. Comment se fera cette conciliation ? C'est le secret de l'avenir (¹).

Deux lettres écrites par Newton en 1676 sont suffisamment intéressantes pour que nous y fassions allusion ici. Leibnitz, qui avait séjourné à Londres en 1673, avait communiqué à la Société Royale quelques résultats qu'il croyait nouveaux, mais qui, ainsi qu'on le lui fit observer, avaient déjà été établis par Newton. Ce fait donna lieu à une correspondance avec Oldenburg, le secrétaire de la Société. En 1674, Leibnitz annonça qu'il possédait « des méthodes analytiques générales reposant sur les séries infinies ». En réponse, Oldenburg lui fit connaître que Newton et Gregory avaient fait usage de séries semblables dans leurs travaux. Répondant à son tour à une demande de renseignements, Newton écrivait le 13 juin 1676 en donnant un bref exposé de sa méthode, mais en ajoutant son théorème du binôme et le développement de $\arcsin x$ en série ; de ce dernier, il déduisait celui de $\sin x$, ce qui semble être le plus ancien exemple connu d'une inversion de séries. Il donnait aussi la formule permettant d'exprimer un arc d'ellipse au moyen d'une série infinie.

Leibnitz écrivit le 27 août pour demander des détails complémen-

(¹) Pour une première étude de ces questions, voir *Science et Apologétique*, par A. de Lapparent et *les Electrons*, par Sir Olivier Lodge.

taires, et Newton, dans une longue mais intéressante réponse, datée du 24 octobre 1676 et envoyée par l'intermédiaire d'Oldenburg, exposa de quelle façon il avait été conduit à certains de ses résultats.

Dans cette lettre, Newton commençait par dire qu'il avait employé à la fois trois méthodes pour obtenir ses développements en séries. Il était parvenu à la première en étudiant la méthode d'interpolation à l'aide de laquelle Wallis avait trouvé les expressions de l'aire d'un cercle et d'une hyperbole. Ainsi, en considérant les séries correspondant aux expressions

$$(1 - x^2)^{\frac{1}{2}},\ (1 - x^2)^{\frac{2}{2}},\ (1 - x^2)^{\frac{4}{2}},\dots$$

il déduisait par interpolations la loi qui lie les coefficients successifs dans les développements de

$$(1 - x^2)^{\frac{1}{2}},\ (1 - x^2)^{\frac{3}{2}},\dots$$

et il obtenait alors, par analogie, l'expression du terme général dans le développement d'un binôme, c'est-à-dire le théorème du binôme. Il dit qu'il procéda à une vérification en formant le carré du développement de $(1 - x)^{\frac{1}{2}}$ qui se réduisit à $1 - x^2$, et il opéra de la même manière avec d'autres développements. Il vérifia ensuite le théorème pour $(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$ en extrayant, *more arithmetico*, la racine carrée de $1 - x^2$. Il employa également les séries pour déterminer les aires du cercle et de l'hyperbole en séries infinies, et il trouva que les résultats étaient les mêmes que ceux auxquels il était arrivé par une autre voie.

* Il est avéré, et c'est une constatation digne de remarque, que la plupart des mathématiciens ont découvert les propositions que leur ont été suggérées par l'examen attentif de cas particuliers aisément accessibles. C'est qu'il est bien plus aisé de généraliser un résultat acquis que d'apercevoir une proportion nouvelle, fût-elle des plus simples. Halphen reprochait même aux généralisations faciles, aux généralisations sans objet, d'encombrer inutilement la science *.

Ce résultat une fois obtenu, Newton laissa de côté la méthode d'interpolation et employa son théorème du binôme pour exprimer

(quand cela était possible) l'ordonnée d'une courbe par une série infinie ordonnée suivant les puissances croissantes de l'abscisse, et il obtint ainsi, par la méthode de Wallis, des expressions en séries infinies pour les aires et les arcs de courbes de la manière qui est décrite dans l'appendice à son *Traité d'Optique* et à son *De Analysi par Equationes Numero Terminorum Infinitas* (¹). Il signale qu'il avait employé cette seconde méthode avant les années 1665-66 et il continue en disant qu'il fut alors obligé de quitter Cambridge, et que par la suite (probablement à son retour à Cambridge) il abandonna ses premières idées : il s'était aperçu que Nicolas Mercator avait déjà fait usage de certaines d'entre elles dans son ouvrage *Logarihmotechnica*, publié en 1668 ; et il supposait que les autres avaient été ou seraient trouvées avant qu'il fût lui-même prêt à publier ses découvertes.

Newton explique ensuite qu'il était encore en possession d'une troisième méthode dont il avait (dit-il) envoyé vers 1669 un exposé à Barrow et Collins avec des exemples d'applications aux aires, à la rectification, à la cubature, etc. C'était la méthode des fluxions ; mais Newton n'en fait pas l'exposition dans cette lettre, bien qu'il ajoute quelques exemples concernant son emploi. Le premier est relatif à la quadrature de la courbe représentée par l'équation

$$y = ax^m (b + cx^n)^p$$

qui, dit-il, peut-être effectuée comme étant la somme de $\frac{m+1}{n}$ termes, si $\frac{m+1}{n}$ représente un entier positif, et qui, dans le cas contraire, ne peut pas être obtenue, si ce n'est sous la forme d'une série infinie (²). Il donne aussi une liste d'autres expressions pouvant être immédiatement intégrées et dont les principales sont :

$$\frac{x^{m-n-1}}{a + bx^n + cx^{2n}}, \quad \frac{\left(x^m + \frac{1}{2}\right)n - 1}{a + bx^n + cx^{2n}}, \quad x^{m-n-1}(a + bx^n + cx^{2n})^{\pm\frac{1}{2}}$$

$$x^{mn-1}(a + bx^n)^{\pm\frac{1}{2}}(c + d.x^n)^{-1}, x^{mn-n-1}(a + bx^n)(c + dx^n)^{-\frac{1}{2}};$$

(¹) Voir plus bas.

(²) Cela n'est pas exact, l'intégration est possible si $p + \frac{m+1}{n}$ est un entier.

m étant un nombre entier positif et *n* un nombre quelconque. Enfin, il indique que l'aire approchée d'une courbe quelconque peut être aisément déterminée ; nous décrirons la méthode d'interpolation de Newton en analysant sa *Methodus Differentialis.*

A la fin de sa lettre, Newton fait allusion à la solution du « problème inverse des tangentes » sujet sur lequel Leibnitz avait demandé des explications. Il donne des formules pour l'inversion d'une série quelconque, en ajoutant qu'indépendamment de ces formules, il possède deux méthodes pour résoudre les questions de ce genre, mais que pour le moment il ne veut s'expliquer qu'au moyen de l'anagramme que voici : « Una methodus consistit in extractione fluentis quantitatis ex æquatione simul involvente fluxionem ejus : altera tantum in assumptione seriei pro quantitate qualibet incognita ex qua cætera commode derivari possunt, et in collatione terminorum homologorum æquationis resultantis, ad eruendos terminos assumptæ seriei. »

Il fait comprendre dans cette lettre qu'il est obsédé par les questions qui lui sont posées et par les controverses qui surgissent à propos de chacune de ses productions, ce qui lui fait voir combien il a été imprudent en les publiant « quod umbram captando catenus perdideram quietem meam, rem prorsus substantialem. »

Leibnitz, dans sa réponse datée du 21 juin 1677, explique sa méthode pour tracer les tangentes aux courbes; elle procède, dit-il, « non par les fluxions des lignes mais par les différences des nombres », et il introduit sa notation dx et dy pour les différences infinitésimales entre les coordonnées de deux points consécutifs sur une courbe. Il présente aussi une solution du problème consistant à trouver une courbe dont la sous-tangente est constante, ce qui montre qu'il pouvait intégrer.

En 1679, Hooke, à la requête de la Société Royale, écrivait à Newton, exprimant l'espoir qu'il ferait de nouvelles communications à la Société en lui faisant part de découvertes récentes. Newton répondit qu'il avait abandonné l'étude de la physique, mais il ajoutait que le mouvement diurne de la terre pouvait être démontré expérimentalement en observant la déviation de la verticale d'une pierre tombant d'une certaine hauteur — expérience qui fut réalisée plus tard, avec succès, par la Société

Royale. Hooke faisait mention dans sa lettre des recherches géodésiques de Picard, dans lesquelles ce dernier employait une valeur du rayon de la terre sensiblement correcte. Ce fut ce qui conduisit Newton à reprendre avec les données de Picard, ses calculs de 1666 sur l'orbite lunaire, et il vérifia ainsi son hypothèse: que l'effet de la gravité s'exerçait jusqu'à la lune et qu'elle variait en raison inverse du carré de la distance. Il passa ensuite à l'étude de la théorie générale du mouvement sous l'action de la force centripète, et il démontra :

(I) Le théorème des aires ; (II) que si une ellipse était décrite autour d'un foyer sous l'action d'une force centripète, la loi était celle de l'inverse du carré de la distance ; (III) et réciproquement, que l'orbite d'un point attiré par une telle force était une conique (ou une ellipse seulement, comme il le pensait). Obéissant à la règle qu'il s'était imposée de ne rien publier de ses recherches, dans la crainte de voir s'élever une controverse scientifique, il se contenta d'inscrire ces résultats sur ses livres de notes et il ne les publia que cinq ans plus tard à propos d'une question spéciale qui lui avait été posée.

L'*Arithmétique universelle*, qui traite de l'algèbre, de la théorie des équations et de divers problèmes, contient la substance des leçons de Newton durant les années qui s'écoulèrent de 1673 à 1683. Son manuscrit existe encore; à force d'insister, Whiston(1) obtint de Newton la permission donnée un peu à contre cœur de l'imprimer, et il fut publié en 1707. Entre autres théorèmes nouveaux sur divers points de l'algèbre et de la théorie des équations, Newton y énonce les résultats importants suivants. Il explique que l'équation dont les racines sont les solutions d'un problème donné doit avoir autant de racines qu'il y a de cas possibles différents; et il fait voir comment l'équation à laquelle un problème conduit peut avoir des racines ne satisfaisant pas à la question initiale. Il étend la règle des signes de

(1) William Whiston, né le 9 décembre 1667 dans le Leicestershire, instruit à Clare College, Cambridge, membre de ce Collège et mort à Londres le 22 août 1752, écrivit plusieurs ouvrages sur l'Astronomie. Il fut le suppléant de Newton dans la chaire Lucasian à partir de 1699, et en 1703, le remplaça comme professeur, mais il fut renvoyé en 1711, principalement pour des raisons théologiques. Il fut remplacé par Nicolas Saunderson, le mathématicien aveugle, qui naquit en 1682 dans le Yorkshire et mourut, le 19 avril 1739, à Christ College, Cambridge.

Descartes pour donner les limites du nombre des racines imaginaires. Il se sert du principe de la continuité pour expliquer comment deux racines réelles et inégales peuvent devenir imaginaires, en passant par l'égalité, et donne des exemples empruntés à la géométrie ; il montre ainsi que les racines imaginaires doivent se présenter par couples, Newton donne aussi des règles pour trouver une limite supérieure des racines positives d'une équation numérique, et pour déterminer les valeurs approchées des racines numériques. Il énonce de plus le théorème bien connu qui permet de calculer la somme des n^{es} puissances des racines d'une équation, et il pose les fondements de la théorie des fonctions symétriques des racines d'une équation.

Le théorème le plus intéressant contenu dans cet ouvrage est relatif à la tentative faite pour trouver une règle (analogue à celle de Descartes pour les racines réelles) permettant de déterminer le nombre des racines imaginaires d'une équation. Newton n'ignorait pas que le résultat auquel il était arrivé n'était pas général, mais il n'a pas fait connaître les cas où son théorème tombe en défaut. Son théorème peut se résumer comme il suit : supposons que l'équation soit du n^e degré et ordonnée par rapport aux puissances décroissantes de x (le coefficient de x^n étant positif), et supposons formées les $n + 1$ fractions

$$1, \frac{n}{n-1}\frac{2}{1}, \frac{n-1}{n-2}\frac{3}{2}, \ldots, \frac{n-p+1}{n-p}\frac{p+1}{p}, \ldots, \frac{2}{1}\frac{n}{n-1}, 1\,;$$

écrivons les sous les termes correspondants de l'équation ; alors, si le carré d'un terme quelconque multiplié par la fraction correspondante est plus grand que le produit des deux termes qui le comprennent, mettons le signe *plus* au-dessus de ce terme ; dans le cas contraire, mettons le signe *moins* ; plaçons enfin le signe *plus* au dessus du premier et du dernier termes ; ceci fait, considérons dans l'équation initiale deux termes consécutifs et les deux symboles correspondants. Il peut se présenter un des quatre cas suivants :

(α) les termes ont le même signe et les symboles le même signe ; (β) les termes ont le même signe et les symboles des signes contraires ; (γ) les termes ont des signes contraires et les sym-

boles le même signe; (δ) les termes ont des signes contraires et les symboles des signes contraires; comme on a fait voir que le nombre des racines négatives ne peut surpasser le nombre des cas (α), et que le nombre des racines positives ne peut surpasser le nombre des cas (γ), *le nombre des racines imaginaires n'est pas inférieur au nombre des cas* (β) et (δ). En d'autres termes, le nombre des changements de signes dans la rangée des symboles écrits au-dessus de l'équation est une limite inférieure du nombre des racines imaginaires. Cependant Newton s'exprimait ainsi : « vous pouvez presque savoir combien il y a de racines impossibles en comptant les changements de signes dans la série des symboles formés comme ci-dessus ». Il pensait donc qu'on pouvait généralement obtenir par sa règle, le nombre réel des racines positives, négatives et imaginaires et non simplement des limites supérieures et inférieures. Mais bien qu'il reconnut que la règle n'était pas générale, il ne put trouver (ou tout au moins il n'établit pas) quelles en étaient les exceptions : ce théorème fut étudié plus tard par Campbell, Maclaurin, Euler et d'autres auteurs; enfin en 1865, Sylvester réussit à lui donner son véritable sens.

Au mois d'août 1684, Halley vint à Cambridge afin de consulter Newton au sujet de la loi de la gravitation. Hooke, Huyghens, Halley et Wren avait tous conjecturé que la force attractive du soleil ou de la terre sur un point extérieur variait en raison inverse du carré de la distance. Ces auteurs semblent avoir montré indépendamment l'un de l'autre que, si les conclusions de Képler étaient rigoureusement exactes, ce dont ils n'étaient pas absolument certains, la loi de l'attraction devait être celle de l'inverse du carré. Leur argumentation était probablement la suivante.

Si v est la vitesse d'une planète, r le rayon de son orbite considérée comme circulaire, et T la durée de sa révolution,

$$v = \frac{2\pi r}{T}.$$

(1) Cf. les *Proceedings of the London Mathematical Society*, 1865, Vol. I. n° 2.

Mais si f est l'accélération vers le centre du cercle, nous avons $f = \frac{v^2}{r}$. Par conséquent, substituant la valeur ci-dessus v, on a :

$$f = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$$

Mais, d'après la 3e loi de Képler, T^2 varie comme r^3 ; par suite f est inversement proportionnelle à r^2.

Ils ne purent cependant déduire de la loi la forme de l'orbite des planètes. Halley expliqua que leurs recherches se trouvaient arrêtées par leur impuissance à résoudre ce problème, et il demanda à Newton s'il lui serait possible de trouver ce que pourrait être l'orbite d'une planète, si la loi de l'attraction était celle de l'inverse du carré. Newton répondit immédiatement que c'était une ellipse et promit de publier la démonstration qu'il avait trouvée en 1679. Elle fut envoyée en novembre 1684.

Poussé par Halley, Newton reprit alors le problème de la gravitation ; et avant l'automne de 1684, il avait mis sur pied les propositions 1–19, 21, 30, 32-35 du premier livre des *Principia*. Ces propositions, avec des notes sur les lois du mouvement et divers lemmes furent indiquées dans ses conférences de 1684.

En novembre Halley reçut la communication promise par Newton. Sur ces entrefaites il se rendit de nouveau à Cambridge et y vit « un curieux traité » *De motu*, préparé depuis le mois d'août », Très vraisemblablement ce Traité contenait les notes manuscrites de Newton relatives aux conférences dont il a été question ci-dessus : ces notes sont actuellement à la Bibliothèque universitaire et intitulées : « *De motu corporum* » Halley engagea fortement son ami à publier les résultats auxquels il était arrivé, et, finalement, réussit à lui arracher la promesse qu'ils seraient envoyés à la Société Royale. Ils furent donc communiqués à cette Société avant le mois de février 1685, dans le mémoire *De Motu*, qui contient la substance des propositions suivantes des *Principia*. Livre I, propositions : 1, 4, 6, 7, 10, 11, 15, 17, 32 ; Livre II, propositions 2, 3 et 4,

Il semble aussi que c'est grâce à l'influence d'Halley et au tact dont il fit preuve dans sa visite du mois de Novembre 1684, que Newton se décida à aborder le problème complet de la gravitation et s'engagea à publier ses résultats : ils sont contenus dans les *Principia*.

Jusque là Newton n'avait pas déterminé l'attraction d'un corps sphérique sur un point extérieur, pas plus qu'il n'avait calculé les détails des mouvements planétaires, même en supposant que les divers corps du système solaire pussent être assimilés à des points. Le premier problème fut résolu en 1685, probablement en janvier ou février. « Aussitôt » nous reproduisons le discours que prononça le Dr Glaisher lors de la célébration du bicentenaire de la publication des *Principia*, « aussitôt que Newton eut entrevu ce théorème admirable — et nous savons par ses propres déclarations, qu'il n'espérait nullement arriver à un si beau résultat jusqu'à l'instant où il surgit de ses recherches mathématiques, — tout le mécanisme de l'univers apparut à ses yeux. Lorsqu'il découvrait les théorèmes qui forment les trois premières sections du Livre I, comme lorsqu'il les exposait dans ses cours de 1684, il ignorait que le Soleil et la Terre exerçaient leurs attractions comme s'ils étaient de simples points. Combien ces propositions durent paraître différentes aux yeux de Newton quand il constata que les résultats auxquels il était parvenu étaient exacts, alors qu'il les croyait seulement approchés en tant que pouvant être appliqués au système solaire. Jusqu'à ce moment il ne les avait considérés comme vrais qu'autant qu'il était possible de considérer le soleil comme un point comparativement à la distance des planètes, ou la terre comme un point relativement à la distance de la lune — distance égale seulement à environ 60 fois le rayon de la terre — mais maintenant ils les savait mathématiquement exacts, en tenant compte seulement d'une faible différence provenant de la sphéricité imparfaite du Soleil, de la Terre et des Planètes. Nous pouvons imaginer combien ce passage soudain de l'approximatif à l'exact poussa Newton à entreprendre des efforts encore plus grands. Il était maintenant en son pouvoir d'appliquer l'analyse mathématique avec une absolue précision aux problèmes actuels de l'astronomie. »

Des trois principes fondamentaux appliqués dans les *Principia*, Newton avait découvert celui qui est relatif à l'attraction mutuelle des divers points matériels de l'Univers, au moins dès 1666 ; la loi des aires, ses conséquences, et le fait que si la loi de l'attraction est celle de l'inverse du carré de la distance, l'orbite que décrit un point autour d'un centre de force doit être une conique, ont été établis

en 1679; enfin, le théorème prouvant qu'une sphère dont la densité en chaque point dépend seulement de sa distance au centre, attire un point extérieur comme si la masse tout entière était concentrée en ce centre, est de 1685. Ce fut cette dernière découverte qui permit à Newton d'appliquer les deux premiers principes aux corps de dimensions finies.

La composition du premier Livre des *Principia* fut terminée avant l'été de 1685, mais les corrections et les additions prirent quelque temps et il ne fut pas présenté à la Société Royale avant le 28 Avril 1686. Ce livre est consacré à l'étude du mouvement des points ou des corps dans l'espace libre suivant des orbites connues, soit sous l'action de forces connues, soit sous l'influence de leur attraction mutuelle. Newton généralise également dans ce premier livre la loi de l'attraction et expose que dans l'univers chaque particule de la matière attire la particule voisine avec une force variant directement comme le carré de la distance qui les sépare; il en déduit la loi de l'attraction pour les enveloppes sphériques de densité constante. Le livre est précédé d'une introduction à la science de la dynamique, qui définit les limites de l'investigation mathématique. Son objet, dit-il, est d'appliquer les mathématiques aux phénomènes de la nature; parmi ces phénomènes, le mouvement est l'un des plus importants; le mouvement à son tour est l'effet de la force, et, bien qu'on ne sache pas quelle est la nature ou l'origine de la force, plusieurs de ses effets peuvent cependant être mesurés; et c'est ce qui constitue le sujet de l'ouvrage.

Le second Livre des *Principia* fut complété pendant l'été de 1686. Ce Livre traite du mouvement dans un milieu résistant, de l'hydrostatique et de l'hydrodynamique; on y trouve des applications spéciales aux ondes, aux marées et à l'acoustique. Newton montre, comme conclusion, que la théorie cartésienne des tourbillons est en désaccord à la fois avec les faits connus et avec les lois du mouvement.

Les neuf ou dix mois suivants furent consacrés au troisième Livre. Son auteur commence par examiner quand et jusqu'à quel point il est admissible de construire des hypothèses ou théories pour rendre compte des phénomènes connus. Il continue en appliquant les théorèmes obtenus dans le premier Livre aux principaux phéno-

mènes du monde solaire ; il détermine les masses et les distances des planètes, et (chaque fois qu'il a des données suffisantes) de leurs satellites. En particulier, il expose en détail le mouvement de la lune, les inégalités qu'on y constate, et la théorie des marées. Il examine aussi la théorie des comètes; il montre que ces astres appartiennent au système solaire; il explique comment l'orbite d'une comète peut être déterminée à l'aide de trois observations, et il élucide ses résultats en considérant certaines comètes particulières. Le troisième Livre tel que nous le possédons n'est qu'une esquisse de ce que Newton s'était proposé de faire; son plan initial se trouve dans la Collection des « Mémoires de Portsmouth », et ses notes montrent qu'il continua d'y travailler encore quelques années après la publication de la première édition des *Principia* :

Les plus intéressantes de ces notes sont celles où l'on trouve la démonstration géométrique des résultats que lui a donnés la méthode des fluxions.

Les démonstrations de cet ouvrage sont géométriques, mais l'absence de figures et d'explications, ce fait aussi que Newton ne fournit aucune indication sur la méthode suivie, les rend d'un accès difficile. La raison qui lui fit adopter la forme géométrique paraît être la suivante : le calcul infinitésimal était alors inconnu, et si Newton l'avait employé pour obtenir des résultats en contradiction avec les idées philosophiques dominantes à cette époque, il pouvait craindre que sur la controverse relative à leur exactitude serait venue s'en greffer une autre concernant la validité des méthodes employées. C'est pourquoi il adopta dans tous ses raisonnements la forme géométrique, et si parfois ils présentent quelque longueur, ils sont dans tous les cas intelligibles pour tous ceux qui sont versés dans les mathématiques. Il s'inspira d'une façon si étroite de la géométrie grecque qu'il employa constamment la méthode graphique, représentant les forces, les vitesses et les autres grandeurs, à la manière euclidienne, par des lignes droites (ex. Livre I. Lemme 10) et non par un certain nombre d'unités. La méthode moderne a été introduite par Wallis et elle devait être connue de Newton. De ce qu'il s'est rigoureusement enfermé dans la géométrie alors classique, il

(1) Pour une analyse complète des *Principia*, voir *Essay on the genesis, contents and history of Newton's Principia*, par W. Rouse-Ball, Londres, 1893.

résulte que les *Principia* sont écrits dans un langage archaïque et malaisément accessible.

L'adoption des méthodes géométriques dans les *Principia*, n'implique pas que Newton préférait la géométrie à l'analyse comme instrument de recherches, car il est aujourd'hui connu qu'il a employé le calcul des fluxions pour trouver quelques-uns de ses théorèmes, spécialement ceux qui figurent à la fin du Livre I et dans le livre II ; en fait, l'une des plus importantes applications de ce calcul est donnée dans le livre II, Lemme 2. Mais il n'est que juste de faire remarquer que, à l'époque de cette publication et presque un siècle après, le calcul différentiel et celui des fluxions n'étaient pas complètement développés et ne possédaient pas la supériorité qu'ils ont actuellement conquis sur la méthode géométrique. Et c'est un sujet d'étonnement de constater que lorsque Newton employait le calcul des fluxions, il savait en tirer de si grands résultats.

L'habileté dont il a fait preuve en traduisant en quelques mois des théorèmes si nombreux et d'une si grande complexité dans le langage de la géométrie d'Archimède et d'Apollonius est aussi, pensons-nous, un fait unique dans l'histoire des mathématiques.

L'impression de l'ouvrage fut lente. Il ne parut que dans l'été de l'année 1687. La dépense fut supportée intégralement par Halley, qui corrigea également les épreuves et laissa même de côté ses propres travaux pour en presser davantage la publication. La concision, l'absence de figures et le caractère synthétique de l'ouvrage limitaient le nombre de ceux qui étaient capables d'apprécier sa valeur, et bien que la validité des conclusions fût admise par presque tous les critiques compétents, il s'écoula quelque temps encore avant que les idées courantes des hommes instruits fussent complètement modifiées. Nous inclinerions à penser (mais sur ce point les opinions sont très partagées) que dix ans après sa publication, l'ouvrage fut généralement regardé en Grande-Bretagne comme donnant l'exposé véritable des lois de l'Univers ; vingt ans plus tard, environ, les théories de Newton furent acceptées sur le Continent, sauf en France où l'hypothèse cartésienne prédomina jusqu'à ce que Voltaire se fût fait, en 1738, l'avocat de la théorie newtonnienne.

Newton termina en 1686 son manuscrit des *Principia* ; il consa-

[illegible] moire sur l'optique physique,
[illegible] ion.
[illegible] nté de forcer l'université à
[illegible] prêtre catholique romain, qui
[illegible] de suprématie et de fidélité,
[illegible] s la résistance à l'intervention
[illegible] res de la députation envoyée à
[illegible] l'Université. La part active
[illegible] ire provoqua en 1689, son
[illegible] re de l'Université. Ce parlement
[illegible] solution, Newton se démit de
[illegible] en 1701, mais ne prit jamais
[illegible]

[illegible] 690, il reprit ses études ma-
[illegible] mais il est vraisemblable
[illegible] es deux lettres à Wallis, dans
[illegible] des fluxions furent écrites
[illegible] la fin de 1692 et pendant les
[illegible] fut atteint d'une longue ma-
[illegible] d'une irritabilité nerveuse gé-
[illegible] mais sa vivacité d'esprit, et bien
[illegible] la même puissance à résoudre
[illegible] proposées, il cessa d'avoir la
[illegible] scientifiques ; et il devint alors
[illegible] ez lui le désir d'aborder des
[illegible]

[illegible] ecueillir des données relatives
[illegible] la lune, dans le but de reprendre
[illegible] cette question. Dans l'intention
[illegible] tes, il envoya à Flamsteed [1],
[illegible] ction qu'il avait précédemment
[illegible] 21 quand Halley la commu-

[illegible] et mort à Greenwich en 1719, fut
[illegible] cette époque, et le premier Astronome
[illegible] e valeur sur l'Astronomie, il imagina
[illegible] cer les cartes par la projection de la
[illegible] nt, qui pouvait être ensuite développé.
[illegible] res, en 1835, mais divers récits qui

niqua à la Société Royale. Les calculs primitifs de Newton et les mémoires qui les accompagnent se trouvent dans la collection « Portsmouth »; il obtint les réfractions en déterminant au moyen de quadratures la route suivie par un rayon. Comme exemple du génie de Newton, nous pouvons faire remarquer que, jusqu'en 1754, Euler échoua dans la résolution du même problème. En 1782, Laplace donna une Règle permettant de construire une pareille table, et ses résultats concordent approximativement avec ceux de Newton. Il est probable qu'après sa maladie, et quelles que fussent les circonstances, Newton n'eût pas continué ses travaux, En 1696, il fut appelé au poste de recteur, et en 1699 nommé directeur de la monnaie, au traitement de £ 1500 par an : il cessa alors ses recherches scientifiques. Néanmoins plusieurs de ses œuvres antérieures furent publiées sous forme de livres après ces événements.

En 1696 il se rendit à Londres, en 1701 il abandonna la chaire *Lucasian*, et en 1703 il fut élu Président de la Société Royale.

En 1704, Newton publia son *Optics* qui contient les résultats des mémoires déjà mentionnés. A la première édition de l'ouvrage étaient annexés deux opuscules d'importance secondaire et n'ayant aucun rapport direct avec l'Optique : l'un traitait des cubiques et l'autre de la quadrature des courbes et des fluxions. Tous deux étaient de vieux manuscrits que ses amis et élèves connaissaient bien et que l'on publiait cependant pour la première fois.

Le premier de ces deux opuscules porte ce titre : *Enumeratio Linearum tertii ordinis* (1), il semble avoir pour objet de donner un exemple de l'emploi de la géométrie analytique ; comme l'application de cette science aux coniques était bien connue, Newton choisit la théorie des cubiques. Il commence par quelques théorèmes généraux, et classe les courbes d'après leurs équations, en algébriques et transcendantes, les premières étant coupées par une

s'y trouvent devraient être comparés avec ceux qu'on lit dans la vie de Newton de Brewster.

Flamsteed fut remplacé comme Astronome Royal par Edmond Halley (voir plus loin.

(1) Sur cet ouvrage et sa bibliographie, voir dans les *Transactions of the London Mathematical Society*, 1891. Vol. XXII, p. 104-143, un mémoire de W. Rouse-Ball.

ligne droite en un nombre de points (réels ou imaginaires) égal au degré de la courbe, les dernières étant coupées par une ligne droite en un nombre infini de points. Newton montre alors que plusieurs des propriétés les plus importantes des coniques ont leurs analogues dans la théorie des cubiques, et il discute la théorie des asymptotes et des diamètres curvilignes.

Après ces théorèmes généraux, Newton aborde l'étude détaillée des cubiques en faisant ressortir que ces courbes doivent avoir au moins un point réel à l'infini. Si l'asymptote, ou la tangente en ce point est à une distance finie, on peut la prendre pour axe des y. Cette asymptote coupera la courbe en trois points, dont deux au moins sont à l'infini. Si le 3e point est à une distance finie, alors, (d'après l'un de ses théorèmes généraux sur les asymptotes) l'équation peut se mettre sous la forme.

$$xy^2 + hy = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

où les axes des x et des y sont les asymptotes de l'hyperbole, lieu des points milieux de toutes les cordes menées parallèlement à l'axe des y. Mais si le troisième point où l'asymptote coupe la courbe est lui aussi à l'infini, l'équation peut être écrite sous la forme

$$xy = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Il prend ensuite le cas où la tangente au point réel à l'infini n'est pas à une distance finie. Une ligne parallèle à la direction de la courbe vers l'infini peut être prise pour axe des y. Une telle ligne coupera la courbe en trois points dont l'un est, par hypothèse, à l'infini et un autre nécessairement à une distance finie. Il montre alors que si le troisième point d'intersection est à distance finie, l'équation peut être écrite sous la forme :

$$y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

tandis que, s'il est à distance infinie, l'équation peut être écrite sous la forme :

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Toute cubique est par conséquent réductible à l'une des quatre formes caractéristiques précitées. Chacune des ces formes est alors examinée en détail, et la possibilité de l'existence des points doubles,

de boucles isolées, etc., est étudiée. Le résultat final est qu'une cubique peut prendre en tout 78 formes possibles. Newton en énumère seulement 72 ; parmi les six restantes, quatre furent mentionnées par Stirling en 1717, une autre par Nicole en 1731, et la dernière par Nicolas Bernoulli, à peu près à la même époque. Dans le corps de l'ouvrage, Newton énonce ce remarquable théorème que : de même que l'ombre d'un cercle projetée par un point lumineux sur un plan donne naissance à toutes les coniques, de même les ombres des courbes représentées par l'équation

$$y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

donnent naissance à toutes les cubiques. Cette proposition resta comme une énigme insoluble jusqu'en 1731 ; à cette date Nicole et Clairant en donnèrent des démonstrations. Une meilleure fut présentée par Murdoch en 1740, elle dépend de la classification de ces courbes en cinq espèces, suivant que leurs points d'intersection avec l'axe des x sont réels et distincts, réels deux d'entre eux étant confondus (deux cas), réels, et tous confondus ou deux imaginaires et un réel.

Dans cet opuscule Newton parle aussi des points doubles à distance finie et infinie, il donne la description des courbes remplissant certaines conditions spécifiées, et la solution graphique de problèmes par l'emploi des courbes.

Le second appendice à l'*Optics* est intitulé : *De Quadratura Curvarum*. Beaucoup des résultats qu'on y trouve avaient été communiqués à Barrow en 1668 ou 1665 et probablement étaient connus des élèves et amis de Newton bien avant cette date. Il comprend deux parties.

La première dans son ensemble est un exposé de la méthode qu'employa Newton pour effectuer la quadrature et la rectification des courbes par le moyen des séries infinies : il faut noter qu'on trouve là le plus ancien emploi en imprimerie d'indices littéraux et aussi la première exposition imprimée du théorème du binome ; mais ces nouveautés ne sont introduites que d'une façon incidente. Le principal objet est de donner des règles pour le développement d'une fonction de x en une série ordonnée par rapport aux puissances croissantes de x, de façon à permettre aux mathématiciens d'effectuer la quadrature de toute courbe dans laquelle l'ordonnée

y peut-être exprimée comme une fonction algébrique explicite de l'abscisse x. Wallis avait montré comment on pouvait arriver à cette quadrature lorsque y était donné par une somme d'un certain nombre de multiples de puissances de x ; les règles formulées par Newton rendent cette méthode applicable à toute courbe dont l'ordonnée peut être exprimée par la somme d'un nombre infini de pareils termes. Il effectue de cette manière la quadrature des courbes :

$$y = \frac{a^2}{b+x}, \; y = (a^2 \pm x^2)^{\frac{1}{2}}, \; y = (x - x^2)^{\frac{1}{2}}, \; y = \left(\frac{1 + ax^2}{1 - bx^2}\right)^{\frac{1}{2}};$$

naturellement les résultats sont exprimés en séries infinies. Il passe ensuite aux courbes dont l'ordonnée est une fonction implicite de l'abscisse, et il donne une méthode pour exprimer sous forme d'une série infinie procédant suivant les puissances croissantes de x ; mais l'application de la règle à une courbe quelconque exige, en général, des calculs numériques d'une telle complication qu'elle perd ici beaucoup de sa valeur. Il termine cette partie de son ouvrage en montrant que la rectification d'une courbe peut être effectuée d'une manière à peu près semblable. Son procédé est équivalent à celui qui consiste à trouver l'intégrale par rapport à x de $(1 + y'^2)^{\frac{1}{2}}$ sous la forme d'une série infinie. Nous devons ajouter que Newton fait ressortir combien il importe de déterminer si une série est convergente — observation bien avancée pour son temps — mais il n'avait pour cela aucun critérium, et en fait, ce ne fut que lorsque Gauss et Cauchy eurent entrepris l'examen de cette question, que la nécessité d'une telle restriction fut communément reconnue.

La partie de l'appendice que nous venons de décrire est pratiquement la même que dans le manuscrit de Newton : *De Analysi per Equationes numero Terminorum infinitas*, qui fut imprimé en 1711. Cet ouvrage aurait été, dit-on, composé en principe pour servir de complément à l'algèbre de Kinckhuysen, qu'il eut un moment le dessein de traduire, ainsi que nous l'avons déjà dit. Il fut communiqué en substance à Barrow, et par ce dernier à Collins, dans des lettres du 31 juillet et du 12 août 1669 ; un résumé d'une partie de ce travail fut inséré dans la lettre du 24 octobre 1676 adressée à Leibnitz.

Cet ouvrage devrait être lu parallèlement avec le suivant : *Methodus Differentialis*, qu'il publia aussi en 1711. Quelques théorèmes additionnels sont présentés dans ce dernier, et Newton y discute sa méthode d'interpolation qui avait été brièvement décrite dans la lettre du 24 octobre 1676. En voici le principe : $y = \varphi(x)$ étant une fonction de x, si l'on connaît les valeurs b_1, b_2, b_3,... de y qui correspondent à des valeurs arbitraires a_1, a_2, a_3,... de x, 1° on peut faire passer par les points (a_1, b_1) (a_2, b_2),... une parabole

$$y = p + qx + rx^2 + \dots ;$$

2° l'ordonnée de cette courbe sera une valeur approchée de l'ordonnée de la courbe primitive. Si n est le nombre des points (a, b), le degré de la parabole sera, bien entendu, $n - 1$. Newton fait observer que cette méthode permet l'évaluation approchée de l'aire d'une courbe quelconque.

La seconde partie de cet appendice à l'*Optics* contient un exposé de la méthode des fluxions. Il est bon, pour le comprendre, de lire en même temps un résumé qu'en fit Newton et que publia Jean Colson en 1736.

Le calcul des fluxions et le calcul infinitésimal, tel que nous le connaissons, sont identiques à part les notations.

Newton admettait que toutes les grandeurs géométriques peuvent être considérées comme engendrées par le mouvement continu : ainsi une ligne peut être envisagée comme engendrée par le mouvement d'un point, une surface par celui d'une ligne, un solide par celui d'une surface, un angle plan par la rotation d'une ligne, et ainsi de suite. Il définissait la quantité ainsi engendrée « la fluente » ou « la quantité fluente ». La vitesse de la grandeur en mouvement était définie comme « la fluxion de la fluente ». Il semble que l'on trouve là, pour la première fois, l'idée de fonction continue, bien qu'on en puisse reconnaître des traces dans quelques-uns des mémoires de Napier (ou Néper).

Newton aborde le sujet comme il suit. Il y a deux sortes de problèmes ; l'objet du premier est de trouver la fluxion d'une quantité donnée, ou plus généralement « la relation des fluentes étant donnée » il s'agit de trouver « la relation qui lie leurs fluxions. »

Ceci est équivalent à la différentiation. L'objet du second, ou méthode inverse des fluxions, est de déterminer la fluente en par-

tant de la fluxion ou de quelque relation la comprenant, ou plus généralement « étant donnée une équation montrant la relation des fluxions de certaines quantités, trouver les rélations liant entre elles ces quantités ou les fluentes » (1) Le problème revient à l'intégration, que Newton appelait quadrature, ou à la solution d'une équation différentielle, qui pour lui était la méthode inverse des tangentes. Les méthodes propres à résoudre ces questions sont exposées avec beaucoup de détails.

Newton chercha ensuite à appliquer ses résultats à des questions concernant les maxima et minima des quantités, au tracé des tangentes et à la courbure des courbes (à savoir la détermination des centres de courbure, du rayon de courbure, et du rapport suivant lequel croît le rayon de courbure). Il envisagea de plus la quadrature et la rectification des courbes (2). En cherchant le maximum et le minimum des fonctions à une variable, nous regardons le changement de signe de la différence de deux valeurs consécutives de la fonction comme le vrai critérium de la valeur de la variable qui rend la fonction maxima ou minima : mais l'argument de Newton est que lorsqu'une quantité croissante a atteint son maximum, elle ne peut avoir aucun autre accroissement, ou lorsqu'une quantité décroissante a atteint son minimum, elle ne peut avoir aucun décroissement ultérieur ; en conséquence la fluxion doit être nulle.

On a fait cette remarque que, ni Newton, ni Leibnitz, n'ont présenté leurs calculs en corps de doctrine, c'est-à-dire sous forme d'un ensemble de règles logiquement ordonnées, et que les problèmes discutés par eux sont traités en partant des premiers principes. C'est sans doute l'ordre usuel dans l'histoire de semblables découvertes, bien que le fait soit fréquemment oublié par les historiens. Dans le cas qui nous occupe, cette observation en ce qui concerne l'exposé fait par Newton du calcul différentiel ou de la partie relative aux fluxions est inexacte, ce qui précède le montre suffisamment.

Représentant une quantité fluente ou une fluente par x, Newton désignait sa fluxion par $\dot{x}$, la fluxion de x ou seconde fluxion de x par $\ddot{x}$ et ainsi de suite, semblablement la fluente de x était repré-

(1) Manuscrit de Newton, édition Colson, pp. 21, 22.
(2) Manuscrit de Newton, pp. 22, 23.

sentée par $[\bar{x}]$, ou quelquefois par x' ou $[x]$. L'accroissement infiniment petit qu'une fluente telle que x prenait dans un petit intervalle de temps mesuré par o était appelé le moment de fluente, et il montrait qu'il avait pour valeur $\dot{x}o$ (¹). Newton ajoutait cette importante remarque que, de cette manière, on peut dans tout problème négliger les termes multipliés par la seconde puissance et les puissances plus élevées de o, et trouver toujours une équation entre les coordonnées x et y d'un point d'une courbe et leurs fluxions $\dot{x}$, $\dot{y}$. L'application de ce principe constitue l'un des principaux avantages du calcul ; car si l'on désire trouver l'effet produit sur un système par plusieurs causes, et si l'on peut évaluer l'effet produit par chaque cause agissant seule dans un temps très petit, l'effet total produit dans ce temps sera égal à la somme des effets isolés. Nous devons observer ici que Vince et d'autres auteurs anglais employèrent au dix-huitième siècle la notation $\dot{x}$ pour désigner l'accroissement de x et non la vitesse avec laquelle croît cette variable ; c'est-à-dire que dans ces écrits $\dot{x}$ a la même signification que le symbole $\dot{x}o$ de Newton ou dx de Leibnitz.

Nous n'avons pas besoin d'examiner en détail la manière dont Newton traitait les problèmes indiqués ci-dessus. Nous ajouterons seulement que malgré la forme de ses définitions, on parvint à se passer de l'introduction de l'idée de temps en géométrie, en faisant croître par degrés égaux l'une des quantités (par exemple l'abscisse d'un point d'une courbe) ; les résultats cherchés dépendaient alors du rapport suivant lequel les autres quantités (par exemple l'ordonnée ou le rayon de courbure) augmentaient par rapport à la variable choisie (²). La fluente ainsi choisie était ce que nous appelons aujourd'hui la variable indépendante ; sa fluxion était appelée « la fluxion principale », et si elle était désignée par $\dot{x}$, alors bien entendu $\dot{x}$ représentait une constante et on avait par conséquent $\ddot{x} = 0$.

Il est hors de doute que Newton employait la méthode des fluxions en 1666, et il est non moins certain qu'il l'avait communiquée en manuscrit à des amis et à des élèves de 1669. Le manuscrit qui a servi à la rédaction de la majeure partie du résumé précédent a été écrit, pense-t-on, entre 1671 et 1677, et a été mis en circula-

(¹) Manuscrit de NEWTON, p. 24.
(²) Manuscrit de NEWTON, p. 20.

tion à Cambridge avant cette époque, bien qu'il soit possible, cela va sans dire, que certaines parties en aient été retouchées. Il est fâcheux qu'il n'ait pas été publié aussitôt son apparition. Les étrangers jugèrent naturellement la méthode d'après la lettre écrite à Wallis en 1692 ou d'après le *Tractatus de Quadratura Curvarum* sans savoir qu'elle avait déjà été développée d'une façon si complète à une date plus ancienne. Ce fut la cause de nombreux malentendus. On doit ajouter que toute l'analyse mathématique de cette époque conduisait aux idées et aux méthodes du calcul infinitésimal. On peut trouver des germes des principes et même du langage de ce calcul dans les écrits de Napier, Kepler, Cavalieri, Pascal, Fermat, Wallis et Barrow. Newton eut le bonheur de venir à un moment où tout était mûr pour la découverte, et son génie lui permit de construire presque aussitôt un corps de doctrine complet.

La notation du calcul des fluxions est pour la plupart des usages moins commode que celle du calcul différentiel. Ce dernier fut inventé par Leibnitz probablement en 1675, certainement vers 1677 ; et sa découverte fut publiée en 1684 à peu près neuf ans avant le plus ancien exposé imprimé de la méthode des fluxions de Newton. Mais la question de savoir si l'idée générale du calcul traduit par cette notation fut empruntée par Leibnitz à Newton, ou si elle lui appartient en propre, donna naissance à une controverse longue et acharnée. Les faits principaux en sont exposés dans le chapitre suivant. C'est là une question sur laquelle il est bien difficile de se prononcer, et nous nous contenterons ici de dire que d'après tout ce que nous avons lu de la volumineuse littérature publiée sur ce sujet, il ressort pour nous cette opinion que Leibnitz a puisé l'idée du calcul différentiel dans un manuscrit de Newton qu'il eut l'occasion de voir en 1675 ou peut-être en 1676. Nous devons cependant dire que l'opinion la plus généralement admise est que les inventions de Leibnitz et de Newton furent indépendantes.

* On ne peut que laisser à W. Rouse-Ball la responsabilité de cette grave assertion, qui ne saurait être étayée d'aucune preuve. Il est même nécessaire de remarquer à ce propos que, dans la longue et âpre discussion qu'il eut avec Leibnitz, Newton ne donna point l'idée d'un grand caractère.

On ~~peut~~ considérer comme hors de doute que Leibnitz et

Newton ont l'un et l'autre, et simultanément jeté les bases de l'analyse moderne *.

Les dernières années de Newton ne prêtent point à un long commentaire.

Il fut anobli en 1705. A partir de cette époque il consacra presque tous ses loisirs à l'étude de la théologie et il écrivit de longues réflexions touchant les prophéties et les prédictions, sujet auquel il s'était toujours beaucoup intéressé. Son *Arithmétique Universelle* (Universal Arithmetic) fut publiée par Whiston en 1707 et son *Analysis by infinite series* en 1711 ; mais Newton ne prit aucune part à la préparation de l'impression de ces deux ouvrages. Sa communication à la Chambre des Communes en 1714, au sujet de la détermination de la longitude en mer, marque une époque importante dans l'histoire de la navigation.

La polémique engagée avec Leibnitz pour savoir si ce dernier avait puisé l'idée du calcul différentiel dans les écrits de Newton ou si elle lui appartenait en propre commença vers 1708 et absorba une grande partie de son temps, surtout de l'année 1709 à l'année 1716.

En 1709, Newton cédant aux sollicitations de Cotes, autorisa la préparation de la seconde édition des *Principia* dont on parlait depuis longtemps : elle parut en mars 1713. Une troisième édition fut publiée en 1726 sous la direction de Henry Pemberton. La santé de Newton commença à chanceler en 1725. Il mourut le 20 mars 1727 et fut enterré avec pompe, huit jours après, à l'Abbaye de Westminster.

Ses principaux ouvrages pris dans leur ordre de publication, sont les *Principia*, 1687 ; l'*Optique* (avec appendices sur les *cubiques*, *la quadrature et la rectification des courbes au moyen des séries infinies*, enfin la *méthode des fluxions*), 1704 ; l'*Arithmétique universelle*, 1707 ; *l'Analysis per series, Fluxiones*, etc. et la *Methodus Differentialis* 1711 ; les *Lectiones Opticæ*, 1729 ; la *Method of Fluxions*, etc., (c'est-à-dire : le *Manuscrit de Newton sur les fluxions*), traduit par J. Colson, 1736 ; et la *Geometria Analytica*, imprimée en 1779 dans le premier volume de l'édition Horsley des œuvres de Newton.

Physiquement, Newton était petit et vers la fin de sa vie, légère-

ment corpulent, mais de belle prestance, avec le bas du visage carré, les yeux bruns, un front large et une physionomie intelligente. Il devint gris avant trente ans et conserva jusqu'à sa mort une chevelure épaisse et blanche comme de l'argent.

Pour ce qui est de ses habitudes, il s'habillait d'une façon peu recherchée, était lent dans ses mouvements, et souvent si absorbé par ses propres pensées que sa société n'était parfois rien moins qu'agréable. On a conservé maintes anecdotes au sujet de ses distractions. Un jour, revenant de Grantham à cheval, il avait mis pied à terre pour soulager sa monture pendant l'ascension d'une colline assez raide. Arrivé au sommet, comme il se retournait pour remonter en selle, il s'aperçut que sa bête profitant de sa distraction. s'était dégagée et enfuie. Parfois recevant des amis à sa table, s'il lui arrivait de les quitter pour aller chercher du vin ou quelque autre chose, une fois sur deux on était sûr de le retrouver absorbé dans la recherche de quelque problème, ayant oublié ses hôtes et ce qu'il était allé chercher.

Il ne prenait aucun exercice, ne se livrait à aucun amusement, et travaillait constamment, passant dix-huit ou dix-neuf heures sur vingt-quatre à écrire.

Newton était religieux, d'une moralité irréprochable ; il avait, dit l'évêque Burnet, « l'âme la plus pure » qu'il ait jamais connue. Il fut toujours droit, honnête, mais, bien que scrupuleusement juste dans ses controverses avec Leibnitz, Hooke et d'autres, il ne s'y montra pas généreux. Il s'offensait souvent d'une expression risquée à laquelle personne n'attachait d'importance. Il attribuait modestement une grande partie de ses découvertes aux admirables travaux de ses prédécesseurs, et il expliquait un jour que s'il avait vu plus loin que les autres, c'était uniquement parce qu'il avait grimpé sur des épaules de géants. Sa propre appréciation de son œuvre se résume dans cette phrase : « J'ignore ce que je puis bien paraître au monde, mais pour moi, je me figure avoir été seulement comme un enfant jouant au bord de la mer, me réjouissant de trouver de temps en temps un caillou plus poli ou un coquillage plus joli que les autres, tandis que l'immense océan de la vérité s'étalait devant moi en couvrant tout. » Le fait d'être engagé dans des discussions quelconques l'impressionnait au point de le rendre malade. Nous pensons que, exception faite de ses notes sur l'optique, tous ses

ouvrages ne furent mis au jour que sur l'insistance de ses amis et contre son propre désir. Dans plusieurs circonstances, il a fait part de ses notes et des résultats auxquels il était arrivé en imposant comme condition que son nom ne serait pas publié : ainsi quand il eut, en 1669, à la demande de Collins, résolu quelques problèmes sur les séries harmoniques et sur les annuités, dont les solutions avaient échappé aux investigations de ses prédécesseurs, il n'en autorisa la publication qu'à la condition qu'elle fût faite « de telle façon, dit-il, que mon nom ne paraisse pas : attendu que je ne vois pas ce qu'il y a de désirable dans l'estime publique ; si j'étais capable de l'acquérir et de la conserver, cela contribuerait peut-être à étendre mes relations, ce que je m'étudie principalement à éviter. ».

Sa puissance mathématique n'a jamais été surpassée ; ses œuvres en sont le meilleur témoignage.

Le trait le plus prodigieux de son extraordinaire génie est, sans doute, d'avoir composé dans l'espace de sept mois le premier livre des *Principia*. Comme exemples typiques de son habileté, nous pouvons mentionner ses solutions du problème de Pappus, résultat d'un défi de Jean Bernoulli et de la question des trajectoires orthogonales. Le problème de Pappus auquel nous faisons allusion ici consistait à trouver le lieu d'un point tel que le produit de ses distances à deux autres droites données soit dans un rapport donné avec le produit de ses distances à deux autres droites données. Depuis le temps d'Apollonius plusieurs géomètres avaient cherché une solution géométrique de cette question, mais sans succès, et ce qui avait été jugé insurmontable par tous ses prédécesseurs paraît avoir présenté peu de difficulté à Newton : il établit élégamment que le lieu était une conique. La géométrie, disait Lagrange, en recommandant l'étude de l'analyse à ses élèves, est un arc puissant, mais dont un Newton seul est capable de se servir. Comme autre exemple, nous rappellerons qu'en 1696, Jean Bernoulli avait proposé en défi aux mathématiciens : (1) — de déterminer la brachistochrone, et (2) de trouver une courbe telle que, si par un point fixe O, on mène une droite quelconque la coupant en P et Q, la somme $OP^n + OQ^n$ soit constante. Leibnitz résolut la première de ces questions environ six mois après et suggéra alors l'idée de les envoyer en défi à Newton et aux autres mathématiciens. Newton

reçut l'énoncé des problèmes le 29 janvier 1697, et le jour suivant donna la solution complète des deux problèmes, avec une généralisation de la seconde question. Un cas à peu près semblable se présenta en 1716 quand on demanda à Newton de trouver la trajectoire orthogonale d'une famille de courbes. En cinq heures il résolut la question telle qu'elle lui avait été proposée et énonça en même temps la règle pour trouver les trajectoires.

Il est presque impossible de décrire les conséquences des écrits de Newton sans être taxé d'exagération. Mais si l'on établit une comparaison entre l'état des connaissances mathématiques en 1669 ou à la mort de Pascal ou de Fermat, et ce qu'elle était en 1687, on se rend compte de l'immense progrès accompli. En fait, nous pouvons dire que les mathématiciens mirent plus d'un demi-siècle avant de s'assimiler complètement les découvertes que le génie de Newton avait produites dans un espace de vingt ans.

En géométrie pure, Newton ne créa pas de nouvelles méthodes, mais aucun écrivain moderne n'a montré la même habileté en utilisant celles de la géométrie classique. En algèbre et dans la Théorie des équations, il introduisit l'usage des indices littéraux, établit le théorème du binôme et apporta une contribution importante à la théorie des équations ; une règle qu'il énonça à ce sujet demeura jusqu'à ces dernières années une énigme, que les mathématiciens postérieurs cherchèrent vainement à expliquer. En géométrie analytique, il introduisit la classification moderne des courbes, en courbes algébriques et courbes transcendantes ; il établit plusieurs des propriétés fondamentales des asymptotes, des points multiples, des boucles isolées, éclaircissant le tout par une discussion des cubiques. Le calcul des fluxions ou calcul infinitésimal fut inventé par Newton en 1666 ou avant cette date, et dès 1669, le manuscrit de sa découverte circulait parmi ses amis ; l'exposé de sa méthode, cependant, ne dut être imprimé qu'en 1693. Le fait que les résultats du calcul sont aujourd'hui exprimés à l'aide d'une notation différente a eu pour conséquence de faire négliger les recherches de Newton sur ce sujet.

De plus, Newton fut le premier qui donna à la dynamique des bases satisfaisantes, et de la dynamique il déduisit les théories de la statique ; ceci se trouve dans l'introduction des *Principia* publiés en 1687. La théorie de l'attraction, l'application au système solaire

des principes de la mécanique, la création de l'astronomie physique et l'établissement de la loi de la gravitation universelle sont entièrement son œuvre et furent exposés pour la première fois dans le même ouvrage. En particulier, les questions relatives au mouvement de la terre et de la lune furent étudiées aussi complètement qu'il était alors possible de le faire. Il créa la théorie de l'hydrodynamique dans le second livre des *Principia* et perfectionna considérablement la théorie de l'hydrostatique étudiée, peut-on dire, pour la première fois, dans les temps modernes, par Pascal. La théorie de la propagation des ondes, et en particulier, son application à la détermination de la vitesse du son, est due à Newton et fut publiée en 1687. En optique géométrique, il donna, entre autres choses, l'explication de la décompositon de la lumière et la théorie de l'arc en ciel ; il inventa le télescope réflecteur qui porte son nom et le sextant. En optique physique, il proposa et développa la théorie de l'émission de la lumière.

L'énumération qui précède ne contient pas la liste complète des sujets étudiés par Newton, mais elle suffit à montrer la place importante qu'il occupe dans l'histoire des mathématiques. Quant à ses écrits et à leurs conséquences, il nous semble suffisant de citer les remarques faites par deux ou trois des savants qui, par la suite, abordèrent les sujets traités dans les *Principia*. Lagrange parlait des *Principia* comme de la production la plus remarquable du génie humain, et il disait qu'il était ébloui en présence d'un tel exemple de ce que l'intelligence humaine pouvait produire. En parlant de ses propres écrits et de ceux de Laplace, une de ses remarques favorites était que, non seulement Newton devait être considéré comme le génie le plus vaste qui eût jamais existé mais encore comme le plus fortuné ; et en effet, comme il n'existe qu'un seul univers, il n'avait pu être donné qu'à un seul homme, dans l'histoire du monde, d'interpréter ses lois. Laplace, qui est en général très peu prodigue de louanges, fait une exception en faveur de Newton, et on a souvent reproduit ses paroles lorsqu'il énumérait les causes qui « assureront toujours aux *Principia* le premier rang parmi toutes les productions du génie humain ». L'hommage rendu par Gauss est non moins remarquable : pour les autres grands mathématiciens ou philosophes, il se servait des épithètes *magnus* ou *clarus* ou encore *clarissimus*; avec le nom de Newton seul il emploie

le mot *summus*. Enfin Biot qui a étudié d'une façon toute spéciale les œuvres de Newton résume ses remarques par ces mots « comme géomètre et comme expérimentateur, Newton est sans égal ; par la réunion de ces deux genres de génie, à leur plus haut degré, il est sans exemple. »

CHAPITRE XVII

LEIBNITZ ET LES MATHÉMATICIENS DE LA PREMIÈRE MOITIÉ DU XVIII[e] SIÈCLE [1]

Nous avons brièvement exposé dans le dernier chapitre la nature et l'étendue des découvertes de Newton. L'analyse moderne découle cependant directement des travaux de Leibnitz et des premiers Bernoulli; il nous paraît d'ailleurs sans intérêt de savoir si les recherches de Newton leur fournirent les idées fondamentales de cette nouvelle analyse ou si elles leur appartiennent en propre. Les mathématiciens anglais de la période que nous étudions dans ce chapitre continuèrent à employer le langage et la notation de Newton; c'est ce qui les distingue de leurs contemporains du continent et c'est pourquoi nous les avons groupés à la fin de ce chapitre.

LEIBNITZ ET LES BERNOULLI

Leibnitz [2]. — *Gottfried Wilhelm Leibnitz* (ou Leibniz) naquit à Leipzig le 21 juin 1646 et mourut dans le royaume de Hanôvre le 14 novembre 1716. Il n'avait pas encore six ans à la mort de son père. L'instruction qu'il reçut à l'école où il fut alors envoyé n'était pas très étendue; mais grâce à son assiduité il fit des progrès rapides; vers l'âge de douze ans, il était arrivé par ses

[1] Voir Cantor, Vol. III; d'autres références pour les mathématiciens de cette période se trouvent mentionnées au bas des pages.

[2] Voir la vie de Leibnitz par G. E. Guhrauer, 2 vol. et un supplément Breslau, 1842-46. Les mémoires mathématiques de Leibnitz ont été réunis et édités par G. J. Gerhardt en 7 volumes, Berlin et Halle, 1849-63.

propres moyens à lire aisément le latin et il avait commencé l'étude du grec ; à peine âgé de vingt ans, il connaissait déjà les ouvrages classiques usuels sur les mathématiques, la philosophie, la théologie et le droit. Jalousé à cause de son savoir précoce, on lui refusa à Leipzig le grade de docteur en droit et il se rendit à Nuremberg. Là, un essai qu'il composa sur l'étude du droit et qu'il dédia à l'Electeur de Mayence, le fit choisir par celui-ci pour travailler à la révision de quelques lois ; il fut ensuite attaché au service diplomatique.

Dans l'exercice de ces dernières fonctions, il défendit sans succès les prétentions du candidat allemand à la couronne de Pologne.

Louis XIV ayant fait en 1760 la conquête de quelques petites places d'Alsace, l'Allemagne toute entière en ressentit une vive alarme. Ce fut alors que Leibnitz eût l'idée de suggérer à la France de s'emparer de l'Egypte et de faire de cette contrée une base d'opérations contre les colonies que la Hollande possédait en Asie ; le concours de l'Allemagne lui eût été assuré et, en retour, la France se serait engagée à ne plus inquiéter l'Allemagne.

N'y a-t-il pas lieu de faire ici un curieux rapprochement avec le plan identique que forma Bonaparte, lorsqu'il proposa d'attaquer l'Angleterre ?

En 1672, Leibnitz, invité par le gouvernement français, vint exposer ses idées à Paris mais son voyage n'eut aucun résultat.

A Paris il rencontra Huygens qui y résidait à cette époque et les entretiens qu'ils eurent le décidèrent à entreprendre l'étude de la géométrie qui, dit-il, lui ouvrit un nouveau monde. Il avait cependant écrit antérieurement quelques mémoires sur diverses questions mathématiques d'un intérêt secondaire. Le plus important, composé en 1668, est relatif aux combinaisons et à la description d'une nouvelle machine à calculer. En janvier 1673, il fut chargé d'une mission diplomatique à Londres ; il y séjourna quelques mois, et fit connaissance d'Oldenburg, de Collins et de divers autres savants. C'est à cette époque qu'il communiqua à la Société Royale le mémoire à propos duquel on lui fit remarquer qu'il avait été devancé dans ses recherches par Mouton.

L'Electeur de Mayence mourut en 1673, et l'année suivante Leibnitz entra au service du duc de Brunswick ; en 1676 il se rendit de nouveau à Londres et de là en Hanovre, où il occupa jusqu'à

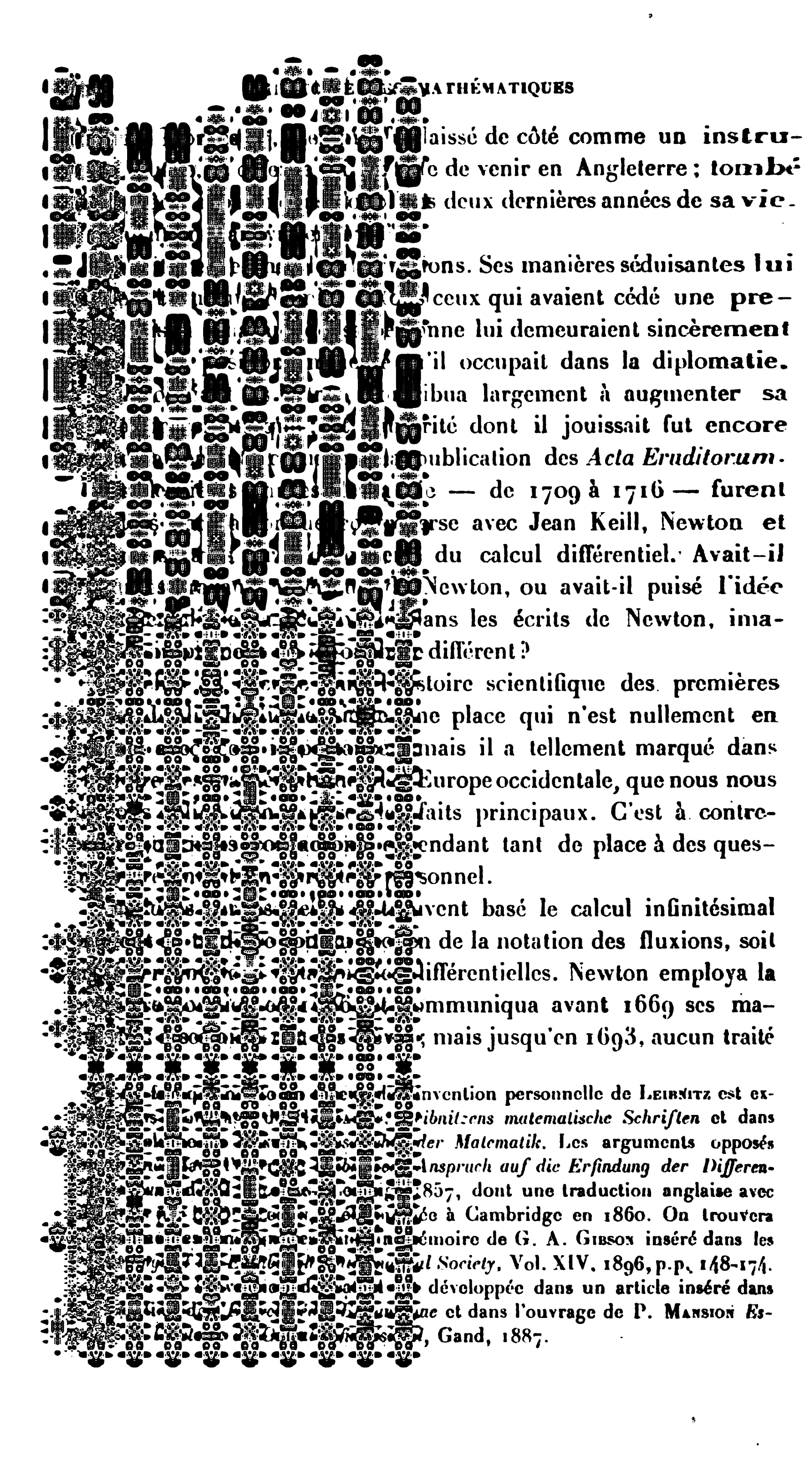
sa mort, le poste bien rétribué de Conservateur de la Bibliothèque ducale. A partir de ce moment il prit part à toutes les questions politiques intéressant la famille de Hanovre et les services qu'il rendit furent récompensés par des honneurs et des distinctions de toutes sortes : ses notes sur les questions politiques, historiques et théologiques concernant cette dynastie durant les quarante années de 1673 à 1713, constituent des documents importants pour l'histoire de cette époque.

Les fonctions de Leibnitz à la bibliothèque de Hanovre lui permirent de consacrer un temps considérable à ses recherches favorites.

Il a toujours affirmé qu'en raison de ces loisirs il était en possession, dès 1674, de sa magistrale invention du calcul différentiel et intégral, mais les traces les plus anciennes que l'on trouve de l'emploi de ce calcul dans les notes qui nous restent de lui ne remontent pas au-delà de l'année 1675, et ce n'est qu'en 1677 qu'on le trouve exposé d'une façon logique. Rien ne fut publié avant 1684. Presque tous ses mémoires mathématiques parurent durant les dix années qui s'écoulent de 1682 à 1692. La plupart d'entre eux furent insérés dans un journal intitulé *Acta Eruditorum*, fondé en 1682 en collaboration avec Otto Mencke, et qui était fort répandu sur le continent.

Leibnitz occupe dans l'histoire de la philosophie une place aussi importante que dans l'histoire des mathématiques. La plupart de ses écrits philosophiques furent composés dans les vingt ou vingt-cinq dernières années de sa vie ; et la question de savoir si les idées qu'il a développées lui appartiennent en propre ou si elle lui ont été inspirées par Spinoza, qu'il visita en 1676, est encore discutée par les philosophes, bien que la première hypothèse semble être la plus vraisemblable. Quant au système philosophique de Leibnitz il faudrait trop de développements pour l'exposer ici d'une manière intelligible. Il rendit également aux lettres des services presque aussi remarquables qu'à la philosophie ; nous pouvons citer en particulier ce fait qu'il parvint à détruire cette opinion alors courante que l'hébreu était la langue primitive de la race humaine.

En 1700, l'Académie de Berlin fut créée à son instigation, et il en prépara les premiers statuts. Lorsqu'en 1714 l'électeur de Hanovre, son protecteur, monta sur le trône d'Angleterre sous le



laissé de côté comme un instru-
de venir en Angleterre ; tombé
deux dernières années de sa vie.

ons. Ses manières séduisantes lui
ceux qui avaient cédé une pre-
nne lui demeuraient sincèrement
'il occupait dans la diplomatie.
ibua largement à augmenter sa
rité dont il jouissait fut encore
ublication des *Acta Eruditorum*.
— de 1709 à 1716 — furent
rse avec Jean Keill, Newton et
du calcul différentiel. Avait-il
Newton, ou avait-il puisé l'idée
ans les écrits de Newton, ima-
différent ?

stoire scientifique des premières
ne place qui n'est nullement en
nais il a tellement marqué dans
Europe occidentale, que nous nous
faits principaux. C'est à contre-
endant tant de place à des ques-
sonnel.

vent basé le calcul infinitésimal
n de la notation des fluxions, soit
différentielles. Newton employa la
mmuniqua avant 1669 ses ma-
mais jusqu'en 1693, aucun traité

nvention personnelle de LEIBNITZ est ex-
ibnitzens matematische Schriften et dans
der Matematik. Les arguments opposés
Anspruch auf die Erfindung der Differen-
857, dont une traduction anglaise avec
ée à Cambridge en 1860. On trouvera
émoire de G. A. GIBSON inséré dans les
l Society, Vol. XIV, 1896, p.p. 148-174.
développée dans un article inséré dans
ne et dans l'ouvrage de P. MANSION Es-
, Gand, 1887.

spécial ne fut publié sur ce sujet. Quant à la seconde notation, on peut avec beaucoup de probabilité fixer à l'année 1675 la date de sa première apparition. Leibnitz en fit usage dans la lettre envoyée à Newton en 1677 ; elle est exposée dans le mémoire de 1684 dont il est question plus loin. Le fait que la notation différentielle est due à Leibnitz n'est pas en question ; le seul point en discussion est de savoir si l'idée générale du calcul a été empruntée à Newton ou si elle appartient en propre à Leibnitz.

L'opinion en faveur d'une invention faite directement par Leibnitz s'appuie sur ce fait qu'il a publié un exposé de sa méthode quelques années avant que Newton ait encore rien publié ; qu'il a toujours parlé de cette découverte comme lui étant personnelle, et que cette affirmation est demeurée plusieurs années sans être contredite, d'où il semblerait résulter que sa bonne foi ne saurait être suspectée. Pour réfuter cette opinion il est nécessaire de prouver 1° Que Leibniz avait eu connaissance en 1675, ou avant cette date ou au plus tard en 1677, de quelques notes de Newton sur ce sujet et 2° qu'il en avait tiré les idées fondamentales du calcul. Le fait que la revendication est restée plusieurs années sans soulever d'objections est de peu d'importance, étant données les circonstances particulières de cette affaire.

Que Leibnitz eût connu quelques manuscrits de Newton, cela a toujours paru fort probable ; mais lorsque C. J. Gerhardt [1] examina en 1849 les papiers de Leibnitz, il trouva un manuscrit dont personne jusqu'alors n'avait soupçonné l'existence, contenant des extraits de la main même de Leibnitz du traité de Newton *De Analysi per Equationes Numero Terminorum Infinitas* (qui avait été imprimé en 1704 dans le *De Quadratura Curvarum*) avec des notes sur leur expression au moyen de la notation différentielle. La question qui devient alors essentielle est de préciser la date à laquelle ces extraits furent pris. On sait qu'une copie du manuscrit de Newton avait été envoyée à Tschirnhausen en mai 1675, et comme cette même année ce dernier préparait un travail en collaboration avec Leibnitz, il n'est pas impossible que ces extraits datent de cette époque [2]. Il est également possible qu'ils aient été pris en 1676, car à cette époque Leibnitz discutait avec Collins et

(1) Gerhardt, *Leibnizens mathematische Schriften*, vol. I. p. 7.
(2) Sloman, traduction anglaise, p. 34.

Oldenburg la question de l'analyse par les séries infinies : *à priori*, il est probable qu'ils lui auront montré le manuscrit de Newton concernant ce sujet, manuscrit dont l'un ou l'autre, ou peut être les deux, possédaient une copie. On peut supposer aussi, il est vrai, que Leibnitz fit les extraits en question sur l'exemplaire imprimé en 1704, ou après cette date. Peut de temps avant sa mort Leibnitz, dans une lettre à Conti, reconnaissait que quelques écrits de Newton lui avaient été montrés, mais en laissant entendre qu'ils ne présentaient que fort peu d'intérêt. Il est à présumer qu'il faisait alors allusion aux lettres de Newton des 13 juin et 24 octobre 1676, et à la lettre du 10 décembre 1672 sur la méthode des tangentes dont des extraits accompagnaient (1) celle du 13 juin — mais il est singulier que la réception de ces lettres n'ait pas provoqué de la part de Leibnitz de nouvelles demandes de renseignements, à moins qu'il n'eût déjà connaissance, par une autre source, de la méthode suivie par Newton.

Que Leibnitz n'ait fait aucun usage du manuscrit dont il avait pris des extraits ou que l'invention du calcul ait été faite antérieurement par lui, ce sont là des questions sur lesquelles on ne peut aujourd'hui se prononcer avec certitude. Il est à noter cependant que les mémoires de Portsmouth non publiés montrent que, lorsqu'en 1711, Newton prit sérieusement part à la discussion, il indiqua ce manuscrit comme étant celui qui était probablement tombé, d'une façon ou d'une autre, entre les mains de Leibnitz (2). A cette époque aucun témoignage n'établissait que Leibnitz avait vu ce manuscrit avant son impression en 1704, c'est pourquoi la conjecture formulée par Newton ne fut pas publiée ; mais la découverte faite par Gerhardt de la copie prise par Leibnitz vient à l'appui de l'hypothèse de Newton. Certains avancent que pour un homme ayant le talent de Leibnitz, le manuscrit, complété d'ailleurs par la lettre du 10 décembre 1672, donnait des éclaircissements suffisant à laisser entrevoir les méthodes du nouveau calcul ; l'invention d'une notation s'imposait, il est vrai, à quiconque aurait voulu s'en servir, attendu qu'on n'y trouve pas trace de la notation des fluxions ; d'autres écrivains s'élèvent contre une pareille affirmation.

(1) GERHARDT. Vol. I, p. 91.
(2) *Catalogue des mémoires de Portsmouth*, pp. XVI, XVII, 7, 8.

On n'avait au début aucune raison de douter de la bonne foi de Leibnitz, mais lors de la publication, en 1704, sans nom d'auteur, d'une analyse du traité de Newton sur les quadratures, dans laquelle on laissait supposer que ce savant avait emprunté à Leibnitz l'idée du calcul des fluxions, tout mathématicien soucieux de la vérité (1) put se demander si Leibnitz avait réellement inventé le nouveau calcul. Il est admis par tout le monde que les faits avancés dans l'analyse en question, attribuée avec vraisemblance à Leibnitz, ne sont appuyés d'aucune justification. Mais la discussion qui suivit eut pour conséquence de provoquer un examen approfondi et critique de la question, et on en vint alors à se demander si Leibnitz n'avait pas emprunté à Newton l'idée du calcul. Les faits militant contre Leibnitz, furent exposés tels que les voyaient les amis de Newton dans le *Commercium Epistolicum* publié en 1712; des références détaillées sur tous les points visés y étaient adjointes.

Les amis de Leibnitz ne firent paraître, en sa faveur, aucun exposé semblable (avec faits, dates et références); mais Jean Bernoulli chercha, d'une façon indirecte, à affaiblir la force des témoignages des amis de Newton, en attaquant la réputation de celui-ci dans une lettre datée du 7 juin 1713. Les accusations portées étaient fausses et Bernoulli mis en demeure d'avoir à en fournir une justification, renia solennellement la paternité de la lettre. En acceptant cette dénégation, Newton ajoute dans une lettre privée qu'il lui adresse les observations suivantes intéressantes à noter car elles expliquent pourquoi il fut enfin amené à prendre part à la controverse : « Je n'ai jamais cherché à acquérir quelque renom auprès des étrangers, mais je suis très désireux de conserver ma réputation d'honnête homme, que l'auteur de cette épitre, se posant en juge suprême, a essayé de m'enlever. Maintenant que je suis vieux, je trouve peu de plaisir dans les études mathématiques; je n'ai jamais d'ailleurs tenté de propager mes idées à travers le monde; j'ai plutôt pris soin de ne pas me laisser entraîner, à cause d'elles, dans des discussions. »

La défense de Leibnitz ou l'explication de son silence est donnée dans la lettre suivante, datée du 9 avril 1716, qu'il avait adressée

(1) Duillier en 1699 avait accusé Leibnitz de plagiat au préjudice de Newton, mais Duillier ne jouissait pas d'une grande notoriété.

[illegible] point en point à l'ouvrage publié
[illegible] ouvrage aussi grand pour le moins
[illegible] dans un grand détail de quantité de
[illegible] quarante ans dont je ne me souve-
[illegible] her mes vieilles lettres, dont plusieurs
[illegible] plus souvent je n'ai point gardé les
[illegible] itres sont ensevelies dans un grand
[illegible] ois débrouiller qu'avec du temps et
[illegible] avois guère le loisir, étant chargé
[illegible] une toute autre nature. »

[illegible] en 1716 suspendit momentanément
[illegible] pendant reprit son cours et même
[illegible] acrimonieux. La question est diffi-
[illegible] es sont contradictoires et dépendent
[illegible] le lecteur juger lui-même et se pro-
[illegible] aîtra le plus conforme à la raison.
[illegible] pour Leibnitz de se faire entendre et
[illegible] uspects relevés contre lui. La posses-
[illegible] n manuscrit de Newton, ou d'une
[illegible] vait s'expliquer ; mais le fait que
[illegible] Leibnitz a altéré délibérément des
[illegible] r a apporté des additions (citons,
[illegible] in 1713 dans les *Charta Volans*, et
[illegible] les *Acta Eruditorum*) avant de les
[illegible] rave, qu'une date essentielle a été
[illegible] rits (¹) (le millésime 1675 transfor-
[illegible] valeur à son propre témoignage.
[illegible] s que la majorité des écrivains mo-
[illegible] nclusion que, probablement, Leibnitz
[illegible] l infinitésimal indépendamment l'un
[illegible] nsidéré, nous pensons que vraisembla-
[illegible] n partie ou peut-être complètement
[illegible] t 1677 ; jusqu'à quel point Leibnitz
[illegible] lecture, c'est ce qu'il est difficile de
[illegible] ons-le, qu'il avait reçu non pas
[illegible] mais bien un certain nombre d'ins-

(¹) [illegible] Leibnitz, pense que cette falsification doit [illegible] *te*, vol. III, p. 176.

pirations, et comme il ne publia pas avant 1684 ses résultats de 1677, et que la notation employée et les développements subséquents sont sans conteste de son invention, il est possible qu'il ait été conduit après une période de trente ans à regarder comme de peu d'importance les renseignements qu'il avait pu recueillir au début, et finalement à n'en tenir aucun compte.

Si nous devons nous borner à un seul système de notations, il n'est pas douteux que celui imaginé par Leibnitz se prête mieux que celui des fluxions aux applications du calcul infinitésimal, et pour certaines questions (telles que le calcul des variations) il est certainement presque indispensable. Il est nécessaire cependant d'ajouter qu'au commencement du XVIIe siècle les méthodes du calcul indéfinitésimal n'avaient pas encore été exposées systématiquement, et que les deux notations étaient également bonnes. Le développement de ce calcul fut l'œuvre capitale des mathématiciens de la première moitié du XVIIIe siècle. La notation différentielle fut adoptée par les mathématiciens du continent. Son application par Euler, Lagrange et Laplace aux principes de la mécanique posés dans les *Principia* constitua l'œuvre importante de la seconde moitié de ce même siècle et établit finalement la supériorité du calcul différentiel sur celui des fluxions. La traduction des *Principia* dans le langage de l'analyse moderne et l'exposition détaillée de la théorie newtonienne à l'aide de cette même analyse, furent l'œuvre de Laplace.

On regarda en Angleterre les réclamations de Leibnitz comme une tentative faite pour enlever à Newton la gloire de son invention; de part et d'autre, les jalousies nationales intervinrent pour embrouiller la question. On s'explique alors naturellement pourquoi les méthodes géométriques et la méthode des fluxions, telles que les employait Newton, furent seules, et cela malheureusement, étudiées et usitées en Angleterre. De ce fait l'Ecole anglaise demeura plus d'un siècle sans contact avec les mathématiciens du continent. La conséquence en fût que, malgré la brillante cohorte d'élèves formés par Newton, les perfectionnements successifs apportés sur le continent aux méthodes d'analyse furent presque ignorés en Grande Bretagne. La valeur de ces nouvelles méthodes analytiques ne fut complètement admise en Angleterre que vers 1820, et ce n'est qu'à partir de cette époque que l'on voit les compatriotes de

Newton prendre de nouveau une large part aux progrès des mathématiques.

Abandonnant maintenant cette longue controverse, passons à l'étude des mémoires mathématiques produits par Leibnitz et dont les plus importants furent publiés dans les *Acta Eruditorum*. Ils roulent principalement sur les applications du calcul infinitésimal et sur diverses questions de mécanique.

Les seuls mémoires ayant une importance de premier ordre sont relatifs au calcul différentiel. Le plus ancien fut publié en octobre 1684 dans le recueil précité. Leibnitz y expose une méthode générale pour trouver les maxima et les minima, et pour tracer les tangentes aux courbes. Un problème inverse, à savoir : trouver la courbe dont la sous-tangente est constante y est également discuté. La notation est celle que nous connaissons, les dérivées de x^m, des produits et des quotients sont calculés. En 1686 il écrit un mémoire sur les principes du nouveau calcul. Dans ces deux mémoires le principe de continuité est explicitement admis, l'exposition de la méthode est basée sur l'emploi des infiniment petits et non sur celui de la valeur limite des rapports. En réponse à quelques objections présentées en 1694 par Bernard Nieuwentyt qui avançait que $\frac{dy}{dx}$ représentait une quantité n'ayant comme $\frac{0}{0}$ aucun sens, Leibnitz expliqua comme Barrow l'avait déjà fait, que, géométriquement, la valeur de $\frac{dy}{dx}$ pouvait être regardée comme le rapport de deux quantités finies. Nous estimons que l'exposé du but et des méthodes du calcul infinitésimal, tel qu'on le trouve dans ces opuscules, qui sont les trois plus importants mémoires que Leibnitz ait publiés sur ce sujet, est quelque peu obscur, et que la tentative de l'auteur d'appuyer ses explications sur des bases métaphysiques, n'est pas de nature à remédier à ce défaut ; mais le fait, que dans les mathématiques modernes, tous les résultats sont exprimés au moyen de l'algorithme inventé par Leibnitz doit être considéré comme un magnifique témoignage en faveur de son œuvre.

En 1692, Leibnitz écrivit un mémoire dans lequel il posait les fondements de la théorie des enveloppes. Cette théorie fut de nouveau développée en 1694 dans un nouvel article où il introdui-

sait pour la première fois les termes de « coordonnées » et « d'axes des coordonnées ».

Leibnitz publia également un grand nombre de notes sur des questions de mécanique ; mais quelques-unes contiennent des erreurs montrant qu'il n'avait pas compris les principes de cette science. Ainsi, en 1685, il écrivit un mémoire pour déterminer la pression qu'exerce une sphère de poids P appuyée sur deux plans ; il supposait les plans inclinés sur l'horizon d'angles complémentaires, et disposés de telle sorte que les lignes de plus grande pente soient perpendiculaires à leur intersection. Il avance à ce propos que la pression sur chaque plan doit donner lieu à deux composantes « unum quo decliviter descendere tendit, alterum quo planum declive premit ». Il dit ensuite que, pour des raisons métaphysiques, la somme des deux pressions doit être égale à P. De là, si R et R′ sont les pressions demandées, et α et $\frac{1}{2}\pi - \alpha$ sont les inclinaisons des plans, il conclut que

$$R = \frac{1}{2} P (1 - \sin\alpha + \cos\alpha) \text{ et } R' = \frac{1}{2} P (1 - \cos\alpha + \sin\alpha).$$

Les vraies valeurs sont

$$R = P \cos\alpha, \text{ et } R' = P \sin\alpha.$$

Néanmoins quelques-unes de ses notes sur la mécanique ont de la valeur. Nous citerons les plus importantes ; deux, en 1689 et 1694, où il résout le problème consistant à trouver une courbe isochrone ; une en 1697, sur la courbe de plus rapide descente (c'était le problème envoyé en défi à Newton) ; et deux en 1694 et 1692 dans lesquelles il fait connaître l'équation intrinsèque de la courbe formée par une corde flexible suspendue librement par ses deux extrémités, c'est-à-dire de la chaînette, mais sans donner la démonstration. Ce dernier problème avait été, à l'origine, proposé par Galilée.

En 1689, c'est-à-dire deux ans après la publication des *Principia*, il étudia les déplacements des planètes, qui, prétendait-il étaient

produits par le mouvement de l'éther. Non seulement les équations du mouvement auxquelles il arriva sont erronées, mais les déductions qu'il en tirait ne concordaient même pas avec ses propres axiômes. Dans un autre mémoire publié en 1706, c'est-à-dire environ vingt ans après la composition des *Principia*, il reconnaissait que quelques erreurs s'étaient glissées dans sa première note, mais il maintenait ses conclusions précédentes, et résumait le sujet en disant « il est certain que la gravitation engendre à chaque instant une nouvelle force vers le centre, mais la force centrifuge également en engendre une autre éloignant du centre... La force centrifuge peut être considérée sous deux aspects, suivant que le mouvement est traité comme s'effectuant sur la tangente à la courbe ou sur l'arc de cercle lui-même ». Il paraît évident, d'après ce mémoire, qu'il ne saisissait pas réellement les principes de la dynamique, et il est à peine nécessaire d'examiner plus complètement ses travaux sur ce sujet. Beaucoup de ses recherches sont rendues défectueuses par la confusion constante qu'il fait entre la quantité de mouvement et l'énergie cinétique. Quand la force est « passive » il emploie le premier algorithme qu'il appelle *vis mortua*, comme mesure d'une force ; quand la force est « active » il se sert du dernier, dont il appelle le double de la valeur « *vis viva* ».

Les séries étudiées par Leibnitz comprennent le développement de $\log(1 + x)$, $\sin x$, $\arcsin x$ et $\operatorname{arctg} x$, qui tous avaient déjà été donnés. Leibnitz (comme Newton) reconnut l'importance des remarques que Jacques Grégory avait faites concernant la nécessité de s'assurer de la convergence ou de la divergence des séries infinies, et il proposa une règle pour reconnaître si les séries alternées convergent ou non. En 1693, il expliqua la méthode de développement en séries par les coefficients indéterminés, mais les applications qu'il en donne contiennent certaines erreurs.

Leibnitz a fait preuve dans ses œuvres d'une grande habileté d'analyste, mais il a laissé beaucoup de sujets inachevés ; enfin il a commis fréquemment des erreurs lorsque, abandonnant ses symboles, il a tenté d'interpréter ses résultats. Il est hors de doute que les exigences

de la politique, de la philosophie et de la littérature lui prirent beaucoup de temps et l'empêchèrent d'étudier d'une façon complète les problèmes qu'il abordait ou d'écrire un exposé systématique de ses vues; à vrai dire, cela n'excuse pas les erreurs de principes qui se rencontrent dans ses écrits. Dans quelques-uns de ses mémoires se trouvent les germes de méthodes devenues de nos jours des instruments précieux d'analyse, telles que l'emploi des déterminants et des coefficients indéterminés : mais lorsqu'un écrivain d'un génie si varié que Leibnitz émet des idées sans nombre, on doit présumer que quelques-unes seulement d'entre elles seront heureuses, et, faire l'énumération de ces dernières, sans mentionner les autres, ne pourrait laisser qu'une impression fausse de la valeur de son œuvre. Malgré cela, son titre à la renommée repose sur une base solide, car son nom se trouve lié d'une façon inséparable à l'un des principaux instruments de l'analyse moderne, le Haut calcul, de même que celui de Descartes — un autre philosophe — l'est à la Géométrie analytique.

Par ses mémoires dans les *Acta Eruditorum*, Leibnitz fut un des auteurs du continent qui familiarisèrent les mathématiciens avec l'emploi du calcul différentiel. Parmi les autres, les plus remarquables furent Jacques et Jean Bernoulli, qui tous deux étaient amis et admirateurs de Leibnitz, et qui, par leur campagne dévouée, contribuèrent largement à sa réputation. Non seulement ils prirent une part proéminente à la discussion de presque toutes les questions mathématiques dont on s'occupait à cette époque, mais presque tous les mathématiciens en renom sur le continent, durant la première moitié du XVIIIe siècle, subirent directement ou indirectement l'influence de l'un ou l'autre ou même de l'un et l'autre.

Les Bernoulli [1] (ou Bernouilli comme on les appelle quelquefois, et peut-être plus correctement) descendaient d'une famille hollandaise qui, chassée de son pays par les persécutions espagnoles s'était établie à Bâle, en Suisse. Le premier membre de la famille qui se créa un renom de mathématicien, fut Jacques.

[1] Voir l'exposé donné dans *Allgemeine Deutsche Biographie*, vol. II ; Leipzig 1875, pp. 470-483.

Jacques Bernoulli ([1]). — *Jacques Bernoulli* naquit à Bâle le 27 décembre 1654 ; en 1686 il fut chargé d'une chaire de mathématiques à l'Université de cette ville, et il l'occupa jusqu'à sa mort, qui survint le 16 août 1705.

L'un des premiers, il sut apprécier le puissant instrument d'analyse qu'était le calcul infinitésimal et l'appliquer à plusieurs problèmes. Usant fort heureusement de sa grande influence, il préconisa avec succès l'emploi du calcul différentiel ; ses leçons sur ce sujet, qui furent présentées sous la forme de deux essais composés en 1691, et se trouvent insérées dans le second volume de ses œuvres, montrent combien il avait, dès cette époque, saisi complètement les principes de la nouvelle analyse. Ces écrits, où le mot intégrale figure pour la première fois, constituent le plus ancien essai pédagogique de calcul intégral : car Leibnitz avait traité chaque problème indépendamment de résultats généraux établis par avance, et n'avait posé aucune règle générale sur le sujet.

Les découvertes les plus importantes de Jacques Bernoulli sont sa solution du problème de la courbe isochrone, sa démonstration de l'exactitude de la construction de la chaînette donnée par Leibnitz, et son extension à la construction de la courbe affectée par une corde extensible de densité variable, soumise en chaque point à l'action d'une force dirigée vers un centre fixe ; la détermination de la forme que prend une tige élastique fixée par l'une de ses extrémités et dont l'autre est actionnée par une force ([2]) ; celle de la figure que prend un rectangle fait d'une substance flexible dont deux côtés sont fixés horizontalement et qui est rempli d'un liquide pesant ([3]), et enfin la courbe dessinée par une voile enflée par le vent ([4]). En 1696, il proposa un prix pour la solution générale du problème des isopérimètres, c'est-à-dire des figures d'un périmètre donné présentant une aire minimum ; sa propre solution, publiée en 1701, est exacte pour tous les cas qu'il examine. En 1698, il publia un essai sur le calcul différentiel et ses applications

([1]) Voir son *Eloge* par B. DE FONTENELLE, Paris 1766, et MONTUCLA *Histoire*, Vol. II. Une édition des œuvres de JACQUES BERNOULLI a été publiée en deux volumes à Genève, en 1744, et l'histoire de sa vie se trouve en tête du 1er volume.

([2]) C'est l'*Elastica*.

([3]) C'est la *Lintearia*.

([4]) C'est la *Velaria*.

à la géométrie. Dans ce traité, il étudie les propriétés principales de la spirale équiangle (spirale logarithmique) et note spécialement la façon dont les courbes variées qui s'en déduisent reproduisent la courbe primitive; frappé de ce fait, il demanda, à l'exemple d'Archimède, qu'une spirale équiangle fût gravée sur sa tombe avec cette inscription : « *eadem numero mutata resurgo* ». Il fit paraître également en 1695 une édition de la *Géométrie* de Descartes. Dans son Traité *Ars conjectandi*, publié en 1713, il établit les principes fondamentaux du calcul des probabilités; dans le cours de l'ouvrage il définit les nombres qui portent son nom (¹) et explique leur usage; il donne également quelques théorèmes sur les différences finies. Il fit aussi, sur la théorie des séries, des leçons qui furent publiées en 1713 par Nicolas Bernoulli.

Jean Bernoulli (²). — *Jean Bernoulli*, frère de *Jacques*, naquit à Bâle le 7 août 1667, et mourut dans cette ville le 1er janvier 1748. Il occupa la chaire de mathématiques à l'Université de Groningue de 1695 à 1705, puis de 1705 à 1748, il remplaça son frère à Bâle. Il se comporta très injustement à l'égard de tous ceux qui n'admiraient pas son talent; il avait de lui-même une opinion fort avantageuse. Comme exemple de son caractère, nous dirons seulement qu'il essaya de substituer à une solution erronée qu'il avait donnée du problème des courbes isopérimètres, une autre solution dérobée à son frère Jacques; en même temps, il chassait de sa maison son fils Daniel, parce que l'Académie des sciences lui avait décerné un prix que lui-même comptait obtenir. C'était cependant le professeur de son époque qui avait le plus de succès, et il possédait le talent d'inspirer à ses élèves le goût passionné qu'il avait lui-même pour les mathématiques. L'adoption générale sur le continent de la notation différentielle et le rejet de la notation des fluxions fut grandement due à son influence.

(¹) Une bibliographie des nombres de Bernoulli a été donnée par G. S. Ely dans la publication *American Journal of Mathematics*, 1882, Vol. V, pp. 228-235.

(²) D'Alembert écrivit un article élogieux sur les œuvres et l'influence de Jean Bernoulli, mais en s'abstenant complètement de parler de sa vie privée ou de ses discussions. Voir aussi l'*Histoire* de Montucla, vol. II. Une édition des œuvres de Jean Bernoulli fut publiée en 4 volumes à Genève, en 1742, et sa correspondance avec Leibnitz, en 2 volumes parut également à Genève, en 1745.

Nous laisserons de côté les innombrables controverses engagées par Jean Bernoulli pour arriver à ses principales découvertes. Elles comprennent : le calcul exponentiel, l'étude fonctionnelle et non plus géométrique de la trigonométrie, les conditions qu'une ligne doit remplir pour être géodésique, la détermination des trajectoires orthogonales, la solution du problème de la brachistochrone, et l'énonciation du principe du travail virtuel. Ce fut lui qui le premier, croyons-nous, employa le signe algébrique g pour désigner l'accélération produite par la pesanteur, et il arrivait ainsi à la formule $V^2 = 2gh$: le même résultat aurait été antérieurement exprimé par la proportion

$$\frac{V_1^2}{V_2^2} = \frac{h_1}{h_2}.$$

En 1718, il remplaça la notation X ou ξ qu'il avait proposée en 1698 pour représenter une fonction ([1]), par le symbole φx : mais l'adoption générale des symboles tels que f, F, φ, ψ,... pour représenter les fonctions, paraît être principalement due à Euler et à Lagrange.

Plusieurs membres de la même famille, enrichirent plus récemment les mathématiques de leurs écrits. Les plus célèbres d'entre eux furent les trois fils de Jean : Nicolas, Daniel et Jean le cadet, et les deux fils de ce dernier, qui portèrent les noms de Jean et de Jacques. Pour compléter notre exposé, nous ajoutons ici les dates respectives les concernant : *Nicolas Bernoulli*, l'aîné des trois fils de Jean, naquit le 27 janvier 1695 et se noya le 26 juillet 1726 à Saint-Pétersbourg où il était professeur. *Daniel Bernoulli*, le second fils, naquit le 9 février 1700 et mourut le 17 mars 1792 : il enseigna d'abord à Saint-Pétersbourg, puis à Bâle, et eut le rare mérite de partager avec Euler, et cela pas moins de dix fois, le prix proposé tous les ans par l'Académie des Sciences ; nous aurons l'occasion d'en parler de nouveau quelques pages plus loin. *Jean Bernoulli*, le cadet, frère de Nicolas et de Daniel, naquit le 18 mai 1710 et mourut en 1790 ; il fut également professeur à Bâle. Il laissa deux fils, *Jean* et *Jacques*, dont le premier, né le 4 décembre 1744 et mort le 10 juillet 1807,

([1]) Sur la signification donnée à l'origine au mot *fonction* voir une note de M. Cantor parue dans l'*Intermédiaire des mathématiciens*, janvier 1896, Vol. III, pp. 22-23.

fut Astronome Royal et Directeur des Etudes mathématiques à Berlin; le second, né le 17 octobre 1759 et mort en juillet 1789, fut successivement professeur à Bâle, Vérone et Saint-Pétersbourg.

DÉVELOPPEMENT DE L'ANALYSE SUR LE CONTINENT

Négligeant pour le moment les mathématiciens anglais de la première moitié du XVIII[e] siècle, nous nous occuperons ici d'un certain nombre d'écrivains du continent dont les travaux sortent de l'ordinaire. Pour quelques-uns, nous n'aurons que peu de mots à dire. Leurs écrits marquent les différentes étapes par lesquelles passèrent la géométrie analytique et le calcul intégral et différentiel avant qu'ils devinssent familiers aux mathématiciens. Presque tous furent des élèves de l'un ou l'autre des deux premiers Bernoulli; ils se suivent de si près, qu'il est difficile de les présenter suivant un ordre chronologique. Les plus remarquables parmi eux furent *Cramer, de Gua, de Montmort, Fagnano, L'Hospital, Nicole, Parent, Riccati, Saurin et Varignon.*

L'Hospital. — *Guillaume-François-Antoine l'Hospital, marquis de Saint-Mesme,* né à Paris en 1661, et mort dans la même ville le 2 février 1704, comptait parmi les plus anciens élèves de Jean Bernoulli; celui-ci avait passé en 1691 quelques mois chez l'Hospital, à Paris, afin de lui enseigner le *Nouveau calcul.* Il semble étrange, mais il n'en est pas moins réellement exact, que, seuls à cette époque, Newton, Leibnitz et les deux anciens Bernoulli connaissaient le calcul infinitésimal et pouvaient s'en servir. — Et il faut noter qu'ils ont été capables de résoudre les plus difficiles des problèmes proposés alors en défi. * C'est ainsi que l'Hospital donna en 1695 la solution du problème de la courbe le long de laquelle doit glisser le contre-poids d'un pont-levis pour qu'il y ait toujours équilibre (¹); qu'il résolut en 1697, avec Newton, Leibnitz et Jacques Bernoulli, le problème de la brachystochrone proposé par Jean Bernoulli; qu'enfin il traita en même temps que Jean Bernoulli le problème du solide de moindre résistance, dont Newton avait

(¹) MAXIMILIEN MARIE (*Hist. des sc. mathém.*) a reproduit la curieuse solution de l'Hospital.

donné la solution dans son *Livre des Principia*, mais sans application à l'appui.

A cette époque, il n'existait aucun livre classique exposant le *Nouveau calcul* *, et le mérite d'avoir amassé les matériaux du premier traité expliquant les principes et l'usage de la *Méthode* revient à l'Hospital : ce traité fut publié en 1696 sous le titre d'*Analyse des infiniment petits*. Il renferme une étude partielle de la valeur limite du rapport de deux fonctions qui, pour une certaine valeur de la variable prend la forme indéterminée $\frac{0}{0}$, problème résolu par Jean Bernoulli en 1704. [1] Cet ouvrage se répandit à profusion; il provoqua l'usage général en France de la notation différentielle et contribua à la faire connaître en Europe. Un supplément, contenant une semblable exposition du calcul intégral, avec des additions relatives aux progrès du calcul différentiel faits dans la seconde moitié du siècle, fut publié à Paris, en 1754-6, par L. A de Bougainville.

L'Hospital publia également en 1707, un traité concernant l'étude analytique des coniques qui fut considéré comme un ouvrage classique pendant près d'un siècle.

Varignon [2]. — *Pierre Varignon*, né à Caen en 1654 membre de l'Académie des sciences et professeur au Collège de France, mourut à Paris le 22 décembre 1722; il était lié avec Newton, Leibnitz, les Bernoulli, et, après l'Hospital, il fut en France le plus ancien et le plus zélé propagateur du calcul différentiel. Il comprit la nécessité de vérifier la convergence des séries, mais fut arrêté par les difficultés analytiques du problème. Il simplifia les démonstrations des principales propositions de la mécanique, et, en 1687, reprit l'étude de cette branche des mathématiques en la basant sur la composition des forces. Ses œuvres furent publiées à Paris, en 1725.

* Ses principaux ouvrages sont : la *Nouvelle mécanique*, l'*Eclaircissement sur l'analyse des infiniment petits*, le *Traité du mouvement et de la mesure des eaux courantes*.

Son meilleur titre de gloire est d'avoir éclairci les principes et simplifié l'exposé de la Mécanique *.

*[1] Cette question, étudiée dans tous les traités d'analyse infinitésimale porte le nom de règle de l'Hospital *.

[2] *Eloge de Varignon* par B. de Fontenelle, Paris, 1766.

De Montmort. — Nicole. — *Pierre Raymond de Montmort*, né à Paris le 27 octobre 1678 et mort dans cette ville le 7 octobre 1719, s'intéressa à la question des différences finies. En 1713, il détermina la somme de n termes d'une série finie de la forme

$$na + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta a + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta^2 a + \ldots;$$

théorème qui semble avoir été retrouvé d'une façon indépendante par Chr. Goldbach en 1718.

*Il est surtout connu par ses travaux sur le *Calcul des Probabilités*. Il fut le premier à résoudre complètement le *problème des partis* : deux joueurs, qui jouent l'un contre l'autre, se retirent du jeu sans achever la partie ; à ce moment, il manque à chacun d'eux un certain nombre de points; on demande le *parti* de chaque joueur, c'est-à-dire la manière dont doit être partagé l'enjeu (1) *.

François Nicole, qui naquit à Paris le 13 décembre 1683 et y mourut le 18 janvier 1758, publia en 1717 son *Traité du Calcul des différences finies*; on y trouve des règles pour former les différences et aussi pour effectuer la sommation de séries données. Il écrivit en outre, en 1706, un ouvrage sur les roulettes, principalement les épicycloïdes sphériques, et en 1729 et 1731 il publia des mémoires sur les essais de Newton relatifs aux courbes du 3e degré.

Parent. — Saurin. — De Gua. — *Antoine Parent*, né à Paris le 16 septembre 1666 et mort dans la même ville le 26 septembre 1716, écrivit en 1700 sur la géométrie analytique à trois dimensions. Ses œuvres furent réunies et publiées en trois volumes à Paris en 1713.

Joseph Saurin, né à Courtaison en 1659 et mort à Paris le 18 décembre 1737, montra le premier comment les tangentes aux points multiples des courbes pouvaient être déterminées par l'analyse.

Jean-Paul de Gua de Malves naquit à Carcassonne en 1713 et mourut à Paris le 2 juin 1785. Il publia en 1740 un ouvrage sur la géométrie analytique dans lequel, sans faire intervenir le calcul différentiel, il déterminait les tangentes, les asymptotes et divers

(1) *Encyclopédie des Sciences mathématiques pures et appliquées*, tome I, vol. 4, p. 13.

points singuliers d'une courbe algébrique. Il montra de plus comment les points singuliers et les boucles isolées étaient modifiés par la projection conique. Il donna la démonstration de la règle des signes de Descartes que l'on trouve dans la plupart des livres modernes : il n'est pas clairement établi qu'elle ait été démontrée d'une façon rigoureuse par Descartes, et Newton semble l'avoir regardée comme évidente.

Cramer. — *Gabriel Cramer*, né à Genève en 1704 et mort à Bagnols en 1752, enseigna à Genève. L'ouvrage par lequel il est le mieux connu est son *Traité sur les courbes algébriques* (1), publié en 1750, et qui passe pour le plus complet du genre. Cet ouvrage est encore consulté ; il contient la plus ancienne démonstration de cette proposition qu'une courbe de n° degré est en général déterminée lorsqu'on en donne $\frac{1}{2} n (n + 3)$ points. Il édita, en outre, les œuvres des deux premiers Bernoulli, et écrivit sur la cause physique de la forme sphéroïdale des planètes, sur le mouvement de leurs apsides, 1730, et sur l'essai de Newton relatif aux cubiques, 1746.

Riccati, — *Jacopo Francesco, comte Riccati,* né à Venise le 23 mai 1676 et mort à Trèves le 15 avril 1754, fit beaucoup pour répandre en Italie la connaissance de la physique Newtonienne. En dehors de l'équation qui porte son nom et qu'il parvint à intégrer dans certains cas, * équation qui a fait l'objet de travaux récents fort remarquables*, il examina la question de la possibilité d'abaisser l'ordre d'une équation différentielle donnée. Ses œuvres, qui forment quatre volumes, furent publiées à Trèves en 1758. Il eut deux fils qui écrivirent sur différents points moins importants touchant le calcul intégral et les équations différentielles : l'aîné *Vincenzo* naquit en 1707 et mourut en 1775, le second *Giordano* naquit en 1709 et mourut en 1790.

Fagnano. — *Giulio Carlo, Conde Fagnano,* et *Marchese di Toschi,* né à Sinigaglia le 6 décembre 1682 et mort le 26 septembre

(1) Voir Cantor. Chap. cxvi.

1766, peut être considéré comme le premier écrivain ayant attiré l'attention sur la théorie des fonctions elliptiques. N'ayant pas réussi à rectifier l'ellipse ou l'hyperbole, Fagnano chercha à en déterminer des arcs dont la différence fût rectifiable. Il signala également l'analogie remarquable qui existe entre les intégrales représentant l'arc d'un cercle et l'arc d'une lemniscate. Enfin il établit la formule

$$\pi = 2\,i \log \left\{ \frac{1 - i}{1 + i} \right\}$$

dans laquelle i représente $\sqrt{-1}$. Ses écrits furent réunis en deux volumes et publiés à Pesaro en 1750.

Il était à prévoir que quelques mathématiciens feraient de l'opposition aux méthodes d'analyse fondées sur le calcul infinitésimal. Les plus renommés d'entre eux furent *Viviani*, *De la Hire* et *Rolle*, dont les noms ont été mentionnés à la fin du Chapitre XV.

Jusqu'ici on ne voit apparaître aucun élève de Leibnitz et des deux premiers Bernoulli qui ait un talent exceptionnel, mais vers 1740 et sous l'influence d'un certain nombre d'écrivains de second ordre, les méthodes et le langage de la géométrie analytique et du calcul différentiel s'étaient vulgarisées. Nous allons parler maintenant de Clairaut, d'Alembert et Daniel Bernoulli. Chronologiquement, ces savants appartiennent à la période qui fait l'objet du chapitre suivant, mais bien qu'il soit difficile de tracer nettement une ligne de démarcation entre les mathématiciens que nous rencontrons dans le chapitre en question et ceux dont nous avons examiné les écrits jusqu'ici, nous pensons, tout bien considéré, qu'il est préférable de parler ici des œuvres de ces trois écrivains.

Clairaut. — *Alexis-Claude Clairaut*, naquit à Paris le 13 mai 1713 et y mourut le 17 mai 1765. Il appartient à ce groupe peu nombreux d'enfants qui, doués d'une précocité exceptionnelle, accroissent encore en grandissant leur puissance intellectuelle. Dès l'âge de 12 ans, il composa un mémoire sur quatre courbes géométriques, mais son premier écrit important fut un *Traité sur les courbes à double courbure* qui le fit entrer à l'Académie des

sciences. Dans ce mémoire, Clairaut étend aux courbes gauches certaines propriétés alors connues des courbes planes concernant leurs tangentes et leur rectification ; il étudie aussi la quadrature des cylindres qui les projettent sur les plans coordonnés. Les solutions qu'il donne sont encore enseignées aujourd'hui. En 1731, il démontra cette proposition indiquée par Newton : que toutes les courbes du 3e ordre étaient les projections d'une courbe faisant partie d'un groupe de cinq paraboles cubiques déterminées.

En 1741, Clairaut fit partie d'une expédition scientifique chargée de mesurer la longueur d'un degré du méridien terrestre, et à son retour, en 1743, il publia sa *Théorie de la figure de la terre*. Ce travail est basé sur une note de Maclaurin où ce dernier établissait qu'une masse fluide homogène, animée d'un mouvement de rotation autour d'une droite passant par son centre de gravité, doit prendre la forme d'un sphéroïde sous l'action de l'attraction mutuelle de ses points. Dans son ouvrage, Clairaut traite la question des sphéroïdes hétérogènes, et il donne la valeur de la pesanteur en un point de latitude l, à savoir :

$$g = G \left\{ 1 + \left(\frac{5}{2} m - \varepsilon \right) \sin^2 l \right\} ;$$

G est la valeur de la gravité à l'équateur, m le rapport de la force centrifuge à la gravité à l'équateur, et ε l'excentricité d'une section méridienne de la terre. En 1849, Stokes [1] montra qu'on arrivait au même résultat, quelle que soit la constitution intérieure ou la densité de la terre, à la condition que la surface soit un sphéroïde d'équilibre de parfaite ellipticité.

Captivé par la puissance de la géométrie telle qu'elle apparaissait dans les écrits de Newton et de Maclaurin, Clairaut abandonna l'analyse : l'ouvrage qu'il publia en 1752, la *Théorie de la Lune*, est composé dans un esprit complètement newtonien. On y trouve l'explication du mouvement de l'apside, qui avait jusqu'alors embarrassé les astronomes ; Clairaut l'avait tout d'abord tenu pour si mystérieux qu'il était sur le point d'admettre une nouvelle hypothèse relative à la loi de l'attraction, quand ayant eu l'idée de pousser l'approximation jusqu'au 3e ordre, il constata que le résultat obtenu était en concordance avec les observations.

(1) Voir *Cambridge Philosophical Transactions*, vol. VIII, pp. 672-695.

Comme suite à cet ouvrage, il publia en 1754 des *Tables de la Lune*. Clairaut composa en outre différents mémoires sur l'orbite lunaire, et sur l'influence perturbatrice des planètes sur le mouvement des comètes, et en particulier sur le passage de la comète de Halley. L'un d'eux obtint le grand prix proposé à ce sujet par l'Académie de St-Pétersbourg. Sa grande popularité dans le monde entrava ses travaux scientifiques : « engagé, dit Bossut, à des soupers, à des veilles, entraîné par un goût vif pour les femmes, voulant allier le plaisir à ses travaux ordinaires, il perdit le repos, la santé, enfin la vie à l'âge de cinquante deux ans. »

D'Alembert (¹). — *Jean-le-Rond d'Alembert* naquit à Paris le 16 novembre 1717 et mourut dans cette même ville le 29 octobre 1783. Fils naturel du Chevalier Destouches, * général d'artillerie, et de Mme de Tencin, chanoinesse et sœur du futur cardinal-archevêque de Lyon *, il avait été abandonné par sa mère, qui avait réservé à son père le moyen de le retrouver, sur les marches de la petite église de Saint-Jean-le-Rond, située à cette époque à l'angle septentrional du grand porche de Notre-Dame. Recueilli là, il fut porté chez le commissaire paroissial qui, suivant l'usage adopté pour les cas semblables, lui donna le nom chrétien de Jean-le-Rond. Nous ignorons pourquoi il s'annoblit par la suite. La paroisse le confia aux soins de la femme d'un vitrier ayant un petit fonds de commerce non loin de la cathédrale, où il semble avoir trouvé un intérieur agréable bien que modeste. Son père, paraît-il, s'en serait occupé à un certain moment; il aurait fait les frais de ses études; il reçut dès lors de bons principes mathématiques. * Il lui légua en mourant, d'Alembert était alors âgé de neuf ans, une pension de 1200 livres et le recommanda à ses proches, qui ne le perdirent jamais de vue.

Tout enfant, on le plaça dans le pensionnat de Bérée, au faubourg St-Antoine ; il profita beaucoup des leçons de ce maître qui, dès l'âge de dix ans, déclarait n'avoir plus rien à lui apprendre.

(¹) Condorcet, Bertrand et S. Bastien ont laissé des esquisses de la vie de d'Alembert : ses œuvres littéraires ont été publiées, mais il n'existe pas encore une édition complète de ses écrits scientifiques. Quelques notes et lettres découvertes à une époque relativement récente, furent publiées par C. Henry à Paris, en 1887.

Agé de 12 ans, il fut admis, par grande faveur, au collège des Quatre-Nations fondé par Mazarin; on n'y recevait que des boursiers choisis par la famille du cardinal, de préférence de familles nobles, et originaires de l'une des provinces récemment annexées à la France. Jean Lerond y fut admis comme gentilhomme.

Ses études y furent brillantes, mais il n'y apprit point l'équitation, l'escrime et la danse, comme l'eût voulu Mazarin; l'Université de Paris refusa toujours de se conformer sur ce point aux volontés du cardinal. Et d'Alembert, qui n'apprit pas les belles manières dans son enfance, ne les connut jamais.

A la fin de l'année 1735, le jeune écolier, alors âgé de 18 ans, fut reçu bachelier ès-arts. Il était devenu excellent latiniste, il savait assez le grec pour lire plus tard dans le texte Archimède et Ptolémée, il savait tourner une phrase en excellent français... sans plus : là se bornait l'instruction des « honnêtes gens » de son temps.

Ses maîtres, presque tous prêtres, et jansénistes fervents, auraient voulu l'enrôler sous leur bannière; il s'y refusa, effrayé qu'il fût d'une pieuse ferveur qui n'engendrait que la haine, et se livra tout entier aux études qui l'attiraient, médecine, droit et surtout mathématiques qui devaient bientôt l'absorber tout entier (¹) *.

Un essai qu'il composa en 1739 sur le calcul intégral et un autre sur les ricochets, paru en 1740, attirèrent sur lui l'attention, et deux ans plus tard, il entra à l'Académie des sciences, grâce en partie à l'influence de sa famille. Trait qui lui fait honneur, il refusa absolument d'abandonner sa mère adoptive, avec laquelle il demeura jusqu'à sa mort, en 1757. Sa mère adoptive ne voyait pas d'un bon œil ses succès car, lorsqu'il fut parvenu au faîte de la renommée, elle lui reprochait de perdre ses facultés dans des recherches inutiles : « vous ne serez jamais qu'un philosophe lui disait-« elle, et qu'est-ce qu'un philosophe? c'est un fou qui se tourmente « pendant sa vie, pour qu'on parle de lui lorsqu'il n'y sera plus ».

Il produisit presque toutes ses œuvres mathématiques au cours de la période qui va de 1743 à 1754. La première fut son *Traité de dynamique* publié en 1743; on y trouve énoncé le principe qui porte son nom, à savoir que « les forces internes d'inertie » (c'est-à-dire les forces qui s'opposent à l'accélération) doivent être égales et opposées aux forces produisant l'accélération. Il pouvait être

(¹) Nous empruntons ces détails à M. Bertrand. *Loc. cit.*

déduit du second texte de la 3[e] loi de Newton sur le mouvement, mais les conséquences complètes de cette loi n'avaient pas été envisagées jusqu'alors. L'application de ce principe permet d'obtenir les équations différentielles du mouvement de tout système rigide.

* Cet ouvrage plaça immédiatement son auteur au nombre des premiers géomètres de l'Europe. La matière, difficile et nouvelle, était traitée de main de maître, Lagrange en a dit :

« Le traité de dynamique de d'Alembert, mit fin à ces espèces de défis (que se posaient les mathématiciens du temps sur diverses questions de mécanique) en offrant une méthode directe et générale pour résoudre ou du moins pour mettre en équations tous les problèmes de dynamique qu'on peut imaginer. Cette méthode réduit les lois du mouvement des corps à celle de leur équilibre et ramène ainsi la dynamique à la statique. »

Les idées de d'Alembert ont subsisté dans la mécanique actuelle. C'est dire quelle valeur leur doit être attribuée*.

En 1744, d'Alembert publia son *Traité de l'Équilibre et du mouvement des fluides* dans lequel il appliquait son principe aux fluides. Il obtint ainsi des équations aux dérivées partielles qu'il ne pouvait pas intégrer. En 1745 il développa dans sa *Théorie générale des vents,* la partie du sujet qui se rapporte aux mouvements de l'air, et, là encore, il fut amené aux dérivées partielles. C'est à propos de ces deux questions qu'il jeta les bases de la théorie si féconde des équations aux dérivées partielles. Une seconde édition de cet ouvrage, dédiée en 1746 à Frédéric-le-Grand, roi de Prusse, lui valut l'invitation de venir s'établir à Berlin et l'offre d'une pension ; il déclina l'une et l'autre, mais dans la suite, cédant aux sollicitations, il fit taire sa fierté et accepta la pension. En 1747, il appliqua le calcul différentiel au problème des cordes vibrantes, et arriva encore à une équation différentielle partielle.

Son analyse l'avait par trois fois conduit à une équation de la forme :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

et il réussit alors à prouver qu'elle était satisfaite pour

$$u = \varphi(x + t) + \psi(x - t)$$

φ et ψ étant des fonctions arbitraires. Nous croyons devoir re-

[illegible] parut dans les Mémoires de l'Aca-
[illegible]

[illegible] représentant $\frac{\partial u}{\partial x}$ par p et $\frac{\partial u}{\partial t}$ par q,
[illegible]

$$[illegible]\, qdt + pdx$$

[illegible] ée

$$[illegible] = \frac{\partial p}{\partial x};$$

[illegible]

$$[illegible] + qdx$$

[illegible] on la représente par dv,

$$[illegible]\, pdt + qdx.$$

[illegible]

$$[illegible]\, pdt + qdx) = (p + q)\,(dx + dt),$$

[illegible]

$$[illegible]\, pdt + qdx) = (p - q)\,(dx - dt).$$

[illegible] nction de $x + t$ et $u - v$, une fonc-
[illegible] par conséquent poser

$$[illegible] = 2\,\varphi\,(x + t),$$

[illegible]

$$[illegible] = 2\,\psi\,(x - t);$$

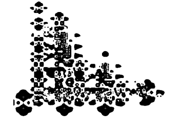
[illegible]

$$[illegible]\, t) + \psi\,(x - t).$$

[illegible] conditions du problème physique
[illegible] pour $x = 0$, u s'annule pour toutes
[illegible] ntiquement

$$[illegible]\, \psi\,(-t) = 0.$$

[illegible] fonctions puissent-être développées



suivant les puissances entières de t, ce qui exige qu'elles ne contiennent que des puissances impaires de cette variable, on a

$$\psi(-t) = -\varphi(t) = \varphi(x-t)$$

et par conséquent

$$u = \varphi(x+t) + \psi(x-t).$$

Euler, à son tour, aborda le sujet, et montra que l'équation de la figure de la corde était

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

et que l'intégrale générale de cette équation avait la forme

$$u = \varphi(x - at) + \psi(x + at)$$

où φ et ψ sont des fonctions arbitraires:

Les principales recherches mathématiques de d'Alembert sont surtout relatives à l'astronomie ; il s'est occupé spécialement de la précession des équinoxes et des variations de l'obliquité de l'écliptique. Ses études sur ces questions ont été réunies dans son *Système du monde* publié en trois volumes en 1754.

* Le peu que nous avons dit des écrits scientifiques de d'Alembert, écrits de la plus haute valeur et en fort grand nombre, montre qu'il fut l'un des plus grands mathématiciens de son temps.

Il exerça donc à juste titre une influence considérable sur les esprits scientifiques du XVIIIe siècle, mais là ne se bornent pas ses titres à la célébrité *.

Dans ses dernières années il s'occupa tout particulièrement de la Grande Encyclopédie. Il en composa l'Introduction, et y collabora par de nombreux articles philosophiques et mathématiques ; les meilleurs sont ceux relatifs à la géométrie. Son style est brillant mais un peu libre, et reflète fidèlement son caractère hardi, honnête et franc. Il défendait un jour une critique sévère qu'il avait présentée d'un ouvrage médiocre par cette remarque ; « j'aime mieux être incivil qu'ennuyé » ; et, avec le mépris qu'il éprouvait pour les adulateurs et les fâcheux, il n'est pas surprenant qu'il ait

eu, pendant sa vie, plus d'ennemis que d'amis*, et que son élection à l'Académie française ait été fort disputée.

D'Alembert ne se maria point. On ne sait si c'est pour ce motif que Mme Geoffrin et la célèbre Mme du Deffand, qui l'une et l'autre étaient ses aînées de vingt ans, s'intéressèrent à lui au point de lui accorder pleinement leur puissante protection.

Sa liaison avec Mlle de Lespinasse, fille illégitime de la comtesse d'Albon, qu'il rencontra chez Mme du Deffand, est restée célèbre*.

Daniel Bernoulli (1). — *Daniel Bernoulli*, dont il a été déjà fait mention plus haut, était de beaucoup le mieux doué des deux jeunes Bernoulli ; il était contemporain et ami intime d'Euler dont il sera question dans le chapitre suivant.

Daniel Bernoulli naquit le 9 février 1700 et mourut le 17 mars 1782 à Bâle, où il enseignait l'histoire naturelle. En 1724, il se rendit à Saint-Pétersbourg, pour y occuper une chaire de mathématiques, mais il ne put se faire à la rudesse de la vie sociale dans ce pays et, saisissant en 1733 l'occasion d'une maladie temporaire, il quitta la Russie en donnant comme excuse l'état de sa santé. Il revint alors à Bâle où il professa successivement la médecine, la philosophie et enfin l'histoire naturelle.

Son premier ouvrage mathématiqne fut les *Exercitationes* publiés en 1724 et qui contiennent une solution de l'équation différentielle proposée par Riccati. Deux ans après, il signala pour la première fois l'avantage fréquent que l'on trouve à transformer un mouvement composé en mouvements de translation et en mouvements de rotation. Son œuvre principale est son *Hydrodynamique* publiée en 1738 ; ce traité, comme la *Mécanique analytique* de Lagrange, est disposé

(1) Le seul aperçu de la vie de Daniel Bernoulli dont nous ayons eu connaissance est son *éloge* par son ami Condorcet. *Marie-Jean-Antoine-Nicolas Caritat, marquis de Condorcet*, naquit en Picardie le 17 septembre 1743 et périt le 28 mars 1794, victime de la Terreur. Il était secrétaire de l'Académie des Sciences et composa de nombreux *Eloges*. Il est peut-être plus célèbre par ses études philosophiques, littéraires et politiques que par ses travaux mathématiques, mais son exposition de la théorie des probabilités et la discussion qu'il a présentée des équations différentielles et aux différences finies, prouvent un talent qui aurait pu l'amener au premier rang, si toute son attention s'était concentrée sur les mathématiques. Il tenta sans succès d'arrêter le torrent révolutionnaire pour arriver à établir une constitution.

de telle sorte que tous les résultats ressortent comme conséquences d'un seul principe qui, dans le cas actuel, est celui de la conservation de l'énergie. Il fut suivi d'un mémoire sur la Théorie des marées qui, conjointement avec des mémoires d'Euler et de Maclaurin sur la même question, eut les honneurs d'un prix décerné par l'Académie des sciences de Paris : ces trois opuscules contiennent tout ce qui a été fait sur le sujet dans la période qui va de la publication des *Principia* de Newton aux recherches de Laplace. Bernoulli composa également un grand nombre de notes sur diverses questions de mécanique, principalement sur des problèmes relatifs aux cordes vibrantes et sur les solutions données par Taylor et d'Alembert. C'est le plus ancien écrivain qui ait tenté de formuler une théorie cinétique des gaz ; il s'en servit pour expliquer la loi qui porte les noms de Boyle et de Mariotte.

LES MATHÉMATICIENS ANGLAIS DU XVIII[e] SIECLE.

Nous avons consacré un paragraphe spécial aux mathématiciens Anglais qui vinrent après Newton, afin de pouvoir examiner sans discontinuité les travaux de l'Ecole anglaise. Naturellement, les Anglais adoptèrent tout d'abord la notation de Newton pour le calcul infinitésimal, de préférence à celle de Leibnitz ; en conséquence, le développement de l'Ecole anglaise suivit nécessairement une route un peu différente de celle du continent, où le calcul infinitésimal était propagé uniquement par Leibnitz et les Bernoulli. Mais cette séparation en deux Ecoles distinctes ne devint très accentuée que grâce à l'intervention de Leibnitz et de Jean Bernoulli. Les amis de Newton en éprouvèrent quelque ressentiment et, pendant quarante ou cinquante ans, au grand désavantage de tous, la querelle fut très vive de part et d'autre.

Les principaux représentants de l'Ecole anglaise furent *Cotes, de Moivre, Ditton, David Gregory, Halley, Maclaurin, Simpson et Taylor.*

Rappelons encore à nos lecteurs que plus nous approchons des temps modernes, plus le nombre des mathématiciens remarquables en Angleterre, en France, en Allemagne et en Italie devient considérable ; mais dans un exposé sans prétention tel que celui-ci, nous nous bornons à mentionner les hommes les plus marquants.

Nous ne consacrerons donc que quelques lignes à Gregory, Halley et Ditton.

David Gregory. — *David Gregory*, le neveu de Jacques Gregory dont il a déjà été parlé, né à Aberdeen le 24 juin 1661 et mort à Maidenhead le 10 octobre 1708, fut nommé professeur à Edinbourg en 1684 ; en 1691 il fut choisi sur la recommandation de Newton pour occuper à Oxford la chaire Savilian. Ses principaux ouvrages sont : un Traité de géométrie paru en 1684 ; un Traité d'Optique publié en 1695, dans lequel (p. 98) est envisagée pour la première fois la possibilité de former une combinaison achromatique de lentilles ; et une étude parue en 1702 sur la géométrie physique et l'astronomie newtonienne.

Halley. — *Edmond Halley*, né à Londres en 1656 et mort à Greenwich en 1742, fit ses études à Saint-Paul de Londres, et au Collège de la Reine, à Oxford ; en 1703 il succéda à Wallis, qui occupait la chaire Savilian, et en 1720, il fut nommé astronome Royal après Flamsteed dont il édita en 1712 l'*Historia Cœlestis Britannica* (première édition : on y constate quelques imperfections). On ne doit pas citer le nom de ce savant sans rappeler la façon généreuse dont il assura en 1687 la publication des *Principia* de Newton. La majeure partie de son œuvre personnelle est relative à l'astronomie et à d'autres sujets ne rentrant pas dans le cadre de cet ouvrage ; il faut ajouter cependant que ses travaux sont excellents ; Lalande et Mairan en parlent tous deux dans les meilleurs termes.

Halley restitua le 8e livre perdu d'Apollonius et fit paraître en 1710 une édition superbe de l'ouvrage complet ; il édita également les œuvres de Serenus, de Menelaus et quelques-uns des ouvrages peu importants d'Apollonius.

Il fut, à son tour, remplacé à Greenwich, comme Astronome Royal, par Bradley. (1)

(1) James Bradley, né en 1692 à Chalford dans le Gloucestershire, et mort à Sherborne en 1762, fut l'astronome le plus distingué de la première moitié du xviiie siècle. Parmi ses plus importantes découvertes il faut citer : l'explication de l'aberration de la lumière (1729), la découverte de la cause de la nutation (1748) et sa formule empirique pour les corrections de la réfraction. On peut dire sans trop s'avancer qu'il fut le premier à faire de l'art des observations une science méthodique.

Ditton. — *Humphry Ditton* naquit à Salisbury le 19 mai 1675 et mourut à Londres en 1715 à Christ's Hospital, où il enseignait les mathématiques. Jusqu'à son arrivée à Londres vers 1705, il ne paraît pas avoir attaché une grande attention aux mathématiques, et sa mort prématurée fut une perte réelle pour la science anglaise. Il publia en 1706 un *Traité classique sur les Fluxions* qui eut, en Angleterre, avec un autre ouvrage du même genre de William Jones, paru en 1711, à peu près la même influence que le traité de l'Hospital en France. En 1709 Ditton fit paraître une Algèbre, et en 1712, un Traité de perspective. Il écrivit également de nombreux articles dans les « *Philosophical transactions* ». Il est le plus ancien auteur qui ait tenté d'expliquer le phénomène de la capillarité en s'appuyant sur des principes mathématiques, et il a imaginé pour la détermination de la longitude, une méthode qui depuis a été employée dans diverses occasions.

Taylor (1). — *Brook Taylor*, né à Edmonton le 10 août 1685 et mort à Londres le 29 décembre 1731, fit ses études au collège Saint-Jean à Cambridge, et fut l'un des admirateurs les plus enthousiastes de Newton. A partir de l'année 1712, il fit paraître dans les « *Philosophical transactions* » de nombreux mémoires parmi lesquels on trouve : une discussion sur le mouvement des projectiles, une note sur le centre d'oscillation et une autre sur les formes prises par les liquides qui s'élèvent par capillarité. En 1719, il se démit de ses fonctions de secrétaire de la Société Royale et abandonna l'étude des mathématiques. Son premier travail lui procura une grande célébrité et fut publié à Londres en 1715, sous le titre *Methodus Incrementorum Directa et Inversa*. Il contient (prop. 7) une démonstration du théorème bien connu, et qui porte son nom,

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{1 \cdot 2} f''(x) + \ldots..$$

au moyen duquel une fonction d'une seule variable peut être développée suivant les puissances de cette variable. Il ne considère

(1) Un exposé de sa vie par Sir William Young se trouve en tête de l'ouvrage : « *Contemplatio philosophica* » qui, imprimé à Londres en 1793 à un très petit nombre d'exemplaires pour un public réservé, est aujourd'hui extrêmement rare.

pas la convergence de la série et il est inutile de reproduire sa démonstration qui repose sur de nombreuses hypothèses. Cet ouvrage contient également plusieurs théorèmes sur l'interpolation. Taylor fut le premier à s'occuper des théorèmes concernant le changement de variable indépendante; il a peut-être aussi été le premier à envisager la possibilité d'un développement symbolique, et de même qu'il représente la n^e dérivée de y par y_n, il se sert aussi du symbole y_{-1} pour désigner l'intégrale de y. Il est enfin regardé comme le créateur de la théorie des différences finies.

Les applications du Nouveau calcul à diverses questions présentées dans son ouvrage *Methodus* ont à peine attiré l'attention qu'elles méritent. La plus importante est la théorie des vibrations transversales des cordes, problème qui avait dérouté ceux qui s'en étaient occupé jusqu'alors.

Dans son étude, Taylor montre que le nombre des demi-vibrations exécutées dans une seconde est donné par l'expression

$$\pi\sqrt{\frac{DP}{NL}},$$

dans laquelle L est la longueur de la corde, N son poids, P le poids qui la tend et D la longueur du pendule à seconde. La formule est exacte, mais, pour l'obtenir, il suppose que tous les points de la corde passeront au même moment par leur position d'équilibre : plus tard, d'Alembert montra que cette restriction n'était pas nécessaire. Taylor détermina également la forme que prend la corde à un instant quelconque.

La « *Methodus* » contient encore la détermination la plus ancienne de l'équation différentielle donnant la route suivie par un rayon lumineux qui traverse un milieu hétérogène tel que l'air; et en supposant que la densité de l'air dépend seulement de la distance à la surface de la terre, Taylor obtient au moyen de quadratures la forme approximative de la courbe. Il s'est également occupé dans le même ouvrage de la chaînette et de la détermination des centres d'oscillation et de percussion.

Un traité de perspective qu'il publia en 1719 contient le plus ancien énoncé général du principe des points de fuite, bien que

l'idée de ces points pour les lignes horizontales et parallèles d'un tableau vertical, ait été émise par Guïdo Ubaldi dans son *Perspectivæ Libri* (Pise 1600) et par Stevin dans sa *Sciagraphia*, publiée à Leyde en 1608.

Cotes. — *Roger Cotes* naquit près de Leicester le 10 juillet 1682 et mourut à Cambridge le 4 juin 1716. Il fit ses études au Trinity College de Cambridge, dont il devint membre, et en 1706 il fut choisi pour occuper la chaire d'astronomie nouvellement créée à l'université de cette ville, la chaire Plumian. De 1709 à 1713, il se consacra presque entièrement à la préparation de la seconde édition des *Principia*. Cette réflexion de Newton « si seulement Cotes eût vécu, nous aurions appris bien des choses de plus » montre l'excellente opinion que la plupart de ses contemporains avait de son talent.

Les écrits de Cotes furent réunis et publiés en 1722 sous les titres *Harmonia Mensurarum* et *Opera Miscellanea*. Ses leçons sur l'hydrostatique furent publiées en 1738. Une grande partie du premier ouvrage, *Harmonia Mensurarum*, est consacrée à la décomposition et à l'intégration des expressions rationnelles algébriques ; la partie qui traite de la théorie des fractions composantes, laissée inachevée, a été complétée par Moivre. Le théorème de Cotes en trigonométrie, qui repose sur la formation des facteurs du second degré de $x^n - 1$, est bien connu. La proposition suivante est également due à Cotes : « Si par un point O on trace une droite coupant une courbe en $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots, Q_n$, et si on prend sur cette ligne un point P tel que OP soit la moyenne arithmétique des inverses de $OQ_1, OQ_2, OQ_3, \ldots, OQ_n$, le lieu du point P est une droite » ; c'est ce théorème qui lui a suggéré le titre de son livre.

Dans ses *Opera Miscellanea* on trouve une note sur la méthode propre à déterminer la valeur la plus probable résultant d'un certain nombre d'observations : c'est le plus ancien essai tenté pour créer une théorie des erreurs. On y trouve également des essais sur l'ouvrage de Newton « *Methodus Differentialis* », sur la construction de tables par la méthode des différences, sur la chute des corps abandonnés à l'action de la gravité, sur le pendule cycloïdal et sur les projectiles.

Moivre. — *Abraham de Moivre* naquit en France à Vitry, le 26 mai 1667 et mourut à Londres le 27 novembre 1751. Lorsqu'il était encore enfant, ses parents vinrent s'établir en Angleterre ; il y fit ses études. On raconte que son goût pour les mathématiques supérieures eut pour origine la lecture faite par hasard d'un exemplaire des *Principia* de Newton. D'après son *éloge*, lu en 1754 devant l'Académie des sciences de Paris, il paraîtrait qu'étant précepteur chez le comte de Devonshire, il s'y était rencontré un jour avec Newton qui venait faire hommage au comte de ses *Principia*.

Saisi, en parcourant le livre, de l'immense portée des conclusions et de la simplicité apparente du raisonnement, Moivre pensa que rien n'était plus facile que de l'étudier, mais il constata avec surprise qu'il n'était pas en mesure d'en suivre les démonstrations. Il se procura cependant un exemplaire de l'ouvrage et, comme ses occupations lui laissaient peu de loisir, il en déchira les pages de façon à en avoir toujours une ou deux dans sa poche ; il les étudiait dès que ses fonctions lui laissaient un instant de loisir. Plus tard, il devint membre de la Société Royale et se lia intimement avec Newton, Halley et d'autres mathématiciens de l'Ecole anglaise. La façon dont il mourut n'est pas sans intérêt pour les psychologues.

Dans les derniers jours de sa vie il avait déclaré qu'il lui était nécessaire de dormir chaque nuit dix minutes ou un quart d'heure de plus que la nuit précédente ; le lendemain du jour où il était arrivé ainsi à dormir un total d'environ vingt-trois heures, il reposa jusqu'à la limite des vingt-quatre heures et mourut sans reprendre connaissance.

Ce qui l'a fait le mieux connaître est la création, avec Lambert, de cette partie de la trigonométrie qui traite des quantités imaginaires. Deux théorèmes relatifs à ce sujet, portent encore son nom : l'un établit que $\sin nx + i \cos nx$ est l'égal à $(\sin x + i\cos x)^n$, et l'autre donne les divers facteurs du second degré de $x^{2n} - 2\,px^n + 1$.

Ses principaux écrits en dehors des nombreux articles insérés dans les *Philosophical Transactions*, sont *The Doctrine of Chances*, publiée en 1718, et les *Miscellanea Analytica* publiés en 1730. Dans le premier ouvrage, on trouve exposé pour la première fois la

théorie des séries récurrentes. La règle permettant de calculer la probabilité d'un évènement composé s'y trouve également énoncée. Le second ouvrage, outre les propositions trigonométriques rappelées plus haut, contient quelques théorèmes d'astronomie; mais ceux-ci sont traités comme exercices d'analyse.

Maclaurin (1). — *Colin Maclaurin*, né en février 1698 à Kilmodan, dans le comté d'Argyll et mort à York le 14 juin 1746, fit ses études à l'Université de Glasgow. En 1717, il fut admis, bien qu'âgé de dix-neuf ans seulement, comme professeur de mathématiques à Aberdeen ; en 1725 il fût désigné pour suppléer le professeur de mathématiques à Edimbourg, puis il lui succéda. Il était difficile de garantir le traitement d'un suppléant, et Newton écrivit d'une façon discrète, offrant de prendre la dépense à sa charge, afin de permettre à l'Université de s'assurer des services de Maclaurin. Maclaurin prit une part active à la lutte engagée pour arrêter en 1745 le jeune Prétendant dans sa marche en avant ; à l'approche des Highlanders il dut fuir jusqu'à York, mais les fatigues endurées dans les retranchements autour d'Edinbourg et les privations qu'il eut à supporter dans sa fuite eurent pour lui une issue fatale.

Ses principaux ouvrages sont sa *Geometria Organica*, Londres 1720 ; ses *De Linearum Geometricarum proprietatibus*, Londres, 1720 ; son *Treatise on Fluxions*, Edinbourg. 1742 ; son *Algèbre*, Londres, 1748, et son *Account of Newton's Discoveries*, Londres, 1748.

La première section de la première partie de la *Geometria organica* traite des coniques ; la seconde des cubiques nodales ; la troisième des autres cubiques et des quartiques ; dans la quatrième section, il envisage les propriétés générales des courbes. Newton avait montré que si deux angles limités par des droites tournent autour de leurs sommets respectifs de telle sorte que le point d'intersection des deux autres côtés se déplace sur une droite, le point d'intersection des deux autres côtés décrira une conique, et que si le premier point d'intersection se déplace sur une conique, le second décrira une quartique. Maclaurin présenta la discussion analytique

(1) Une autobiographie de Maclaurin se trouve en tête de son exposé posthume des découvertes de Newton, Londres 1748.

du théorème général et fit voir comment diverses courbes pouvaient être pratiquement tracées par cette méthode. Cet ouvrage contient aussi une discussion bien étudiée des courbes et de leurs podaires, branche de la géométrie qu'il avait créée et exposée dans deux mémoires insérés en 1718 et 1719 dans les *Philosophical Transactions*.

La seconde partie de l'ouvrage comprend trois sections avec un appendice. La première contient une démonstration du théorème de Cotes dont il a été question plus haut, et de plus ce théorème analogue (qui lui est dû) : si on mène par un point donné o une ligne droite OP_1 P_2,... coupant une coubre de n^e degré en n points P_1, P_2,.., P_n, et si les tangentes menées en ces points à la courbe coupent en A_1, A_2, ... une ligne fixe Ox, la somme des inverses des distances OA_1, OA_2, ... est constante pour toutes les positions de la droite OP_1 P_2... P_n.

Ces deux théorèmes sont des généralisations de ceux présentés par Newton sur les diamètres et les asymptotes ; ils s'en déduisent tous deux et réciproquement. Dans la seconde et la troisième sections, ces propositions sont appliquées aux coniques et aux cubiques ; la plupart des propriétés harmoniques du quadrilatère inscrit dans une conique y sont indiquées, et, en particulier, le théorème sur l'hexagone inscrit qui porte le nom de théorème de Pascal en est déduit. L'essai de Pascal n'a pas été publié avant 1779 et le plus ancien énoncé imprimé de ce théorème est celui qu'on lit dans Maclaurin. Entre autres propositions, il montra que si les points d'intersection des côtés opposés d'un quadrilatère inscrit dans une cubique se trouvent sur cette même courbe, les tangentes aux deux sommets opposés du quadrilatère se couperont également sur la courbe. Dans la quatrième section il considère quelques propositions sur les forces centrales. La cinquième contient quelques théorèmes sur la description des courbes passant par des points donnés. L'un d'eux (qui comprend comme cas particulier, le théorème de Pascal) s'énonce ainsi : si un polygone se déforme de telle sorte que, chacun de ses côtés passant par un point fixe, ses sommets (sauf un) décrivent respectivement des courbes de degré m, n, p, ... ; le sommet restant décrira une courbe de degré $2mnp$ ..., mais si les points donnés sont en ligne droite, cette dernière courbe ne sera que du mnp ...^{ème} degré. Cet essai a

été réimprimé avec des additions dans les *Philosophical Transactions* de 1735.

Le *Traité des Fluxions*, publié en 1742, fût la première exposition logique et systématique de la méthode des fluxions. Sa publication fut une réponse à une attaque de Berkeley au sujet des principes du calcul infinitésimal. Dans cet ouvrage (art. 751, p. 610). Maclaurin donne une démonstration de la formule

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{1.2} f''(0) + \ldots$$

Il l'obtenait, comme on le voit exposé dans plusieurs livres classiques modernes, en supposant que $f(x)$ peut être développé sous une forme telle que

$$f(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots;$$

alors, en différentiant et en faisant $x = 0$ dans les résultats successifs, on obtient les valeurs de A_0, A_1, A_2... ; mais il n'étudia pas la convergence de la série. Ce résultat avait été donné antérieurement en 1730, par Jacques Stirling dans sa *Methodus Differentialis* (p. 102), et bien entendu se déduit immédiatemcnt du théorème de Taylor. Maclaurin énonçait également dans son Traité (art. 350, p. 289) cet important théorème : si la fonction $\varphi(x)$ est positive et décroît lorsque x croit de $x = a$ à $x = \infty$, la série

$$\varphi(a) + \varphi(a + 1) + \varphi(a + 2) + \ldots$$

est convergente ou divergente suivant que l'intégrale

$$\int_a^\infty \varphi(x)\,dx$$

est finie ou infinie. Il donnait encore la théorie exacte des maxima et des minima, et des règles pour trouver et distinguer les points multiples.

Ce traité est fort précieux, car il renferme des solutions de nombreux problèmes sur la géométrie, la statique, la théorie de l'attraction et l'astronomie. Pour y arriver, Maclaurin était revenu aux méthodes classiques, et la façon dont il les employait en fait tellement ressortir la puissance que Clairaut, après avoir lu cet ouvrage, abandonna l'analyse et attaqua de nouveau par la

géométrie pure le problème relatif à la figure de la terre. A une époque plus moderne, Lagrange parlant de cette partie du livre de Maclaurin disait que c'était « un chef-d'œuvre de géométrie qu'on peut comparer à tout ce qu'Archimède nous a laissé de plus beau et de plus ingénieux ». Maclaurin détermina également l'attraction d'un ellipsoïde homogène sur un point intérieur et donna quelques théorèmes relatifs à son attraction sur un point extérieur ; il introduisait à cet effet la conception des surfaces telles qu'en chaque point l'attraction résultante s'exerce suivant la normale. Aucun progrès ne survint dans la théorie de l'attraction jusqu'à ce que Lagrange eût introduit en 1773 l'idée du potentiel. Maclaurin montra encore qu'un sphéroïde était une forme possible d'équilibre d'une masse liquide homogène tournant autour d'un axe passant par le centre de gravité. Enfin il examina le phénomène des marées : cette dernière partie avait été publiée antérieurement en 1740 et avait valu à l'auteur un prix décerné par l'Académie des Sciences de Paris.

Parmi les ouvrages de Maclaurin ayant une importance moindre nous citerons son *Algèbre*, publiée en 1748 et fondée sur l'*Arithmétique Universelle* de Newton. Elle contient les résultats énoncés dans quelques notes anciennes de Maclaurin, en particulier dans deux qui furent écrites en 1726 et 1729, et qui se rapportent au nombre des racines imaginaires d'une équation ; elles avaient été inspirées par le théorème de Newton. L'Algèbre de Mac-Laurin reproduit encore une autre note de 1729, qui contient la règle bien connue pour trouver les racines réelles d'une équation au moyen de l'équation dérivée. Dans cet ouvrage, les quantités négatives sont traitées et considérées comme présentant le même caractère de réalité que les quantités positives. A ce livre était ajouté en appendice un traité intitulé : *De Linearum Geometricarum Proprietatibus Generalibus*, qui, outre la note de 1720 dont il a été question plus haut, renferme quelques nouveaux théorèmes élégants. Maclaurin fit également paraître en 1728 une exposition de la philosophie newtonienne ; on la trouve dans l'ouvrage posthume imprimé en 1748. Une de ses dernières notes fut celle insérée dans les *Philosophical Transactions* pour 1743, où il examine, au point de vue mathématique, la forme des alvéoles des abeilles.

Maclaurin fut un des mathématiciens les plus éminents du

XVIII[e] siècle, mais on peut dire que son influence sur les progrès des mathématiques en Grande-Bretagne a été plutôt néfaste. En négligeant personnellement à la fois l'analyse et le calcul infinitésimal, il amena ses compatriotes à se limiter aux méthodes de Newton, et ce ne fut que vers 1820, lors de l'introduction dans les cours de Cambridge du calcul différentiel, que les mathématiciens anglais commencèrent à employer d'une façon générale les méthodes plus puissantes de l'analyse moderne.

Stewart. — Maclaurin fut remplacé dans sa chaire à Edimbourg par son élève *Matthew Stewart*, né à Rothesay en 1717 et mort à Edimbourg le 23 janvier 1785. Ce fut un mathématicien de talent, que nous citons en passant à propos de ses théorèmes sur le problème des trois corps et de sa discussion des propriétés du cercle et de la ligne droite fondées sur les transversales et l'involution.

Simpson (¹). — Le dernier membre de l'Ecole anglaise que nous croyons devoir nommer ici est *Thomas Simpson*, qui naquit dans le Leicestershire le 20 août 1610 et mourut le 13 mai 1761. Son père était tisserand, et Simpson ne dut son instruction qu'à lui-même. Il s'intéressa pour la première fois aux mathématiques lors de l'éclipse solaire qui survint en 1724, et avec l'aide d'un colporteur diseur de bonne aventure, il étudia l'*Arithmétique* de Cocker et les éléments de l'Algèbre. Il abandonna alors le métier de tisserand et entra comme sous-maître dans une école, où par des efforts constants et laborieux il perfectionna son instruction ; il en vint à pouvoir résoudre en 1735 plusieurs questions qui avaient été proposées récemment et qui exigeaient l'emploi du calcul infinitésimal. Plus tard il vint à Londres et, en 1743, il fut nommé professeur de mathématiques à Woolwich, poste qu'il occupa jusqu'à sa mort.

Simpson était non seulement un homme éminent, mais en outre, un travailleur infatigable. Les plus importants de ses ouvrages sont ses *Fluxions* (1737 à 1750) où l'on trouve de nom-

(¹) Un exposé de la vie de SIMPSON avec la bibliographie de ses écrits, par J. BEVIS et C. HUTTON, a été publié à Londres en 1764. Une courte notice se trouve également en tête des dernières divisions de son ouvrage sur les fluxions.

breuses applications à la physique et à l'astronomie ; ses *Laws of Chances* et ses *Essays* 1740 ; sa théorie des *Annuities and Reversions* (branche des mathématiques due à James Dodson, mort en 1757, et qui enseigna à Christ's Hospital à Londres) avec des tables de mortalité, 1742 ; ses *Dissertations*, 1743, ouvrage dans lequel il discute la forme de la terre, la force d'attraction à la surface d'un corps à peu près sphérique, la théorie des marées et la loi de la réfraction astronomique ; son *Algèbre*, 1745 ; sa *Géométrie* 1747 ; sa *Trigonométrie*, 1748, dans laquelle il introduisit les abréviations courantes concernant les fonctions trigonométriques ; ses *Select Exercises*, 1752, qui renferment les solutions de nombreux problèmes, et une théorie du tir ; et enfin ses *Miscellaneous Tracts*, 1754.

Dans cet ouvrage, on rencontre une collection de huit mémoires renfermant ses recherches les plus connues. Les trois premiers ont trait à divers problèmes d'astronomie, le quatrième est relatif à la théorie des observations ; le cinquième et le sixième sont consacrés à des problèmes sur les fluxions et sur l'algèbre ; le septième contient une solution générale du problème des isopérimètres ; dans la huitième se trouvent discutées les troisième et neuvième sections des *Principia* et l'application de ces théories à l'étude de la Lune. Dans ce dernier mémoire, Simpson obtenait une équation différentielle pour le mouvement de l'apside de l'orbite lunaire identique à celle que Clairaut avait obtenue, mais au lieu de la résoudre par approximations successives, il en donnait une solution générale par les coefficients indéterminés. Le résultat concorde avec celui donné par Clairaut. Simpson avait résolu pour la première fois ce problème en 1747, deux ans après la publication du mémoire de Clairaut, mais il était arrivé à sa solution indépendamment des recherches de ce dernier, dont il entendit parler pour la première fois en 1748.

CHAPITRE XVIII

—

LAGRANGE, LAPLACE ET LEURS CONTEMPORAINS.

(DE 1740 A 1830)

Le chapitre précédent contient l'histoire de deux Ecoles distinctes — l'Ecole continentale et l'Ecole britannique. Dans les premières années du XVIIIe siècle, cette dernière se montre féconde et pleine de vigueur ; mais elle tombe rapidement en décadence et, après la mort de Maclaurin et Simpson, on ne voit apparaître aucun mathématicien anglais pouvant être comparé aux géomètres du continent de la seconde moitié du même siècle. Ce fait s'explique en partie par l'état d'isolement de l'Ecole anglaise, et en partie par sa tendance à adopter d'une façon trop exclusive les méthodes géométriques et la méthode des fluxions. Les applications scientifiques attirèrent cependant un peu l'attention ; mais, en dehors de quelques observations présentées à la fin de ce chapitre, nous ne pensons pas qu'il soit nécessaire d'étudier en détail les mathématiciens anglais antérieurs à 1820, époque à laquelle les méthodes analytiques reprirent vigueur en Grande-Bretagne.

Sur le continent, sous l'influence de Jean Bernoulli, le nouveau calcul était devenu un instrument d'une grande puissance ; grâce surtout à son admirable notation : pour les applications pratiques, une bonne notation est sans prix. Cependant les recherches

[illegible] s au point où Newton les avait
[illegible] bert en eut étendu les limites au
[illegible] ravitation universelle, telle qu'elle
[illegible] *incipia*, était acceptée comme un
[illegible] métriques adoptées pour les dé-
[illegible] suivre ou à employer dans les
[illegible] n, Simpson et Clairaut peuvent
[illegible] rs mathématiciens en renom qui
[illegible] ie Newtonienne de la lumière était
[illegible]

[illegible] s de la période dans laquelle nous
[illegible] nge, Laplace et Legendre. D'une
[illegible] dire qu'Euler étendit, résuma et
[illegible] seurs ; et que Lagrange, avec un
[illegible] oppa le calcul infinitésimal et la
[illegible] onnant la forme sous laquelle nous
[illegible] n même temps, Laplace apporta
[illegible] nitésimal et l'appliqua à la théorie
[illegible] créa également le calcul des pro-
[illegible] l'analyse des sphériques harmo-
[illegible] et compléta la théorie des nombres.
[illegible] sont encore classiques. Nous nous
[illegible] imple aperçu des principales dé-
[illegible] renvoyant aux ouvrages mêmes
[illegible] leurs travaux de manière plus
[illegible]

[illegible] dre ont créé une Ecole française
[illegible] res en deux groupes : l'un (com-
[illegible] mença à appliquer l'analyse ma-
[illegible] re (comprenant Monge, Carnot et
[illegible] oderne. Rigoureusement parlant,
[illegible] maticiens modernes, tels que Gauss
[illegible] des géomètres dont nous venons de
[illegible] sé cependant qu'il était préférable
[illegible] l'étude de leurs travaux.

DÉVELOPPEMENT DE L'ANALYSE ET DE LA MÉCANIQUE

Euler (¹). — *Léonard Euler* naquit à Bâle, le 15 avril 1707 et mourut à Saint-Pétersbourg le 7 septembre 1783. Fils d'un ministre luthérien qui s'était fixé à Bâle, il fit ses études dans sa ville natale sous la direction de Jean Bernoulli et s'y lia avec ses fils Daniel et Nicolas pour toute sa vie. Lorsque, sur l'invitation de l'impératrice, ceux-ci se rendirent en Russie, en 1725, ils lui procurèrent dans ce pays une situation qu'il échangea en 1733 pour la chaire de mathématiques laissée vacante par Daniel. La rigueur du climat lui causa une maladie des yeux et, en 1735, il perdit complètement l'usage d'un œil. En 1741 il se rendit à Berlin à la requête, ou plutôt sur l'ordre de Frédéric-le-Grand ; il y séjourna jusqu'en 1766, y fut remplacé par Lagrange et revint en Russie. Deux ou trois ans après son retour à Saint-Pétersbourg, il devint aveugle; malgré cette infirmité et, bien que sa maison et beaucoup de ses mémoires eussent été brûlés en 1771, il y refit et perfectionna la plupart de ses anciens écrits. Il mourut d'apoplexie.

On peut résumer l'œuvre d'Euler en disant : qu'en analyse il créa beaucoup, qu'il reprit l'étude de presque toutes les branches des mathématiques pures alors connues, les complètant dans leurs détails, et dans leurs démonstrations, les disposant sous une forme bien ordonnée. Un pareil travail est très important et c'est une bonne fortune pour la science qu'un homme du talent d'Euler le mène à bonne fin.

Euler mit au jour un nombre immense de mémoires sur toutes sortes de sujets mathématiques. Voici ses principales œuvres.

En premier lieu il écrivit en 1748 son *Introductio in Analysin Infinitorum*, ouvrage composé pour servir d'introduction aux mathématiques pures. Il est divisé en deux parties.

(¹) Les principaux événements de la vie d'EULER sont exposés par N. FUSS, et une liste de ses écrits se trouve en tête de sa *Correspondance*, 2 vol. Saint-Pétersbourg, 1843. Voir aussi *Index Operum Euleri* par J. G. HAGEN, Berlin, 1896. Les premiers travaux d'EULER sont examinés par CANTOR ; chap. CXI, CXIII, CXV et CXVII. Une édition complète des œuvres d'Euler n'a pas encore été publiée, bien qu'à deux reprises différentes on ait tenté de le faire.

La première renferme l'ensemble des matières que l'on peut trouver dans les classiques modernes sur l'algèbre, la théorie des équations et la trigonométrie. En algèbre, il s'occupe particulièrement de développer en séries diverses fonctions et de sommer des séries données ; il montre explicitement qu'une série infinie ne peut être sûrement employée si elle n'est convergente. Dans sa Trigonométrie, inspirée en grande partie de l'ouvrage de Mayer, *Arithmetic of lines*, qui avait été publié en 1727, Euler développe cette idée de Jean Bernoulli que la trigonométrie est une branche de l'analyse et non un simple appendice à l'astronomie ou à la géométrie. Il y introduit (en même temps que Simpson) les abréviations courantes pour les fonctions trigonométriques, et montre que ces dernières et la fonction exponentielle sont liées par la relation

$$\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}.$$

Nous rencontrons ici le symbole e qui désigne la base des logarithmes Népériens, c'est-à-dire le nombre incommensurable 2,71828..., et le symbole π qui représente le nombre incommensurable 3,14159... L'emploi d'un symbole pour désigner le nombre 2,71828... semble dû à Cotes, qui se servait de la lettre M ; Euler, en 1731, le représentait par e. Autant que nous sachions, Newton a été le premier à user de la notation littérale exponentielle, et Euler, employant la forme a^z, a pris a comme la base de tout système de logarithmes : il est probable que le choix de e pour une base particulière a été adopté parce que c'est la voyelle qui suit a. L'usage d'un simple symbole pour représenter le nombre 3,14159... ne paraît pas être antérieur au commencement du XVIIIe siècle. En 1706, W. Jones représentait ce nombre par π, symbole qui avait été employé par Oughtred en 1647 et par Barrow quelques années plus tard pour désigner la périphérie d'un cercle. Jean Bernoulli se servait de la lettre c ; Euler en 1734 employait p et, dans une lettre de 1736, où il énonçait ce théorème que la somme des carrés des inverses des nombres naturels est $\frac{1}{6}\pi^2$, il utilisait la lettre c; Chr. Goldbach employait π en 1742 ; après la publication de l'*Analyse* d'Euler, le symbole π fut généralement usité.

Les nombres e et π doivent entrer dans l'analyse mathématique de quelque côté que l'on aborde le sujet. Le dernier, entre autres choses, représente le rapport de la circonférence d'un cercle à son diamètre, mais ce n'est qu'accidentellement que cette propriété a été prise pour sa définition. Dans son *Budget of paradoxes*, De Morgan cite une anecdote qui montre combien la définition usuelle du nombre π rappelle peu son origine réelle. Il expliquait à un actuaire quelle chance une fraction déterminée d'un groupe de personnes avait d'être encore en vie à la fin d'un temps donné, et il indiquait la formule actuelle dans laquelle figure π qui, expliquait-il, représente le rapport de la circonférence d'un cercle à son diamètre. Son auditeur qui, jusque là, l'avait écouté avec intérêt, l'interrompit alors en ces termes : « Ce doit être une erreur, mon cher ami ; que peut bien faire un cercle avec le nombre de personnes encore en vie à une époque déterminée ? »

La seconde partie de l'*Analysis Infinitorum* roule sur la géométrie analytique. Euler commence par diviser les courbes en algébriques et transcendantes, puis il démontre une série de propositions concernant toutes les courbes algébriques. Il les applique alors à l'équation générale du second degré à deux variables, montre que celle-ci représente les diverses sections coniques, et établit la plupart de leurs propriétés à l'aide de l'équation générale. Il s'occupe également des courbes algébriques, cubiques, quartiques et autres. Il examine ensuite quelles sont les surfaces représentées par l'équation générale du second degré à trois variables et comment on peut les distinguer entre elles : quelques-unes de ces surfaces n'avaient pas encore été étudiées. Dans le cours de cette analyse, il donne les formules pour la transformation des coordonnées dans l'espace. Là encore nous trouvons la première tentative faite pour introduire la courbure des surfaces dans le domaine des mathématiques, et la première discussion complète des courbes à double courbure.

L'*Analysis Infinitorum* fut suivie en 1755 des *Institutiones Calculi Differentialis* auquel il devait servir d'introduction. C'est le premier livre classique sur le calcul différentiel qu'on puisse considérer comme complet, et l'on peut dire qu'il a servi de modèle à beaucoup de traités modernes concernant le même sujet. Il est regrettable que l'exposition des principes soit souvent prolixe et obscure, et parfois même peu rigoureuse.

Cette série d'ouvrages fut complétée par la publication en trois volumes, de 1768 à 1770, des *Institutiones Calculi Integralis ;* on y trouve insérés les résultats de plusieurs anciens mémoires d'Euler sur le calcul intégral et sur les équations différentielles.

Cet ouvrage, de même que le traité sur le calcul différentiel, résume tout ce que l'on savait alors ; Euler y complète beaucoup de théorèmes connus de son temps et en améliore les démonstrations. C'est ici que les fonctions Bèta et Gamma (1) sont pour la première fois introduites en analyse, mais Euler s'en sert seulement pour la réduction et la transformation des intégrales. L'exposé que fait l'auteur des intégrales elliptiques est superficiel : il lui fut suggéré par une relation entre les arcs d'une hyperbole et d'une ellipse qu'indiqua Jean Landen dans les *Philosophical transactions* pour 1775. Les ouvrages d'Euler précités eurent de nombreuses éditions.

Les problèmes classiques des courbes isopérimètres, de la brachistochrone dans un milieu résistant et la théorie des géodésiques (qui tous avaient été proposés par son maître Jean Bernoulli) avaient attiré de bonne heure l'attention d'Euler ; c'est en les résolvant qu'il fut amené au *Calcul des variations*. Il en exposa l'idée générale dans son *Curvarum maximi minimeve proprietate gaudentium inventio nova ac facilis*, publiée en 1744, mais le développement complet du nouveau calcul fut l'œuvre de Lagrange, 1759. La méthode employée par Lagrange est décrite dans le calcul intégral d'Euler ; on la rencontre dans la plupart des ouvrages modernes.

En 1770 Euler publia son *Einleitung zur Algebra* en deux volumes. Une traduction française, avec des additions nombreuses et importantes de Lagrange, parut en 1794 ; on y annexa un traité d'arithmétique d'Euler.

Le premier volume traite de l'algèbre ordinaire. Il contient l'un des plus anciens essais tenté pour établir les opérations fondamentales sur des bases rationnelles : le même sujet avait attiré l'attention de d'Alembert. Cet ouvrage renferme également la démonstration du théorème du binôme pour un exposant quelconque, théorème qui porte encore le nom d'Euler ; la démons-

(1) L'histoire de la fonction Gamma est donnée dans une monographie de Brunel parue dans les *Mémoires de la société des Sciences*, Bordeaux, 1886.

tration, fondée sur le principe de la permanence des formes équivalentes est convenable, mais Euler ne chercha pas à étudier la convergence de la série. Il est surprenant qu'il ait omis ce point essentiel, car il avait lui-même reconnu la nécessité d'examiner la convergence des séries infinies. La démonstration de Vandermon, donnée en 1764, présente le même défaut.

Le second volume est consacré à l'analyse indéterminée ou algèbre de Diophante. Il contient les solutions de quelques questions proposées par Fermat et qui n'avaient pas encore été résolues.

* Sa traduction française est suivie d'une note célèbre où Lagrange expose les très remarquables résultats qu'il obtint au sujet des fractions continues arithmétiques *.

Comme exemple de la simplicité et de la rigueur des méthodes d'Euler nous résumons sa démonstration [1] de ce théorème : que tous les nombres parfaits pairs sont compris dans la formule d'Euclide $2^{n-1}p$, p étant un nombre premier de la forme $2^n - 1$ [2].

Soit N un nombre parfait pair. N étant pair peut être écrit sous la forme $2^{n-1}a$, a représentant un nombre impair. N est parfait, c'est-à-dire égal à la somme de tous ses diviseurs entiers ; par conséquent, (en considérant le nombre N lui-même comme un de ses diviseurs) il est égal à la moitié de la somme de tous ses diviseurs entiers, somme que nous pouvons représenter par ΣN.

De l'égalité $2\mathrm{N} = \Sigma\mathrm{N}$
on déduit :

$$2 \times 2^{n-1} a = \Sigma 2^{n-1} a = \Sigma 2^{n-1} \times \Sigma a$$

et

$$2^n a = (1 + 2 + \ldots + 2^{n-1}) \Sigma a = (2^n - 1) \Sigma a ;$$

par conséquent

$$\frac{a}{\Sigma a} = \frac{2^n - 1}{2^n} = \frac{p}{p+1}.$$

Dès lors $a = \lambda p$ et $\Sigma a = \lambda(p + 1)$ et, puisque la fraction $\frac{p}{p+1}$ est irréductile, λ doit être un entier positif. Les facteurs de λp sont 1, λ, p et λp, abstraction faite de l'hypothèse $\lambda = 1$; et de plus,

(1) *Commentationes Arithmeticæ Collectæ*, Saint Pétersbourg, 1849, Vol. II. p. 514, art. 107 : SYLVESTER a fait paraître une analyse de cette démonstration dans le journal *Nature*, déc. 15, 1887, Vol. XXXVII, p. 152.

(2) Eucl. IX, 36.

si p n'est pas un nombre premier, il y aura encore d'autres facteurs. Ainsi, à moins que $\lambda = 1$ et que p soit premier, nous avons

$$\Sigma\lambda p = 1 + \lambda + p + \lambda p + \ldots = (\lambda + 1)(p + 1) + \ldots$$

Mais cette dernière relation est en contradiction avec le résultat

$$\Sigma\lambda p = \Sigma a = \lambda(p + 1).$$

Donc nécessairement $\lambda = 1$ et p est un nombre premier.

Par suite

$$a = p \quad \text{et} \quad N = 2^{n-1}a = 2^{n-1}(2^n - 1).$$

Nous pouvons ajouter ce corollaire que, puisque p est un nombre premier, il en résulte que n est premier, et la détermination des valeurs de n (moindres que 257) qui rendent p premier, ressort de la règle de Mersenne.

Les quatre ouvrages que nous venons d'indiquer renferment la majeure partie des travaux d'Euler sur les mathématiques pures. Il écrivit également de nombreux mémoires sur presque toutes les branches des mathématiques appliquées et de la physique mathématique. Nous signalerons quelques-unes des nouveautés qu'ils renferment.

Dans les applications de la mécanique à un système rigide, il détermine les équations générales du mouvement d'un corps autour d'un point fixe ; ces équations sont ordinairement écrites sous la forme :

$$A\frac{dp}{dt} + (C - B)\,qr = L\,;$$

il donne aussi les équations générales du mouvement d'un corps libre.

Enfin, il défend et étudie le principe de la « moindre action » que Maupertuis avait proposée en 1751 dans son *Essai de Cosmologie* (p. 70).

En hydrodynamique, Euler établit les équations générales du mouvement, qui sont communément exprimées sous la forme

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} = X - \frac{\partial u}{\partial t} - u\frac{\partial u}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial y} - w\frac{\partial u}{\partial z}.$$

Peu de temps avant sa mort, il s'occupait de la préparation d'un traité d'hydrodymanique, où il se proposait de reprendre complètement l'exposé du sujet.

Ses ouvrages d'astronomie les plus importants sont : sa *Theoria Motuum Planetarum et Cometarum*, publiée en 1744 ; sa *Theoria Motus Lunaris*, publiée en 1753 ; et sa *Theoria Motuum Lunæ*, publiée en 1772.

Dans ces traités, il abordait le problème des trois corps : il supposait que le corps considéré (par exemple, la lune), entraînait dans son mouvement trois axes rectangulaires se déplaçant parallèlement à eux-mêmes et il rapportait tous les mouvements à ces axes. Cette méthode n'est pas avantageuse, mais c'est d'après les résultats obtenus par Euler que Mayer construisit ses tables lunaires, qui valurent à sa veuve, en 1770, un prix de 5.000 livres, accordé par le Parlement ; les services d'Euler furent également reconnus par une somme de 300 livres.

Euler s'intéressa beaucoup à l'étude de la lumière. En 1746 il examina les mérites relatifs de la théorie de l'émission et de la théorie des ondulations ; le tout bien considéré, cette dernière avait ses préférences. En 1770-71 il publia ses recherches sur l'optique, sous le titre *Dioptrica*. Elles comprennent trois volumes.

Euler composa également un ouvrage élémentaire sur la physique et les principes fondamentaux de la philosophie mathématique. L'origine de ce travail fut une invitation qu'il reçut, lors de son premier voyage à Berlin, de donner des leçons de physique à la princesse de Anhalt-Dessau. Ces leçons furent publiées en trois volumes, en 1768-1772, sous le titre : *Lettres/.... sur quelques sujets de physique*.....et pendant un demi-siècle elles furent considérées comme constituant un livre classique.

Il va sans dire que les admirables productions d'Euler ne furent pas les seuls ouvrages contenant des notions nouvelles qui parurent à cette époque. Parmi les nombreux écrivains ayant contribué au développement des mathématiques nous signalerons en particulier *Daniel Bernoulli, Lambert, Bezout, Trembley et Arbogast*. Nous avons déjà parlé des deux premiers dans le chapitre précédent.

Lambert (1). — *Jean-Henri Lambert* naquit à Mulhouse le 28 août 1728, et mourut à Berlin, le 25 septembre 1777. Il était

(1) Voir *Lambert nach seinem Leben und Wirken* par D. HUBER, Bâle, 1829. La plupart des mémoires de LAMBERT sont réunis dans ses *Beiträge Zum Gebrauche der Mathematik*, publiés en 4 volumes, Berlin 1765-1772.

fils d'un petit tailleur et ne dut compter que sur ses propres efforts pour s'instruire. Un employé dans une usine métallurgique lui procura une place dans le bureau d'un journal : par la suite, sur la recommandation du gérant il réussit à entrer comme précepteur dans une famille, où il eut à sa disposition une bonne bibliothèque et des loisirs suffisants pour étudier. En 1759 il s'établit à Augsbourg et, en 1763, il se rendit à Berlin, où il obtint une petite pension et fut enfin nommé rédacteur de l'almanach astronomique prussien.

Les ouvrages les plus importants de Lambert sont un Traité d'optique paru en 1759, qui suggéra à Arago l'idée de la marche qu'il suivit plus tard dans ses recherches ; un traité de perspective, publié en 1759 (auquel il ajouta en 1768 un appendice donnant des applications pratiques) ; un ouvrage sur les comètes, imprimé en 1761, qui contient l'expression bien connue de l'aire d'un secteur focal d'une conique en fonction de la corde et des rayons vecteurs aboutissant aux extrémités. Il adressa en outre de nombreux mémoires à l'Académie de Berlin. Les plus importants d'entre eux sont une note de 1768 sur les nombres transcendants, dans laquelle il démontre que π est incommensurable; cette démonstration se trouve dans la *Géométrie* de Legendre, et elle est étendue à π^2); un mémoire sur la trigonométrie de 1768, où il développe les théorèmes de Moivre sur la trigonométrie des variables complexes, et introduit les sinus et cosinus hyperboliques que représentent les symboles *Shx*, *Chx* [1] ; un essai intitulé observations analytiques, publié en 1771, qui constitue la plus ancienne tentative faite pour former des équations fonctionnelles en exprimant les données au moyen de l'algorithme du calcul différentiel, puis en intégrant ; enfin une note sur la force vive, publiée en 1783, où le premier il exprime au moyen des notations différentielles la seconde loi de Newton sur le mouvement.

Bezout. — Trembley. — Arbogast. — Disons ici quelques mots des autres mathématiciens dont les noms viennent d'être rappelés.

[1] Ces fonctions auraient été, dit-on, proposées antérieurement par F. C. Mayer, voir *Die Lehre von den Hyperbelfunktionen* par S. Günther, Halle, 1881, et *Beiträge zur Geschichte der neueren Mathematik*, Ansbach, 1881.

Etienne Bezout, né à Nemours le 31 mars 1730 et mort le 27 septembre 1783, composa, outre de nombreux ouvrages de faible importance, une *Théorie générale des équations algébriques*, publiée à Paris en 1779 ; on y trouve en particulier beaucoup de considérations nouvelles et importantes concernant la théorie de l'élimination et les fonctions symétriques des racines d'une équation. Il employa les déterminants dans son *Histoire de l'académie royale*, 1764, mais sans en présenter une théorie générale.

Jean Trembley, né à Genève en 1749 et mort le 18 septembre 1811, s'occupa de la théorie des Equations différentielles, de la Théorie des différences finies et du Calcul des probabilités.

Louis-François-Antoine Arbogast, né en Alsace le 4 octobre 1759 et mort à Strasbourg, où il était professeur, le 8 avril 1803, perfectionna la théorie des séries, et fut le créateur du calcul des dérivations, auquel son nom est resté attaché.

Nous pensons inutile de grossir ce volume en mentionnant les noms de tous ceux qui n'ont pas contribué d'une façon effective aux progrès des mathématiques, et nous n'avons parlé des auteurs précédents que parce que leurs noms sont bien connus. Nous pouvons dire cependant que les découvertes d'Euler et de Lagrange dans les diverses branches qu'ils abordèrent furent si complètes et s'étendirent si loin, que ce qui a été ajouté par leurs contemporains moins bien doués ne présente guère une importance telle qu'il soit nécessaire d'en faire mention dans un livre tel que celui-ci.

Lagrange (¹). — *Joseph-Louis Lagrange*, le plus grand mathématicien du XVIIIᵉ siècle, naquit à Turin le 25 janvier 1736 et mourut à Paris le 10 avril 1813.

Son père, qui occupait la charge de trésorier de l'armée sarde, avait de la fortune et occupait une bonne situation sociale, mais il perdit la plupart de ses biens en spéculations, lorsque son fils était encore tout enfant ; le jeune Lagrange ne dut donc compter que sur

(¹) Des résumés de la vie et des œuvres de LAGRANGE sont donnés dans l'*Englisch Cyclopaedia* et l'*Encyclopaedia Britannica* (9ᵉ édition) ; nous en avons fait largement usage. La première contient une bibliographie de ses écrits. Les œuvres de Lagrange éditées bar J. A. SERRET et G. DARBOUX, ont été publiées, à Paris en 14 volumes, 1867-1892. L'histoire de sa vie par DELAMBRE se trouve dans le premier volume.

ses propres moyens pour se créer une position. Il fit ses études au collège de Turin et ce ne fut que vers l'âge de dix-sept ans qu'il montra du goût pour les mathématiques ; son attention fut attirée sur ce sujet par un mémoire de Halley (1), qui lui était tombé par hasard entre les mains. Seul et sans aide, il se plongea dans l'étude des mathématiques et après un an de labeur incessant, il était déjà un mathématicien accompli pour son temps ; il fut alors nommé professeur à l'école d'artillerie.

Le premier travail de Lagrange fut une lettre à Euler, écrite lorsqu'il n'avait encore que dix-neuf ans ; il y résolvait le problème des isopérimètres, qui pendant plus d'un demi-siècle avait été l'objet de diverses recherches. Pour arriver à la solution, il cherchait à former une fonction telle qu'une formule où elle figurait devait satisfaire à une certaine condition et il énonçait là les principes du calcul des variations. Euler reconnut la généralité de la méthode adoptée, et sa supériorité sur celle qu'il avait lui-même employée ; avec une rare courtoisie, il laissa de côté un mémoire qu'il avait composé antérieurement et dans lequel il abordait le même ordre d'idées ; il voulait ainsi donner au jeune savant italien le temps de compléter son œuvre et de revendiquer sans conteste possible l'invention du nouveau calcul. Le nom donné à cette branche d'analyse fut proposé par Euler. Ce mémoire plaça aussitôt Lagrange au premier rang des mathématiciens de l'époque.

En 1758 Lagrange créa avec l'aide de ses élèves une société privée, qui devint dans la suite l'académie des sciences de Turin ; la plupart de ses premiers mémoires se trouvent insérés dans les cinq volumes des comptes-rendus des travaux de cette société, généralement connus sous le titre de *Miscellanea Taurinensia*. Le premier volume contient un mémoire sur la théorie de la propagation du son : il y signale une erreur commise par Newton, obtient l'équation différentielle générale du mouvement, et en effectue l'intégration pour le mouvement en ligne droite. Ce volume contient aussi la solution complète du problème de la corde vibrant transversalement ; dans sa note, il fait ressortir le manque de géné-

(1) Sur la supériorité de l'Algèbre moderne dans certains problèmes d'optique *Philosophical Transactions*, 1693, Vol. XVIII, p. 960.

ralité des solutions données antérieurement par Taylor, d'Alembert et Euler, et arrive à la conclusion que la forme de la courbe à un instant quelconque t est donnée par l'équation $y = a \sin mx \sin nt$.

L'article est terminé par une discussion, faite de main de maître, des échos, des battements et des sons composés. D'autres articles du même volume traitent des séries récurrentes, des probabilités et du calcul des variations.

Le second volume renferme un long article dans lequel se trouvent rappelés les résultats de plusieurs mémoires du premier volume sur la théorie et la notation du calcul des variations ; comme applications, il en déduit le principe de la moindre action et les solutions de divers problèmes de dynamique.

Le troisième volume comprend encore la solution de plusieurs problèmes de dynamique au moyen du calcul des variations ; quelques notes sur le calcul intégral ; une solution de ce problème de Fermat déjà signalé : trouver un nombre x tel que l'expression $(x^2n + 1)$ dans laquelle n représente un nombre entier quelconque non carré, soit un carré parfait ; et enfin les équations différentielles générales du mouvement de trois corps se déplaçant sous l'influence de leurs attractions mutuelles.

En 1761, Lagrange occupait sans rival le premier rang parmi les mathématiciens de l'époque ; mais le labeur incessant auquel il s'était astreint durant les neuf années précédentes avait sérieusement affecté sa santé, et les médecins déclaraient ne pouvoir répondre de sa raison ou de sa vie s'il ne voulait consentir à prendre du repos et de l'exercice. Bien qu'il eut recouvré temporairement la santé, son système nerveux ne se remit jamais complètement et, depuis cette époque, il eut constamment des attaques de profonde neurasthénie.

Dans le premier ouvrage qu'il produisit ensuite, en 1764, il s'occupe de la libration de la lune, et explique pourquoi c'est toujours le même hémisphère de cet astre qui est tourné du côté de la terre, problème qu'il traite à l'aide du principe du travail virtuel. Sa solution est particulièrement intéressante ; elle contient en germe l'idée des équations du mouvement généralisées, équations qu'il établit le premier d'une façon rigoureuse en 1780.

Il quitta alors son pays pour se rendre à Londres, mais il tomba malade à Paris. Là il fut accueilli avec tous les honneurs possibles,

et il abandonna à regret la brillante société de cette capitale, pour reprendre sa vie de province à Turin. Son séjour dans le Piémont fut cependant de courte durée. En 1766 Euler quitta Berlin, et Frédéric-le-Grand écrivit immédiatement à Lagrange en exprimant le désir « que le plus grand roi de l'Europe » eut à sa cour « le plus grand mathématicien de l'Europe ». Lagrange accepta l'offre qui lui était faite, et il passa les vingt années qui suivirent en Prusse, où il composa, non seulement la longue série de mémoires insérés dans les comptes-rendus des Académies de Berlin et de Turin, mais encore son œuvre monumentale, la *Mécanique analytique*. Son séjour à Berlin débuta par une fâcheuse méprise. Ayant trouvé la plupart de ses collègues mariés, et les épouses de ces messieurs lui ayant assuré que c'était la seule manière d'être heureux, il se maria à son tour ; sa femme mourut peu après, mais son union ne fut pas heureuse.

Lagrange avait la faveur du roi, qui souvent dans ses conversations, l'entretenait des avantages résultant d'une vie parfaitement réglée. Il prit note de l'observation, et, à partir de ce moment étudia son corps et son intelligence comme s'il s'agissait de machines, et détermina par expérience la somme totale de travail qu'il pouvait produire sans être épuisé. Chaque nuit il se fixait pour le jour suivant une tache définie et, en terminant une partie quelconque d'un sujet, il en écrivait une courte analyse, pour voir quels points dans les démonstrations ou dans le sujet traité étaient susceptibles de perfectionnement. Il préparait toujours dans son esprit le sujet d'un mémoire avant d'en commencer la rédaction, et il avait l'habitude de l'écrire d'un seul jet sans aucune rature ni correction.

Son activité mentale durant ces vingt années fut surprenante. Non seulement il produisit son admirable Mécanique analytique, mais il fournit aux Académies de Berlin, de Turin et de Paris entre cent et deux cents mémoires. Quelques-uns sont de véritables traités et tous, sans exception, sont d'une grande valeur. En dehors d'une courte période de temps pendant laquelle il fut malade, sa production moyenne était d'un mémoire par mois. Parmi les plus importants nous noterons les suivants.

Tout d'abord, ses articles insérés dans les quatrième et cinquième volumes, 1766-1773, des Miscellanea Taurinensia ; le plus im-

portant est celui, daté de 1771, où il examine le nombre des observations astronomiques qu'il est nécessaire de faire pour obtenir le résultat le plus probable. Et plus tard, ses articles dans les deux premiers volumes, 1784-1785, des comptes rendus de l'Académie de Turin : dans le premier il inséra une note sur la pression exercée par les fluides en mouvement, et dans le second une autre note sur l'intégration par séries infinies, avec le genre de problèmes auxquels cette méthode est applicable.

La plupart des mémoires qu'il envoya à Paris traitent de questions astronomiques ; ici, nous devons particulièrement citer : ses recherches sur les inégalités des satellites de Jupiter, en 1766 ; son essai sur le problème des trois corps, en 1772 ; son travail sur l'équation séculaire de la lune, en 1776, et son traité sur les perturbations des comètes, en 1778. Tous ces écrits roulent sur des sujets proposés par l'Académie des sciences et chaque fois ses mémoires furent couronnés.

La plupart des travaux qu'il mit au jour au cours de cette période, allèrent cependant à l'Académie de Berlin. Plusieurs d'entre eux ont trait à des questions d'algèbre. Nous pouvons indiquer en particulier les suivants : Sa discussion de la solution en nombres entiers des équations du second degré indéterminées, 1769, et plus généralement des équations indéterminées, 1770 ; son traité sur la théorie de l'élimination, 1770 ; ses mémoires sur un procédé général de résolution d'une équation algébrique d'un degré quelconque, 1770 et 1771 ; il donne toutes les solutions de ses prédécesseurs et les déduit d'un même principe ; mais sa méthode est en défaut pour les équations d'un degré supérieur au quatrième, parce qu'elle suppose alors la résolution d'une équation dont le degré surpasse celui de l'équation proposée ; puis, la résolution complète de l'équation binôme d'un degré quelconque ; enfin, en 1773, son exposition de la théorie des déterminants du second et du troisième ordre, et des invariants.

Plusieurs de ses premiers mémoires traitent de questions relatives à la *théorie des nombres*, sujet négligé mais présentant cependant un singulier attrait. Nous citerons entre autres : la démonstration de ce théorème que tout nombre entier non carré peut toujours être décomposé en deux, trois, ou quatre carrés entiers, 1770 ; sa démonstration du théorème de Wilson dont voici l'énoncé : si *n*

est un nombre premier quelconque, le nombre 1.2.3 ... $(n-1)+1$ est toujours un multiple de n, 1771 ; ses mémoires de 1773, 1775 et 1777 qui donnent les démonstrations de plusieurs résultats énoncés par Fermat et non encore démontrés ; et enfin sa méthode pour déterminer les diviseurs des nombres de la forme $x^2 + ay^2$.

On a également de lui de nombreux articles sur divers points de géométrie analytique. Dans deux d'entre eux, écrits dans les dernières années de sa vie, en 1792 et 1793, il réduisait les équations des quadriques à leurs formes canoniques.

De 1772 à 1785 Lagrange rédigea une longue série de mémoires qui créèrent la science des équations différentielles partielles. Nul, à notre connaissance, ne l'a devancé en ce qui concerne les équations de cette forme. La majeure partie des résultats obtenus furent insérés dans la seconde édition du calcul intégral qu'Euler publia en 1794.

Nous ne parlerons pas ici des notes de Lagrange sur la *mécanique* : les résultats auxquels il est arrivé se trouvent dans la *Mécanique analytique* dont il est question un peu plus loin.

Ses mémoires sur l'*Astronomie* sont nombreux. Voici les plus importants : sur l'Attraction des ellipsoïdes, 1773 : ce mémoire est basé sur un travail de Maclaurin ; sur l'équation séculaire de la lune, 1773, notice remarquable parce qu'on y trouve, introduite pour la première fois, l'idée de potentiel. Le potentiel d'un corps en un point quelconque est la somme de la masse de chaque élément du corps divisée par sa distance au point considéré. Lagrange montra que si le potentiel d'un corps en un point extérieur était connu, l'attraction suivant une direction quelconque pouvait être immédiatement obtenue. La théorie du potentiel fut étudiée dans une note envoyée à Berlin en 1777 ; sur le mouvement des nœuds de l'orbite d'une planète, 1774 ; sur la stabilité des orbites planétaires, 1776 ; deux mémoires dans lesquels il étudia complètement une méthode permettant de déterminer l'orbite d'une comète au moyen de trois observations, 1778 et 1783 ; en réalité cette méthode n'a pas été reconnue pratique, mais la manière de Lagrange de calculer les perturbations à l'aide des quadratures mécaniques a servi de base à la plupart des recherches ultérieures sur ce sujet ; sa détermination des variations séculaires et périodiques des éléments des planètes, 1781 1784. Les limites

extrêmes qu'assignait Lagrange concordent exactement avec celles obtenues plus tard par Leverrier, et il alla aussi loin que le lui permettait la connaissance que l'on avait alors des masses des planètes ; trois mémoires sur la méthode d'interpolation, 1783, 1792 et 1783 ; la partie relative aux différences finies est encore aujourd'hui dans l'état où Lagrange l'a laissée.

Outre ces divers mémoires, Lagrange composa son grand traité de *Mécanique analytique*. Dans cet ouvrage, il établit la loi du travail virtuel, et de ce seul principe fondamental il déduit, à l'aide du calcul des variations, toute la mécanique des solides et des fluides.

L'objet du livre est de montrer que la mécanique entière est implicitement comprise dans un simple principe, et de donner des formules générales permettant d'obtenir un résultat particulier quelconque. La méthode des coordonnées généralisées dont il fit usage est peut-être le résultat le plus brillant de son analyse.

Au lieu de suivre le mouvement de chaque partie individuelle d'un système matériel, comme l'avaient fait d'Alembert et Euler, il montre que si la configuration du système est déterminée par un nombre suffisant de variables, nombre précisément égal à celui des degrés d'indépendance que possède le système, les énergies cinétique et potentielle de ce système peuvent être obtenues en fonction de ces variables, et alors les équations différentielles du mouvement s'en déduisent par une simple différentiation.

Parmi les autres théorèmes, d'importance moindre, donnés dans cet ouvrage, nous pouvons citer cette proposition : que l'énergie cinétique communiquée par des impulsions données à un système matériel soumis à des liaisons données, est un maximum ; enfin, le principe de la moindre action. L'analyse est présentée d'une façon si élégante que sir William Rowan Hamilton appelait cet ouvrage un poème scientifique. Il peut être intéressant de noter cette idée de Lagrange, que la mécanique était en réalité une branche des mathématiques pures comparable à la géométrie à quatre dimensions, à savoir : le temps et les trois coordonnées d'un point de l'espace ; et on raconte que lui-même se vantait de n'avoir pas introduit une seule figure dans l'ouvrage. Tout d'abord aucun éditeur ne voulut se charger de publier le traité de Lagrange ; mais enfin Legendre réussit à persuader une maison de Paris d'entreprendre cette publication, et l'ouvrage parut en 1788.

Frédéric mourut en 1787, et Lagrange qui avait trouvé dûr le climat de Berlin, accepta de grand cœur l'offre que lui faisait Louis XVI de venir s'établir à Paris. Il reçut en même temps des invitations semblables de l'Espagne et de Naples mais les refusa. Il fut accueilli en France avec de grands honneurs et on lui ménagea un appartement spécial au Louvre. Au début de son séjour il eut une attaque de neurasthénie telle, qu'il laissa pendant plus de deux ans sur son bureau, sans même l'ouvrir, un exemplaire imprimé de cette mécanique qui lui avait couté près d'un quart de siècle de labeur. Le désir de connaître les résultats de la Révolution le fit sortir de cette léthargie, mais sa curiosité ne tarda pas à se changer en frayeur quand il vit le développement qu'elle avait pris. Ce fut vers cette époque, 1792, que l'inconcevable tristesse de son existence et sa timidité excitèrent la compassion d'une jeune personne qui voulut se marier avec lui ; elle fut pour lui une femme dévouée, à qui il s'attacha profondément. Bien que le décret d'octobre 1793, qui ordonnait à tous les étrangers de quitter la France, fît une exception nominale en sa faveur, il se préparait à fuir, quand on lui offrit la présidence de la Commission chargée de la réforme des poids et mesures. Il contribua grandement au choix des unités finalement adoptées et c'est grâce à son influence que la subdivision décimale fut acceptée par la Commission de 1799.

Bien que Lagrange ait eu l'intention de quitter la France lorsqu'il en était encore temps, il ne courut jamais aucun danger, et les différents gouvernements révolutionnaires, puis l'Empire, le comblèrent d'honneurs et de distinctions. Comme témoignage frappant du respect dont il était entouré, rappelons qu'en 1796 le Commissaire français d'Italie reçut l'ordre de se rendre en grand apparat auprès du père de Lagrange et de le remercier, au nom de la République, des œuvres de ce fils « qui faisait l'honneur de l'humanité par son génie, et que le Piémont avait la gloire spéciale de le compter parmi ses enfants ». Il faut ajouter que Napoléon, lorsqu'il parvint au pouvoir, encouragea fortement les études scientifiques en France et fut pour la science un généreux bienfaiteur.

En 1795, Lagrange fut désigné pour occuper une chaire de mathématiques à l'Ecole normale nouvellement créée, et qui n'eut qu'une courte existence de quatre mois. Ses cours étaient absolu-

ment élémentaires ; ils ne renferment rien présentant une importance spéciale. Ils furent recueillis au moyen de la sténographie et publiés, pour que les députés puissent être ainsi en mesure de se rendre compte de la façon dont les professeurs s'acquittaient de leurs fonctions.

Lors de la création de l'Ecole polytechnique, en 1797, Lagrange y fut nommé professeur ; les mathématiciens qui eurent la bonne fortune de suivre alors son enseignement disent qu'il était absolument parfait quant à la forme et quant au fond. Partant des principes les plus simples, il conduisait ses auditeurs aux limites du sujet sans même qu'ils s'en aperçussent : par-dessus tout, il insistait auprès de ses élèves sur l'avantage d'employer toujours des méthodes générales et d'user de notations symétriques.

Ses leçons sur le calcul différentiel forment la base de sa *Théorie des fonctions analytiques*, publiée en 1797. Cet ouvrage est le développement d'une idée contenue dans une note qu'il avait envoyée en 1772 aux *Mémoires de Berlin*, et son objet est de substituer au calcul différentiel un groupe de théorèmes basés sur le développement en séries des fonctions algébriques. Une méthode à peu près semblable avait été antérieurement employée par Jean Landen dans son *Residual Analysis*, publié à Londres en 1758. Lagrange pensait pouvoir ainsi éviter les difficultés que les philosophes croyaient voir dans l'exposition alors admise du calcul différentiel, et qui avaient trait à l'emploi des quantités infiniment grandes et infiniment petites. Le livre est divisé en trois parties : dans la première, il traite de la théorie générale des fonctions, et donne une démonstration algébrique du théorème de Taylor ; on a longtemps discuté la rigueur de cette démonstration ; dans la seconde, se trouvent exposées des applications à la géométrie et, dans la troisième, des applications à la mécanique. Un autre traité composé dans le même ordre d'idées, ses *Leçons sur le calcul des fonctions*, parut en 1804. Ces ouvrages peuvent être considérés comme les points de départ des recherches de Cauchy, Jacobi et Weierstrass. Plus tard, Lagrange renonçant à fonder le calcul différentiel sur l'~~étude des formes algébriques~~ (1) revint aux infini-

(1) Récemment, M. Méray, dans son *Traité d'Analyse*, a tenté de remettre en honneur la méthode algébrique. Les résultats modernes ont prouvé qu'une

ment petits : et dans la préface de la seconde édition de la *Mécanique,* qui parut en 1811, il en justifia l'emploi et conclut en disant que « lorsqu'on a bien conçu l'esprit de ce système, et qu'on s'est convaincu de l'exactitude de ses résultats par la méthode géométrique des premières et dernières raisons, ou par la méthode analytique des fonctions dérivées, on peut employer les infiniment petits comme un instrument sûr et commode pour abréger et simplifier les démonstrations ».

Sa *Résolution des équations numériques*, publiée en 1798, fut également le résultat de ses leçons à l'Ecole polytechnique. Dans cet ouvrage, il donne la méthode permettant d'obtenir des valeurs approchées des racines réelles d'une équation au moyen des fractions continues, et il énonce plusieurs autres théorèmes. Une note, qui se trouve à la fin, montre comment le théorème de Fermat, exprimé par la congruence $a^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$ où p est un nombre premier et a un nombre premier avec p, peut servir à donner la solution complète de toute équation binôme algébrique. Il y explique aussi comment l'équation, ayant pour racines les carrés des différences des racines de l'équation primitive, peut être utilisée pour fournir des indications précieuses sur la position et la nature de ces racines.

La théorie des mouvements des planètes avait fait l'objet de quelques-uns de ses plus remarquables *Mémoires de Berlin.* En 1806, le sujet fut repris par Poisson qui, dans une note lue devant l'Académie des Sciences, montra que les formules de Lagrange conduisaient à certaines limites pour la stabilité des orbites. Lagrange, qui était présent, discuta alors la question de nouveau et d'une façon complète, et, dans un mémoire communiqué à l'Académie, en 1808, il expliqua comment on pouvait déterminer par la variation de constantes arbitraires les inégalités périodiques et séculaires de tout système de corps agissant mutuellement les uns sur les autres.

En 1810, Lagrange entreprit une revision complète de la *mécanique analytique*, mais il mourut avant d'avoir pu achever son travail, dont il n'avait fait que les deux tiers environ.

Au physique, Lagrange était de taille moyenne, d'une constitution faible, avait des yeux bleus pâles et un teint très coloré. Comme

telle tentative était vaine. Elle est d'ailleurs sans objet depuis que les mathématiciens contemporains ont réussi à dégager l'analyse infinitésimale de l'intuition géométrique. *

caractère il était nerveux et timide, il détestait la controverse, et pour l'éviter, il autorisait volontiers les autres à prendre pour eux le mérite d'un travail que lui même avait fait.

Lagrange s'intéressa d'une façon toute spéciale à l'étude des mathématiques pures : il chercha et obtint des résultats abstraits d'un ordre supérieur, et fut heureux d'en abandonner les applications aux autres. En fait, une part relativement importante des découvertes de son grand contemporain, Laplace, résulte de l'application des formules de Lagrange aux phénomènes de la nature ; par exemple, les conclusions formulées par Laplace sur la vitesse du son et l'accélération séculaire de la lune, sont implicitement comprises dans les travaux de Lagrange. La seule difficulté pour comprendre Lagrange est de bien saisir le sujet qu'il traite et l'extrême généralité de ses procédés ; mais son analyse est « aussi lucide et lumineuse que symétrique et ingénieuse ».

Un écrivain récent parlant de cet illustre savant dit, avec raison, qu'il prit une part proéminente au progrès de presque toutes les branches des mathématiques pures. Comme Diophante et Fermat, il possédait un génie spécial pour ce qui touche à la théorie des nombres ; il donna les solutions de plusieurs problèmes proposés par Fermat, et fit connaître quelques théorèmes nouveaux. Il créa le calcul des variations. C'est lui qui fit de la théorie des équations différentielles une véritable science, et non une collection d'artifices ingénieux pour la solution de problèmes particuliers. Il perfectionna le calcul des différences finies en donnant la formule d'interpolation qui porte son nom. Mais, par-dessus tout, il dota la mécanique (qu'il considérait, nous l'avons déjà dit, comme une branche des mathématiques pures) de cette généralité et de cette perfection qui furent l'objet constant de tous ses efforts.

Laplace (1). — *Pierre-Simon Laplace* naquit en Beaumont-en-

(1) L'exposé que nous donnons de la vie et des écrits de LAPLACE est basé principalement sur les articles parus dans l'*Englisch Cyclopœdia* et l'*Encyclopedia Britannica*.

Les œuvres de LAPLACE ont été publiées en 7 volumes, par le gouvernement français en 1843-47 ; une nouvelle édition soigneusement revue a été publiée à Paris, en 13 vol. 1878-1905.

* Nous ferons remarquer que cet ouvrage est une traduction, nous laissons à M. Rouse Ball l'appréciation qu'il fait du caractère et de la conduite de Laplace *.

Auge, en Normandie, le 23 mars 1749 et mourut à Paris, le 5 mars 1827. Il était fils d'un petit villageois, peut-être simple laboureur, on ne sait, et il dut son instruction à quelques riches voisins que son intelligence et sa gentillesse intéressèrent. On ne sait rien de son enfance, car lorsqu'il eut acquis la célébrité, il eut la petitesse de caractère de fuir ses proches et ceux qui lui étaient venus en aide. Il paraîtrait que d'élève il devint sous-maître à l'école de Beaumont ; mais s'étant procuré une lettre d'introduction auprès de d'Alembert, il vint à Paris pour tenter la fortune. Une note de Laplace sur les principes de la mécanique attira l'attention de d'Alembert et, sur sa recommandation, il entra comme professeur de mathématiques à l'Ecole militaire.

Son existence étant assurée, Laplace se lança dans des recherches nouvelles et dans les dix-sept années qui suivirent, 1771-1787, il fit paraître la plus grande partie de ses travaux sur l'Astronomie. Il débuta par un mémoire lu devant l'Académie des Sciences de Paris, en 1773, dans lequel il montrait que les mouvements des planètes sont stables ; il y poussait ses calculs jusqu'aux cubes des excentricités et des inclinaisons. Plusieurs notes suivirent, traitant du calcul intégral, des différences finies, des équations différentielles et de questions d'astronomie.

Durant la période de 1784 à 1787, il produisit quelques travaux révélant un génie exceptionnel. Le plus remarquable fut mis au jour en 1784 et inséré dans le troisième volume de la *Mécanique céleste* ; il y détermine d'une façon complète l'attraction d'un sphéroïde sur un point extérieur. Ce mémoire est célèbre, car c'est là que Laplace introduisit en analyse les coefficients qui portent son nom et fit emploi du potentiel ; le nom de potentiel a été introduit dans la science par Green, en 1828.

Si les coordonnées de deux points sont (r, μ, ω) et (r', μ', ω'), et si $r' < r$, l'inverse de leur distance peut être développée suivant les puissances de $\frac{r}{r'}$ et les coefficients respectifs sont les coefficients de Laplace. Leur utilité tient à ce que chaque fonction des coordonnées d'un point sur une sphère peut être développée en une série ordonnée suivant les puissances de $\frac{r'}{r}$. Il faut noter ici que des coefficients semblables, mais pour l'espace à deux dimensions seulement, avaient déjà été signalés par Legendre, avec quelques-

unes de leurs propriétés, dans un mémoire envoyé à l'Académie des Sciences de Paris en 1783. Legendre avait donc de bonnes raisons de se plaindre des procédés de Laplace à son égard, puisqu'il n'est pas nommé dans ce mémoire.

La note signalée plus haut est encore remarquable à cause du développement de l'idée de potentiel empruntée à Lagrange (1), qui en avait fait usage dans ses mémoires de 1773, 1777 et 1780. Laplace montra que le potentiel satisfait toujours à l'équation différentielle

$$\Delta^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0,$$

et le travail qu'il entreprit plus tard sur l'attraction est basé sur ce résultat. La valeur de la quantité $\Delta^2 V$ en un point quelconque indique l'excès de la valeur de V en ce point sur sa valeur moyenne dans le voisinage du point. L'équation de Laplace, ou sa forme plus générale $\Delta^2 V = -4\pi\rho$, apparaît dans toutes les branches de la physique mathématique.

Ce mémoire fut suivi d'un autre sur les inégalités planétaires, formant trois parties publiées en 1774, 1785 et 1786. Son objet principal est l'explication de la « grande inégalité » de Jupiter et de Saturne. Laplace montre, par des considérations générales, que l'action mutuelle de deux planètes ne peut jamais grandement affecter les excentricités et les inclinaisons de leurs orbites ; et que les particularités du système de Jupiter tiennent à ce que les mouvements moyens de Jupiter et de Saturne sont presque proportionnels ; de nouveaux développements sur ces considérations astronomiques firent l'objet de ses deux mémoires de 1788 et de 1789. C'est avec ces données que Delambre a calculé ses tables astronomiques.

En 1787, Laplace donna l'analyse et l'explication de la relation qui existe entre l'accélération lunaire et les changements séculaires de l'excentricité de l'orbite terrestre : cette magnifique étude complétait la démonstration de la stabilité de tout le système solaire, en partant de l'hypothèse qu'il est formé de corps rigides se déplaçant dans le vide.

(1) Voir le *Bulletin* de la Société mathématique de New-York, 1892. Vol. 1. pp. 66-74.

* Laplace, et surtout Lagrange, puis Poisson, ont démontré la *stabilité du système solaire*. D'autres démonstrations sont venues ensuite, d'autres viendront encore. Peut-être même montrera-t-on que le système solaire est instable. Et cependant les démonstrations de stabilité ne seront pas convaincues d'erreurs, car elles sont approximatives. Elles n'ont pas la prétention d'enfermer les éléments des orbites planétaires en des limites infranchissables, mais seulement de montrer que certaines causes paraissent à tort devoir entraîner des variations rapides de ces éléments.

Telle est, comme l'a montré Lagrange, l'action de Jupiter.

Lagrange et Laplace ont montré, de plus, que les excentricités et les inclinaisons des orbites planétaires ne peuvent qu'osciller de façon limitée autour de leurs valeurs moyennes.

Poisson a fait voir ensuite que les lents changements éprouvés par ces valeurs moyennes se réduisaient encore à des oscillations autour d'une valeur moyenne n'éprouvant que des variations mille fois plus lentes.

Delaunay, Tisserand et Gylden ont été plus loin encore que Poisson.

M. Poincaré a fait voir que, en fin de compte, le système solaire fût-il mathématiquement stable, les lois de la thermodynamique entraîneraient sa ruine dans un avenir plus ou moins lointain *.

Tous les mémoires de Laplace auxquels nous venons de faire allusion furent présentés à l'Académie des Sciences de Paris et ils ont été insérés dans les *Mémoires présentés par divers savants*.

Laplace se proposa alors d'écrire un ouvrage qui devait « donner une solution complète du grand problème de mécanique présenté par le système solaire, et amener la théorie à coïncider d'une façon si étroite avec l'observation que les équations empiriques se trouveraient exclues à jamais des tables astronomiques. » Il arriva à ce résultat dans son *Exposition du système du monde* et sa *Mécanique céleste*.

Le premier ouvrage, publié en 1796, donne une explication exacte des phénomènes en négligeant tous les détails. Il contient un sommaire de l'histoire de l'astronomie. Cet ouvrage lui ouvrit les portes de l'Académie Française. On le considère généralement comme un chef-d'œuvre, bien que les dernières parties ne soient pas irréprochables.

L'hypothèse des nébuleuses s'y trouve énoncée. D'après cette hypothèse, le système solaire émane d'une masse globulaire de gaz incandescents tournant autour d'un axe passant par son centre de gravité. A mesure qu'elle refroidissait, cette masse se contractait et des anneaux se détachaient de la périphérie. Ces anneaux à leur tour se refroidirent, et finalement se condensèrent sous forme de planètes, tandis que le noyau central restait et formait le soleil. Certaines corrections imposées par la science moderne ont été apportées à ce système par M. Roche et récemment M. Wolf a présenté une exposition critique de cette théorie. Faye a donné quelques arguments contre l'hypothèse des nébuleuses, dans son ouvrage *Origine du monde*, Paris, 1884. Il y propose une ingénieuse modification ayant pour but d'expliquer les particularités des rotations de Neptune et d'Uranus, et le mouvement rétrograde des satellites de cette dernière planète. La question, d'ailleurs, présente de grandes difficultés ; mais l'opinion moderne incline à accepter l'hypothèse des nébuleuses comme un fait certain ; on reconnaît toutefois que d'autres causes (et principalement les agrégations météoriques et le frottement des marées) ont contribué au développement du système planétaire. L'hypothèse de la nébuleuse avait été esquissée par Kant, en 1755, qui avait également suggéré, comme causes ayant influé sur la formation du système solaire, les agrégations météoriques et le frottement des marées : il est probable que Laplace avait connaissance de la théorie de Kant.

D'après la règle donnée en 1766 par Titius de Wittemberg — mais connue généralement sous le nom de loi de Bode, parce que c'est Johann Elert Bode qui, en 1778, attira l'attention sur elle — les distances des planètes au soleil sont entre elles à peu près dans le rapport des nombres $0+4$, $3+4$, $6+4$, $12+4$, etc, le $n+2^{\text{ième}}$ terme étant $(2^n \times 3)+4$. Il eût été intéressant de savoir si cette loi peut être déduite de l'hypothèse de la nébuleuse ou de toute autre, mais à notre connaissance, un seul écrivain aurait tenté quelques essais sérieux de vérification, et sa conclusion serait que la loi n'est pas suffisamment exacte et ne peut être regardée que comme un moyen commode de se rappeler le résultat général.

Dans sa *Mécanique céleste*, qui forme cinq volumes, Laplace a fait l'étude analytique du système solaire. Les deux premiers volumes,

publiés en 1799, contiennent des méthodes pour calculer les mouvements des planètes, pour déterminer la configuration de leurs orbites, et pour résoudre les problèmes des marées. Le troisième et le quatrième, publiés en 1802 et 1805, donnent l'application de ces méthodes à la construction de plusieurs tables astronomiques. Le cinquième, publié en 1825, est principalement réservé à la partie historique ; il présente cependant en appendices, les résultats des dernières recherches de Laplace. Les découvertes appartenant en propre à Laplace et exposées dans cet ouvrage sont très nombreuses et des plus importantes, mais nous devons dire que beaucoup des résultats donnés sont empruntés à des auteurs qui ne sont pas, ou à peine, mentionnés, et que les conclusions — fruit d'un siècle de patient labeur — sont fréquemment citées comme si elles étaient dues à Laplace seul.

La *Mécanique céleste* est une œuvre admirable, mais l'ouvrage n'est rien moins que facile à lire. Biot, qui aidait Laplace dans la correction des épreuves, raconte que Laplace lui-même était fréquemment dans l'impossibilité de reconstituer les détails reliant la chaîne des raisonnements ; il se contentait quand les conclusions étaient correctes, d'insérer cette formule qui se reproduit constamment : « Il est aisé à voir ». La *Mécanique céleste* n'est pas seulement la traduction des *Principia* dans le langage du calcul différentiel, elle complète, en outre, les parties que Newton n'avait pu qu'esquisser. L'ouvrage récent de F. Tisserand peut être considéré comme l'exposition moderne et classique de l'astronomie, mais le Traité de Laplace restera toujours un modèle et une autorité.

Laplace vint un jour faire hommage à Napoléon d'un exemplaire de son ouvrage, et le récit suivant, absolument authentique, de l'entrevue, peint d'une façon si caractéristique les caractères des deux hommes que nous le donnons en entier. On avait dit à Napoléon que l'ouvrage ne faisait nulle part mention du nom de Dieu et, comme Napoléon aimait à poser des questions embarrassantes, il fit, en acceptant l'ouvrage, cette remarque, « M. Laplace, on me dit que vous avez écrit ce volumineux ouvrage sur le système de l'Univers sans faire une seule fois mention de son Créateur ». Laplace, bien que souple courtisan, avait sur tous les points qui touchaient à sa philosophie, l'obstination du martyr ; il se redressa

aussitôt et répondit brusquement : « Je n'avais pas besoin de cette hypothèse-là. » Napoléon, grandement amusé, fit part de cette réponse à Lagrange, qui s'écria : « Ah ! c'est une belle hypothèse ; elle explique beaucoup de choses. »

En 1812, Laplace fit paraître sa *Théorie analytique des probabilités*. Cette théorie est tout simplement l'expression, en langage mathématique, des lois du sens commun. On sait que la probabilité d'un évènement est le rapport du nombre des cas favorables au nombre total des cas possibles ; la méthode de Laplace revient à traiter les valeurs successives d'une fonction quelconque comme les coefficients du développement d'une autre fonction avec renvoi à une variable différente.

Cette dernière est appelée, par conséquent, la fonction génératrice de la première. Laplace montre comment ces coefficients peuvent être déduits de la fonction génératrice au moyen de l'interpolation. Puis il aborde le problème inverse et des coefficients, il déduit la fonction génératrice, ce qui exige la solution d'une équation aux différences finies. La méthode est lourde et, par suite des progrès de l'analyse, elle est rarement employée aujourd'hui.

Ce traité renferme une exposition de la méthode des moindres carrés, qui témoigne avec quelle maîtrise Laplace maniait l'analyse.

La méthode des moindres carrés, qui a trait à la combinaison des observations répétées avait été donnée, mais sous forme empirique, par Gauss et Legendre ; on trouve, dans le quatrième chapitre du Traité de Laplace, la démonstration exacte du principe qui a depuis servi de base à toute la théorie des erreurs. Elle repose sur une analyse des plus compliquées, imaginée spécialement dans ce but, mais la forme sous laquelle elle est présentée est si peu satisfaisante que, malgré la constatation de l'exactitude constante des résultats, on s'est demandé si Laplace avait réellement triomphé des difficultés d'une question qu'il traite si brièvement et même si peu correctement.

En 1819, Laplace publia un exposé populaire de son ouvrage sur les probabilités. Ce livre remplit, par rapport à la *Théorie des probabilités*, le même rôle que le *Système du monde*, par rapport à la *Mécanique céleste*.

Parmi les découvertes de moindre importance que fit Laplace en

mathématiques pures, nous pouvons rappeler sa discussion (en même temps que Vandermonde, en 1772), de la théorie générale des déterminants ; sa démonstration de ce théorème que : toute équation de degré pair doit avoir au moins un facteur réel du second degré, sa méthode pour ramener l'intégration des équations différentielles linéaires au calcul d'intégrales définies, sa méthode pour l'intégration de l'équation différentielle linéaire du second ordre. Il a été également le premier à examiner les problèmes difficiles impliquant les équations aux différences mêlées, et à démontrer que la solution d'une équation aux différences finies du premier degré et du second ordre pouvait toujours être obtenue sous la forme d'une fraction continue. Outre ces découvertes originales, il détermina, dans sa théorie des probabilités, les valeurs d'un certain nombre d'intégrales définies les plus communes ; et dans le même ouvrage, il donna la démonstration générale du théorème énoncé par Lagrange pour le développement en série de toute fonction implicite au moyen de dérivées.

En physique théorique, la théorie de l'attraction capillaire est due à Laplace. Il accepta l'hypothèse émise par Hauksbee, dans les *Philosophical transactions* pour 1709, que le phénomène est la conséquence d'une force d'attraction insensible aux distances sensibles. L'action d'un solide sur un liquide et l'action mutuelle de deux liquides n'a pas été étudiée à fond par Laplace, mais par Gauss : Neumann en dernier lieu s'occupa de quelques détails. En 1862, Lord Kelvin (Sir William Thomson) fit voir qu'en admettant la constitution moléculaire de la matière, les lois de l'attraction capillaire peuvent se déduire de la loi de Newton sur la gravitation.

Laplace, en 1816, fut le premier à expliquer pourquoi la théorie du mouvement vibratoire de Newton donnait pour la vitesse du son une valeur inexacte. La vitesse réelle est plus grande que celle calculée par Newton : la chaleur développée par la compression subite de l'air en augmente l'élasticité et augmente, par conséquent, la vitesse du son transmis. Les recherches de Laplace en physique expérimentale sont limitées aux expériences qu'il fit, de concert avec Lavoisier, de 1782 à 1784, sur la chaleur spécifique de différents corps.

Il semble que Laplace ait considéré l'analyse uniquement comme un moyen d'aborder les problèmes de la physique, encore que

l'habileté dont il fit preuve pour créer des méthodes analytiques se prêtant aux questions qu'il étudiait soit en quelque sorte phénoménale. Quand les résultats trouvés étaient reconnus exacts, il ne prenait pas la peine d'expliquer la marche suivie pour y arriver; dans ses calculs il ne s'attachait ni à l'élégance ni à la symétrie, et il trouvait suffisant d'arriver, par n'importe quelle voie, à la solution de la question particulière qu'il étudiait.

La réputation de Laplace n'aurait pas eu à souffrir s'il s'était contenté de son œuvre scientifique; mais il convoitait les honneurs de la vie politique. La rapidité avec laquelle il changeait d'opinion politique quand l'occasion l'exigeait, et le talent dont il faisait preuve en la circonstance prêteraient à rire s'il n'avait pas été si servile. A mesure que la puissance de Napoléon croissait, Laplace abandonnait ses principes républicains (qui avaient d'ailleurs passé par bien des nuances, depuis qu'ils reflétaient fidèlement les opinions du parti au pouvoir) et il pria le Premier Consul de lui confier le poste de Ministre de l'Intérieur. Napoléon qui désirait l'appui des savants accueillit favorablement sa requête; mais la carrière politique de Laplace prit fin au bout de six semaines environ. Le mémorial de Napoléon porte cette mention : « Géomètre de premier rang, Laplace ne tarda pas à se montrer administrateur plus que médiocre; dès son premier travail nous reconnumes que nous nous étions trompés. Laplace ne saisissait aucune question sous son véritable point de vue : il cherchait des subtilités partout, n'avait que des idées problématiques, et portait enfin l'esprit des *infiniment petits* jusque dans l'administration. » Bien que Laplace ne fût plus ministre, il était avantageux pour le gouvernement de conserver son attachement; il fut donc nommé sénateur et en tête du troisième volume de la *Mécanique céleste* il inséra une note pour dire que, de toutes les vérités exposées dans l'ouvrage, la plus précieuse, pour l'auteur, était la déclaration qu'il faisait en ce moment de son dévouement pour le puissant protecteur de la paix de l'Europe. Cette note disparut des exemplaires vendus après la Restauration. En 1814, la chute de l'empire était imminente; Laplace se hâta d'offrir ses services aux Bourbons, et lors de la Restauration, il fut récompensé par le titre de Marquis : on peut se rendre compte, en lisant Paul-Louis Courier, du mépris que ses collègues plus loyaux éprouvèrent pour sa conduite.

Ses connaissances servirent utilement les nombreuses commissions scientifiques dont il fit partie et contribuèrent probablement à faire oublier son peu de fidélité politique ; la petitesse de son caractère ne saurait cependant nous faire perdre de vue les services immenses qu'il rendit à la science.

Que Laplace ait été vain et égoïste, ses plus chauds admirateurs eux-mêmes ne le nient pas ; sa conduite à l'égard des bienfaiteurs de sa jeunesse et de ses amis politiques fut ingrate et méprisable ; mais le fait de s'être approprié les résultats obtenus par ceux qui étaient relativement peu connus, et qui paraît parfaitement établi, est absolument sans excuse. Trois de ceux qu'il traita ainsi se firent plus tard un brillant renom (Legendre et Fourier en France, Young en Angleterre) et n'oublièrent jamais l'injustice dont ils avaient été victimes. D'un autre côté, on peut dire que dans certaines circonstances Laplace fit preuve d'indépendance de caractère, et qu'il ne dissimula jamais ses idées religieuses, philosophiques ou scientifiques, si blâmables qu'elles pussent paraître aux yeux des détenteurs du pouvoir. Ajoutons encore que sur la fin de sa vie, et surtout pour ses élèves, Laplace se montra à la fois généreux et juste ; il lui arriva même une fois de détruire une note pour laisser à un de ses élèves le mérite d'une découverte.

Legendre. — *Adrien-Marie Legendre* naquit à Toulouse le 18 septembre 1752, et mourut à Paris le 10 janvier 1833. Les principaux événements de sa vie sont très simples et peuvent se résumer brièvement. Il fit ses études au Collège Mazarin, à Paris, et fut nommé, en 1777, professeur à l'Ecole militaire de Paris ; choisi ensuite pour faire partie de la Commission anglo-française de 1787, chargée de relier géodésiquement Greenwich et Paris ; devenu membre de plusieurs des commissions publiques qui fonctionnèrent de 1792 à 1810. il fut nommé professeur à l'Ecole normale en 1795 ; plus tard, il occupa quelques emplois gouvernementaux de peu d'importance.

Laplace s'employa avec acharnement à l'empêcher d'obtenir un emploi public quelconque et Legendre, qui était un timide, accepta l'obscurité à laquelle l'hostilité de son collègue le condamnait.

Les travaux de Legendre sont d'un ordre supérieur ; ils se classent immédiatement après ceux de Lagrange et de Laplace, bien qu'ils

ne présentent pas le même caractère d'originalité. Ses principaux ouvrages sont : sa *Géométrie*, modèle du genre * mais défigurée par d'obscurs commentateurs *, sa *Théorie des nombres*, son *Calcul Intégral* et ses *Fonctions elliptiques*. Ils renferment la substance de divers mémoires qu'il présenta sur ces sujets. Il écrivit, en outre, un traité où il donna la règle des moindres carrés, et deux groupes de mémoires, l'un sur la théorie des attractions et l'autre sur les opérations géodésiques.

Les mémoires sur les attractions sont analysés et discutés dans l'ouvrage de Todhunter, *History of the theories of Attraction*. Le plus ancien, qui fut présenté en 1783, traite de l'attraction des sphéroïdes. On y trouve introduits les coefficients de Legendre qui sont des cas particuliers des coefficients de Laplace ; il contient également la solution d'un problème où il fait usage du potentiel. Le second mémoire parut en 1784, et traite de la forme d'équilibre d'une masse liquide à peu près sphérique, animée d'un mouvement de rotation. Le troisième, écrit en 1786, traite de l'attraction des ellipsoïdes de mêmes foyers. Dans le quatrième, il étudie la forme que prendrait une planète fluide et la loi de variation de sa densité.

Ses notes sur la géodésie sont au nombre de trois et furent présentées à l'Académie en 1787 et 1788. Le résultat le plus important auquel il arrive est celui qui permet de traiter un triangle sphérique comme un triangle plan, sous condition d'apporter aux angles certaines corrections. En corrélation avec ce sujet, il s'occupe beaucoup des lignes géodésiques.

La méthode des moindres carrés se trouve énoncée dans ses *Nouvelles Méthodes* publiées en 1806, ouvrage auquel des suppléments ont été ajoutés en 1810 et 1820. Gauss était arrivé indépendamment au même résultat, l'avait utilisé en 1795, et l'avait publié en 1809. Laplace est le plus ancien auteur qui en ait donné une démonstration, en 1812.

Des autres ouvrages de Legendre, le plus connu est celui intitulé : *Eléments de géométrie*, qui fut publié en 1794, et qui, à une certaine époque, était très répandu sur le Continent où il avait remplacé Euclide. La dernière édition contient les éléments de la trigonométrie et des démonstrations de l'incommensurabilité de π et de π^2. Un appendice sur la question difficile de la théorie des pa-

rallèles, paru en 1803, a été incorporé dans la plupart des éditions qui suivirent.

Sa *Théorie des nombres* fut publiée en 1798 et des appendices y furent ajoutés en 1816 et 1825 : la troisième édition parut en deux volumes en 1830 : elle contient l'ensemble de ses recherches sur ce sujet ; elle est restée toujours classique (¹). On peut dire que Legendre a conduit la théorie des nombres aussi loin qu'il était possible de le faire au moyen de l'algèbre ordinaire ; la création d'une arithmétique supérieure, formant une branche distincte des mathématiques, devait être l'œuvre de ses successeurs.

La loi de réciprocité quadratique, qui établit une relation entre deux nombres premiers impairs quelconques, se trouve démontrée pour la première fois dans cet ouvrage, mais ce résultat avait déjà été énoncé dans un mémoire de 1785. Gauss appelait cette proposition « le joyau de l'arithmétique » et on n'en trouve pas moins de six démonstrations différentes dans ses œuvres. Voici le théorème en question.

Si p est un nombre premier et n un nombre premier avec p, nous savons que l'expression $n^{\frac{1}{2}(p-1)}$ divisée par p donne pour reste $+1$ ou -1. Legendre représentait ce reste par $\left(\frac{n}{p}\right)$. Quand le reste est $+1$, il est possible de trouver un nombre carré parfait qui, divisé par p, donne pour reste n, c'est-à-dire que n est un résidu quadratique de p. Quand le reste est -1, un tel nombre carré parfait n'existe pas, et n est un non-résidu de p. La loi de réciprocité quadratique est exprimée par ce théorème que, si a et b sont deux nombres premiers impairs quelconques, on a :

$$\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{b}{a}\right) = (-1)^{\frac{1}{4}(a-1)(b-1)}.$$

Ainsi, si b est un résidu de a, a est également résidu de b, à moins que les nombres premiers a et b soient tous les deux de la forme $4m + 3$. En d'autres termes, si a et b sont des premiers impairs, nous savons que

$$a^{\frac{1}{2}(b-1)} \equiv \pm 1 \,(\text{mod. } b), \qquad \text{et} \qquad b^{\frac{1}{2}(a-1)} \equiv \pm 1 \,(\text{mod. } a);$$

et que, par la loi de Legendre, les deux signes seront ensemble

(¹) Réimprimée en 1900. Paris, Hermann, 2 vol. in 4°.

plus ou moins, hors le cas où a et b seraient tous deux de la forme $4m + 3$. Dès lors, si un nombre premier impair est un non-résidu d'un autre, ce dernier sera à son tour un non-résidu du premier. Gauss et Kummer ont, plus tard, démontré des lois semblables de réciprocité cubique et biquadratique : on a basé sur leurs recherches une branche importante de la théorie des nombres.

L'ouvrage de Legendre contient encore cette utile proposition qui permet, quand la chose est possible, de réduire une équation indéterminée du second degré à la forme $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$. Legendre examine aussi les nombres qui sont les sommes de trois carrés ; et il démontre enfin (art. 404) que le nombre des nombres premiers moindres que n est approximativement.

$$\frac{n}{\log_e n - 1{,}08366}.$$

Les *Exercices de calcul intégral* parurent en trois volumes en 1811, 1817 et 1826. Le troisième volume est consacré aux fonctions elliptiques ainsi que la plus grande partie du premier ; toutes ces matières se trouvent finalement reproduites dans les *Fonctions elliptiques*. Le reste de l'ouvrage se rapporte à des sujets de caractères variés. On y trouve, entre autres, l'intégration par séries des intégrales définies et, en particulier, une discussion bien étudiée des fonctions Bêta et Gamma.

Le *Traité des fonctions elliptiques* fut publié en deux volumes en 1825 et 1826 ; et c'est le plus important des ouvrages de Legendre. Quelques semaines avant sa mort, il compléta l'œuvre par un troisième volume qui contient trois mémoires sur les recherches d'Abel et de Jacobi. Les premières études de Legendre sur ce sujet se trouvent dans une note écrite en 1786, sur les arcs elliptiques, mais là, comme dans plusieurs autres notes, il traitait simplement la question comme problème de calcul intégral, sans voir qu'elle pouvait être considérée comme une trigonométrie supérieure, constituant une branche distincte de l'analyse. Il construisit des tables d'intégrales elliptiques. L'exposition moderne du sujet est basée sur les travaux d'Abel et de Jacobi. La supériorité de leurs méthodes fut reconnue de suite par Legendre, et l'un des derniers actes de sa vie fut de préconiser ces découvertes malgré qu'elles dussent avoir pour effet, il s'en rendait bien compte, de faire oublier ses propres recherches.

Ce que nous venons de dire doit nous rappeler, et nous insistons à dessein sur ce point, que Gauss, Abel, Jacobi et quelques autres des mathématiciens mentionnés dans le chapitre suivant furent contemporains de l'Ecole Française.

Tours ? (Darboux)

* **Meusnier.** — *Jean-Baptiste-Marie-Charles Meusnier de la Place*, naquit à Paris le 19 juin 1754 et mourut à Cassel le 17 juin 1793. Il fut officier du génie et entra en 1784 à l'Académie des sciences. On lui doit d'importants travaux géométriques et tout particulièrement un théorème bien connu qui complète les recherches d'Euler sur la courbure des sections normales à une surface : le rayon de courbure d'une section oblique d'une surface est la projection sur le plan de cette section du rayon de courbure de la section normale faite par la tangente à la section oblique. Il a fait de beaux travaux sur la navigation aérienne qui doivent être prochainement mis en lumière par un savant français *.

* **Lhuillier.** — *Simon-Antoine-Jean Lhuillier,* naquit à Genève le 24 avril 1750 et mourut le 28 mars 1840. Il fut d'abord précepteur en Pologne des enfants du prince Czartoriski et obtint en 1786 un prix sur un sujet proposé par l'Académie de Berlin; il s'agissait de donner une définition claire et précise de l'infini mathématique.

On lui doit un nombre considérable de mémoires concernant la théorie des polygones et des polyèdres, les séries, les questions de probabilité, la géométrie du cercle et de la sphère et aussi deux ouvrages remarquables : *Eléments d'arithmétique et de géométrie, Eléments d'analyse géométrique* *.

Pfaff. — Citons encore un autre savant dont les travaux se rapportent surtout au calcul intégral, *Jean-Frédéric Pfaff,* né à Stuttgart le 22 décembre 1765, et mort à Halle, le 21 avril 1825, Laplace en parle comme du mathématicien le plus éminent de l'Allemagne au commencement du XIXe siècle, appréciation qui aurait été assez exacte si Gauss n'avait pas existé.

Pfaff fut le précurseur de l'Ecole allemande qui, avec Gauss et ses successeurs, ouvrit de nouvelles voies au développement des mathématiques au XIXe siècle. Il était ami intime de Gauss, et en

fait, ces deux mathématiciens vécurent ensemble à Helmstad pendant l'année 1798, lorsque Gauss, eut fini ses cours universitaires. L'œuvre capitale de Pfaff fut ses *Disquisitiones Analyticæ*, ouvrage inachevé sur le calcul intégral publié en 1797 ; et ses plus importants mémoires traitent soit du calcul différentiel, soit des équations différentielles : sur ce dernier sujet, sa note lue devant l'Académie de Berlin, en 1814, est remarquable.

* **Agnesi.** — *Marie-Gaëtane Agnesi* naquit à Milan en 1718 et mourut en 1799. Elle était douée d'une remarquable facilité pour les mathématiques. Elle suppléa son père dans sa chaire de mathématiques à Bologne. Elle publia plusieurs ouvrages qui furent traduits en français *.

* **Lacroix.** — *Sylvestre-François Lacroix* naquit à Paris en 1765 et y mourut en 1741. Il obtint à dix-sept ans une chaire à l'école des gardes de marine à Rochefort et devint, en 1799, professeur à l'Ecole polytechnique. Il a laissé divers ouvrages estimés, entre autres un Traité de calcul différentiel et intégral en 3 volumes, où il expose la science de son temps *.

* **Waring.** — *Edouard Waring* naquit en 1734 et mourut en 1798. Il fut nommé, à vingt-sept ans à la chaire Lucasian, que Newton avait illustrée. Il continua avec bonheur l'œuvre des Bernouilli et d'Euler. Ses principaux travaux sont : les *Miscellanea analytica* (1762), *Proprietates algebricarum curvarum* (1762), *Meditationes algebraïcæ* (1772), *Meditationes analyticæ* (1776). Il donna une formule, qui porte son nom et qui exprime la somme $x^n + y^n$ en fonction, $x + y$ et de xy *.

* **Malfatti.** — *Jean-François-Joseph Malfatti* naquit à Trente en 1731 et mourut à Ferrare à 1807. Il a laissé plusieurs travaux importants : *De œquationibus quadratocubicis diquisitio analytica*, où il introduisit l'idée des résolvants ; *Memoria sopra uno problema stereometrico*, où il s'agit de pratiquer dans un prisme triangulaire trois cavités cylindriques, telles que les trois cylindres aient même hauteur que le prisme et que leurs volumes soient maximum *.

CRÉATION DE LA GÉOMÉTRIE MODERNE

Tandis que Euler, Lagrange, Laplace et Legendre perfectionnaient l'analyse, d'autres membres de l'Ecole française étendaient le champ de la géométrie par des méthodes semblables à celles employées antérieurement par Desargues et Pascal. La renaissance de l'étude de la géométrie synthétique est due surtout à Poncelet, mais il ne faut oublier ni Carnot ni surtout l'illustre Monge. Son grand développement dans des temps plus récents est principalement dû à Steiner, von Staudt et Cremona.

Monge (1). — *Gaspard Monge*, comte de Péluse, naquit à Beaune le 10 mai 1746, et mourut à Paris le 28 juillet 1818. Il était fils d'un petit marchand ambulant, et fit ses études chez les Oratoriens, où plus tard, il revint comme sous-maître. Un plan de la ville de Beaune qu'il avait fait tomba entre les mains d'un officier et celui-ci usa de son influence auprès des autorités militaires pour le faire entrer à l'Ecole de Mézières, destinée à former les officiers du génie. Cependant sa naissance s'opposant à ce qu'il reçut une commission d'officier, on l'autorisa à suivre les cours de l'Ecole annexe où on enseignait l'arpentage, le nivellement et le dessin. Il eut enfin un jour l'occasion de se faire connaître. Ayant eu à dresser le plan d'une forteresse d'après des données résultant de certaines observations, il fit son travail en se servant de constructions géométriques. Tout d'abord l'officier de service refusa de l'accepter, parce qu'il n'avait pas fait usage des méthodes usitées, mais la supériorité de la méthode de Monge parut si évidente qu'il revint sur sa première décision. Plus tard, en 1768, Monge fut nommé professeur mais il était entendu que son enseignement de la géométrie descriptive devait rester secret et limité aux officiers d'un certain grade.

En 1780, il fut désigné pour une chaire de mathématiques à Paris, ce qui lui procura, avec les fonctions qu'il exerçait en pro-

(1) Voir *Essai historique sur les travaux... de Monge*, par F. P. C. Dupin, Paris 1819; également la *Notice historique sur Monge* par B. Brisson, Paris, 1818.

vince, un honnête revenu. Le plus ancien mémoire ayant quelque importance qu'il ait communiqué à l'Académie des sciences de Paris, date de 1781 et a pour objet la discussion des *lignes de courbure* d'une surface. Elles avaient été étudiées pour la première fois en 1760 par Euler, qui les définissait comme « les sections normales dont la courbure était un maximum ou un minimum ». Monge les considérait comme le lieu des points de la surface où les normales successives se rencontrent, et en obtenait ainsi l'équation différentielle générale. En 1795, il appliqua ses résultats aux quadriques à centre. En 1786, il publia son ouvrage bien connu sur la statique.

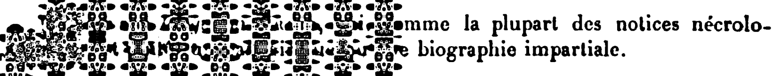
Monge fut un ardent partisan des doctrines de la révolution. En 1792, il devint ministre de la Marine et aida le Comité du Salut public en utilisant sa science pour la défense de la République. Dénoncé quand les Terroristes arrivèrent au pouvoir, il n'échappa à la guillotine que par une fuite hâtive. A son retour, en 1794, il fut nommé professeur à l'Ecole normale, dont l'existence fût si éphémère, et où il enseigna la géométrie descriptive ; ses leçons furent publiées conformément au règlement de l'école. Il se rendit en Italie en 1796 comme membre de la Commission chargée de visiter les diverses villes de ce pays pour les contraindre à offrir à la République française, au lieu de contributions, les tableaux, les sculptures et les autres ouvrages d'art qu'elles pouvaient posséder. En 1798, il accepta une mission à Rome et, l'ayant remplie. il rejoignit Napoléon en Egypte. Enfin, il se réfugia en France après la victoire navale de l'Angleterre.

Monge s'établit alors à Paris et fut nommé professeur à l'Ecole polytechnique où il fit des cours sur la géométrie descriptive ; ses leçons furent publiées en 1800. Cet ouvrage contient des propositions sur la forme et la position relative des figures géométriques obtenues à l'aide des transversales. La théorie de la perspective y est étudiée ; elle comprend l'art de représenter, suivant deux dimensions, les objets géométriques à trois dimensions, problème résolu ordinairement par Monge au moyen de deux figures, le plan et l'élévation. Il montra également que la solution d'un problème subsiste, même si certaines quantités introduites subsidiairement deviennent imaginaires. A l'avènement de la Restauration, on lui enleva toutes ses fonctions et il fut privé des honneurs qui

… grâce agit profondément sur sa
… nps.

… t insérés dans son ouvrage *Ap-*
…, publié en 1805 et dont la qua-
… revue par lui peu de temps
… x travaux sur l'intégration des
… les du second ordre, et sa déter-
… e l'ellipsoïde qui faisait l'admi-

… *Marguerite Carnot*, né à Nolay
… ourg, le 22 août 1823, fit ses
… e Commission dans le corps du
… n étant à l'armée, il continuait
… avaient pour lui beaucoup d'at-
… é en 1784, traite des machines.
… la chute des corps y est entrevu,
… de ce théorème, que l'énergie
… des corps mous, y est donnée.
… 789, il se lança dans la politique.
… omité du Salut public et les vic-
… n grande partie dues à l'orga-
… line qu'il sut développer dans
… de tous les gouvernements, jus-
… au Coup d'Etat de Napoléon, il
… à Genève, et fit paraître en 1797
… *itésimal*. En 1802, il prêta son
… convictions républicaines ne lui
… nctions. En 1803, il publia sa
… est plutôt un traité de géométrie
… scriptive ; il contient aussi une
… fication géométrique des racines
… ue. En 1814, il offrit ses services
… n l'Empire ; et lors de la Restau-



… mme la plupart des notices nécrolo-
… e biographie impartiale.



Poncelet (¹). — *Jean-Victor Poncelet*, né à Metz le 1ᵉʳ juillet 1788 et mort à Paris le 22 décembre 1867, était officier du génie. Prisonnier de guerre lors de la retraite de Moscou en 1812, il occupa ses loisirs forcés à retrouver les éléments de géométrie qui, bien des années auparavant lui avaient été enseignés, et à approfondir quelques idées neuves que ce travail lui avait suggérées. Ses très remarquables découvertes furent exposées plus tard dans son *Traité des propriétés projectives des figures*, publié en 1822, et qui fut pendant de longues années le seul ouvrage propre à initier les mathématiciens à cette géométrie moderne que Poncelet a la gloire d'avoir fondée.

* L'objet principal de ce grand ouvrage est d'établir certaines relations entre deux figures qui sont la perspective l'une de l'autre, ce qui permet de ramener la recherche des propriétés d'une figure à celle des propriétés d'une figure plus simple. Par exemple, deux cercles donnent par projection conique deux courbes du second ordre, dont les propriétés découlent de celles des cercles.

En perspective, ces figures sont situées dans deux plans différents. Il est plus simple de supposer l'un des plans rabattus sur l'autre. Les deux figures sont alors dites *homologiques l'une de l'autre*; le point de concours des droites qui joignent les points correspondants est le *centre* d'homologie et l'arête commune l'*axe d'homologie*. Le centre et l'axe d'homologie définissent la figure homologique d'une figure donnée.

Les principales propriétés des coniques que Poncelet découvrit au moyen de l'homologie sont celles-ci : *les foyers d'une conique peuvent être considérés comme des cercles de rayon nul ayant un double contact avec la conique*, définition qui a permis à Plücker de généraliser la notion de foyer ; *lorsque plusieurs coniques ont mêmes sécantes communes, si l'on inscrit dans l'une de ces courbes un polygone dont tous les côtés moins un soient tangents aux autres courbes puis que l'on déforme le polygone en faisant glisser ses sommets sur la première conique et ses côtés sur les autres coniques, le côté libre et toutes les diagonales du polygone rouleront sur d'autres coniques ayant mêmes sécantes communes avec les proposées.* Jacobi

(¹) Voir *La vie et les ouvrages de Poncelet*, par I. Didion et C. Dupin, Paris. 1869.

[illegible] e théorème aux fonctions ellip-

[illegible] en outre l'exposé de la *théorie*
[illegible] une loi qui reçut de Gergonne

[illegible] plusieurs mémoires destinés à

[illegible] fférent, on lui doit encore un
[illegible]; un mémoire sur les moulins
[illegible] machines et les instruments
[illegible] de l'Exposition internationale
[illegible] paraître de nombreux articles
[illegible] remarquable d'entre eux donne
[illegible] de continuité, des solutions
[illegible] la résolution des problèmes de

[illegible] eut, sur plusieurs points, être
[illegible] Il serait toutefois prématuré de
[illegible]

[illegible] IYSIQUE MATHÉMATIQUE

[illegible] se sont principalement occupés
[illegible] nomie. Cauchy et les mathéma-
[illegible] ous paraissent appartenir à une
[illegible] parmi les mathématiciens mo-
[illegible] urier et Poisson sont, avec la ma-
[illegible] successeurs directs de Lagrange
[illegible] n est exacte, il semblerait que
[illegible] nçaise dirigèrent principalement
[illegible] de l'analyse mathématique à la
[illegible] n occuper, nous devons parler
[illegible] porains, qui se sont distingués
[illegible] expérimentale, et dont la valeur
[illegible] itable que tout récemment. Les
[illegible] et Young.



Cavendish ([1]). — *Henry Cavendish* naquit à Nice le 10 octobre 1731, et mourut à Londres, le 4 février 1810. Son goût pour les recherches scientifiques et mathématiques prit naissance à Cambridge, où il résida de 1749 à 1753. Il est surtout célèbre par les expériences qu'il fit en 1798 pour déterminer la densité de la terre par la comparaison de l'attraction terrestre avec celle de deux balles de plomb : il trouva ainsi que la densité de la terre vaut environ cinq fois et demie celle de l'eau. Ces expériences réalisèrent une idée de Jean Michell (1724-1793), membre du collège de la Reine à Cambridge, qui mourut avant d'avoir pu la mettre à exécution.

Rumford ([2]). — *Sir Benjamin Thomson, Comte Rumford*, né à Concord le 26 mars 1753 et mort à Auteuil le 21 août 1815, était de descendance anglaise et combattit avec les royalistes dans la guerre de Sécession, en Amérique. La paix une fois conclue, il s'établit en Angleterre, mais il entra dans la suite au service de la Bavière, où son talent d'organisation le fit grandement apprécier dans les affaires civiles et militaires. Plus tard, il résida de nouveau en Angleterre et y fonda l'Institution Royale. Ses notes ont été communiquées en majeure partie à la Société Royale de Londres ; la plus importante est celle où il montre que la chaleur se convertit en travail, et réciproquement que le travail engendre de la chaleur.

Young ([1]). — *Thomas Young*, qui naquit à Milverton le 13 juin 1773 et mourut à Londres le 10 mai 1829, est un des physiciens les plus éminents de son époque. Il fut un enfant prodige versé dans les langues modernes et la littérature, aussi bien que dans les sciences; il conserva toujours ses goûts littéraires et ce fut lui qui, en 1819, donna le premier l'idée de la méthode permettant de déchiffrer les hiéroglyphes égyptiens ; on sait

([1]) Un récit de sa vie par G. Wilson se trouve dans le premier volume de la publication de la société Cavendish, Londres, 1851.

Ses *Electrical Researches* furent éditées par J.-C. Maxwell et publiées à Cambridge en 1879.

([2]) Une édition des œuvres de Rumford, préparée par George Ellis et accompagnée d'une biographie, fut publiée par l'Académie américaine des sciences à Boston en 1872.

quel heureux usage en fit J.-F. Champollion. Young se destinait à la médecine et, après avoir suivi des cours à Edimbourg et à Göttingue, il entra au Collège Emmanuel à Cambridge, où il prit ses grades en 1799. Sa carrière comme médecin ne fut pas particulièrement heureuse et sa maxime favorite « qu'un diagnostic médical est simplement une balance de probabilité » n'était pas très goûtée de ses malades, qui demandaient une certitude en échange des honoraires payés. Fort heureusement pour lui, il possédait une grande fortune. Plusieurs mémoires, adressés à diverses sociétés savantes en 1798 et les années suivantes, prouvent qu'il a été un mathématicien de grand talent ; mais les recherches qui l'ont rendu célèbre sont celles où il établit la loi de l'interférence des ondes lumineuses. Il suggéra ainsi le moyen de surmonter les principales difficultés qui s'étaient opposées jusqu'alors à l'adoption de la théorie des ondulations.

Dalton (2). — Un autre savant renommé de la même période fut *Jean Dalton*, qui naquit dans le Cumberland le 5 septembre 1766 et mourut à Manchester le 27 juillet 1844. Dalton étudia la tension des vapeurs et la loi de dilatation des gaz soumis à des changements de température. En chimie, il est le créateur de la théorie atomique.

On peut conclure de cet aperçu qu'au commencement du xixe siècle l'Ecole, des physiciens anglais s'intéressait surtout à la science expérimentale. En réalité, aucune théorie satisfaisante ne pouvait être établie sans une observation soigneuse des faits. Les plus éminents physiciens français de la même époque furent Fourier, Poisson, Ampère et Fresnel.

Fourier (3). — Le premier de ceux-ci fut *Jean-Baptiste-Joseph Fourier*, qui naquit à Auxerre le 21 mars 1768 et mourut à Paris,

(1) Ses œuvres réunies avec un mémoire sur sa vie furent publiées par G. Peacock, 4 volumes, Londres, 1855.

(2) Voir l'ouvrage *Memoir of Dalton*, par R. A. Smith, Londres, 1856 ; et la notice de W.-C. Henry dans les *Cavendish Society transactions*, Londres, 1854.

(3) Une édition de ses œuvres, préparée par G. Darboux, a été publiée en 2 volumes, Paris 1888-1890.

le 16 mai 1830. Il était fils d'un tailleur et fit ses études chez les Bénédictins. A cette époque, comme c'est encore le cas en Russie, les commissions des corps scientifiques de l'armée étaient réservées aux fils de famille; Fourier ne pouvant, par le fait de sa naissance, aspirer à un pareil emploi, accepta une chaire de mathématiques à l'Ecole militaire. Il prit une part active au mouvement révolutionnaire, et fut récompensé par sa nomination en 1795 comme professeur à l'Ecole normale et, dans la suite, à l'Ecole polytechnique.

Fourier accompagna Napoléon dans son expédition d'Egypte, en 1798, et fut nommé gouverneur de la Basse-Egypte. Les communications avec la France étant coupées par la flotte anglaise, il organisa des ateliers où l'armée française pouvait s'approvisionner de munitions de guerre. Il adressa également plusieurs mémoires mathématiques à l'Institut d'Egypte, que Napoléon avait fondé au Caire. L'Angleterre étant victorieuse après la capitulation du général Menou en 1801, Fourier revint en France, où il fut nommé préfet de Grenoble, et c'est là qu'il fit ses expériences sur la propagation de la chaleur. Il se rendit à Paris en 1816. En 1822, il publia sa *Théorie analytique de la chaleur* basée sur la loi de refroidissement de Newton : à savoir, que la diffusion de la chaleur entre deux molécules adjacentes est proportionnelle à la différence infiniment petite de leurs températures. Il montre dans cet ouvrage, * mais avec une rigueur contestable *, que toute fonction continue ou discontinue d'une variable peut être développée en une série des sinus des multiples de la variable, résultat qui est constamment utilisé dans l'analyse moderne. Lagrange avait donné des cas particuliers du théorème, et avait laissé entendre que la méthode était générale, mais il n'avait pas poursuivi l'étude du sujet. Dirichlet, le premier, donna une démonstration satisfaisante de cette proposition.

Fourier laissa un travail inachevé sur les équations, qui fut repris par Navier et publié en 1831 ; il contient beaucoup de questions originales et on y trouve, en particulier, un théorème important sur les racines d'une équation algébrique. Lagrange avait montré comment les racines d'une équation algébrique pouvaient être séparées à l'aide d'une équation ayant pour racines les carrés des différences des racines de l'équation primitive. Budan,

en 1807 et 1811, avait énoncé le théorème généralement connu sous le nom de Fourier, mais sa démonstration n'était pas absolument satisfaisante. La démonstration de Fourier est généralement donnée dans les livres classiques sur la théorie des équations. La solution définitive du problème fut donnée en 1829 par Jacques-Charles-François Sturm (1803-1855).

Sadi Carnot (¹). — Parmi les contemporains de Fourier qui s'occupèrent de la théorie de la chaleur, le plus remarquable fut *Sadi Carnot*, fils du géomètre éminent dont il a été question plus haut. Sadi Carnot naquit à Paris en 1796 et y mourut, en 1832, d'une attaque de choléra ; il fut officier dans l'armée française. En 1824, il fit paraître un ouvrage peu étendu intitulé *Réflexions sur la puissance motrice du feu* dans lequel il cherchait à déterminer de quelle façon la chaleur produisait son effet mécanique. Il commit l'erreur d'admettre la matérialité de la chaleur, mais son essai peut être considéré comme une introduction à la thermodynamique moderne.

Poisson (²). — Siméon-Denis Poisson, né à Pithiviers le 21 juin 1771 et mort à Paris, le 25 avril 1840, est presque aussi remarquable que Fourier pour les applications qu'il sut faire des mathématiques, soit à la mécanique, soit à la physique. Son père, qui avait été simple soldat, fut chargé, en se retirant du service, d'un petit emploi administratif dans son village natal ; quand la révolution éclata, il semble s'être chargé de l'administration du pays. Il ne fut pas inquiété, et jouissait même d'une certaine importance locale. L'enfant fut placé en nourrice, et il avait l'habitude de raconter que son père étant venu un jour le voir, le trouva suspendu à une corde attachée à un clou ; la nourrice, pour aller se promener, s'en était ainsi débarrassé. En rentrant, elle expliqua que c'était une précaution indispensable, pour l'empêcher d'être dévoré par les porcs qui erraient sur le plancher. Poisson ajoutait en plaisantant que les efforts qu'il faisait le balançaient constamment d'un

(¹) Un récit de sa vie et une traduction anglaise de ses *Réflexions* ont été publiés par R.H. Thurston, Londres et New-York, 1890.

(²) Arago a publié une biographie de Poisson, à la suite de laquelle se trouve la liste de ses mémoires.

côté et d'autre et qu'il avait ainsi commencé, dès sa plus tendre enfance, ses études sur le pendule qui devaient tant l'occuper pendant son âge mûr.

Son père commença son instruction. Son oncle offrit de l'initier à l'art de la médecine, et comme début lui apprit à piquer les veines de feuilles de choux avec une lancette. Quand il eut acquis une habileté suffisante, on l'autorisa à poser des vésicatoires ; mais une des premières fois qu'il lui arriva d'opérer seul, le patient mourut au bout de quelques heures et, bien que tous les praticiens de l'endroit lui aient donné l'assurance que « l'événement était des plus fréquents », il déclara qu'il ne voulait plus exercer cette profession.

A son retour chez lui après cette aventure, Poisson découvrit parmi les papiers officiels envoyés à son père une copie des questions posées à l'Ecole polytechnique, et aussitôt il entrevit sa voie. A l'âge de dix-sept ans, il entra à l'Ecole polytechnique et son intelligence excita l'intérêt de Lagrange et de Laplace qui restèrent toujours ses amis. Un mémoire sur les différences finies qu'il composa lorsqu'il n'avait que dix-huit ans, donna lieu à un rapport si favorable de Legendre, qu'on en ordonna la publication dans le *Recueil des savants* étrangers. Aussitôt qu'il eut terminé ses études, il fut nommé professeur à l'Ecole et durant sa vie il continua à occuper divers emplois scientifiques officiels sans négliger pour cela l'enseignement. Il était quelque peu socialiste, et demeura républicain rigide jusqu'en 1815, époque à laquelle il se rallia au parti légitimiste. Cependant il ne prit aucune part active à la politique et fit de l'étude des mathématiques à la fois l'amusement et l'occupation de toute sa vie. Ses ouvrages et mémoires sont au nombre d'environ trois ou quatre cents. Les principaux sont : un *Traité de mécanique*, publié en deux volumes, 1811 et 1833, et qui longtemps fut classique ; sa *Théorie nouvelle de l'action capillaire*, 1831 ; sa *Théorie mathématique de la chaleur*, 1835 ; un supplément y fut ajouté en 1837 ; enfin ses *Recherches sur la probabilité des jugements*, 1837. Il avait l'intention, s'il avait vécu, d'écrire un ouvrage embrassant toute la physique mathématique et dans lequel il aurait inséré la substance des trois livres que nous venons de citer.

De ses mémoires mathématiques, les plus importants sont ceux

qui traitent des intégrales définies et des séries de Fourier ; leur application aux problèmes de la physique constitue un de ses plus beaux titres à la célébrité. Rappelons encore son *Essai sur le calcul des variations* ; et ses notes sur la probabilité des résultats moyens des observations [1].

Ses mémoires les plus remarquables de mathématiques appliquées sont peut-être ceux qui concernent l'électrostatique et le magnétisme; ils donnèrent naissance à une nouvelle branche de la physique mathématique. Il y supposait que les résultats observés étaient dus aux attractions et aux répulsions de particules impondérables. Les plus intéressants qu'il ait écrits sur l'Astronomie physique furent mis au jour en 1806 et imprimés en 1809 ; il y est question des inégalités séculaires des mouvements moyens des planètes et de la variation des constantes arbitraires, qui s'introduisent dans les solutions des questions de mécanique ; dans ces mémoires, Poisson discute la question de la stabilité des orbites planétaires, que Lagrange avait déjà établie au premier degré d'approximation pour les forces perturbatrices, et montre que le résultat peut être poussé jusqu'aux infiniment petits du troisième ordre : ce furent ces mémoires qui inspirèrent celui de Lagrange, de 1808, qui est resté célèbre. Poisson publia également, en 1821, une note sur la libration de la lune ; et une autre, en 1827, sur le mouvement de la terre autour de son centre de gravité. Ses plus importants mémoires sur la théorie de l'attraction sont : l'un, de 1829, sur l'attraction des sphéroïdes et un autre, de 1835, sur l'attraction d'un ellipsoïde homogène : la substitution de l'équation exacte relative au potentiel, à savoir : $\Delta^2 V = -4\pi\rho$, à la forme $\Delta^2 V = 0$, qui avait été donnée par Laplace, parut pour la première fois en 1813 dans le *Bulletin des sciences* de la *Société philomatique*. Enfin, nous mentionnerons son mémoire de 1825 sur la théorie des ondes.

Ampère [2]. — *André-Marie Ampère* naquit à Lyon, le 22 janvier 1775. A 18 ans, il perdit son père, victime du tribunal révo–

[1] Voir le *Journal de l'Ecole polytechnique* de 1813 à 1823 et les *Mémoires de l'Académie* pour 1823 ; les *Mémoires de l'Académie*, 1833 ; et *La Connaissance des Temps*, année 1827 et suivantes.

[2] Voir C.-A. Valson, *Etude sur la vie et les ouvrages d'Ampère*, Lyon, 1885.

lutionnaire. Cette mort fut pour lui un coup terrible dont il resta pour ainsi dire anéanti. Ses facultés intellectuelles, si actives, si ardentes, si développées, firent subitement place à un véritable idiotisme qui, heureusement, ne fut que momentané. Nous ne voulons pas nous étendre ici sur la vie d'Ampère si bien racontée par Arago et nous ne parlerons que de ses recherches scientifiques. Comme géomètre, on peut le placer à côté des plus grands mathématiciens ; comme physicien, il occupe un rang hors pair : il a presque égalé Newton. Son premier ouvrage, paru en 1802, est intitulé : *Considérations sur la théorie mathématique du Jeu,* mais ses travaux mathématiques importants sont relatifs à l'intégration des équations différentielles du premier et du second ordre. Il publia sur ce sujet deux mémoires remarquables parus dans le 17ᵉ et le 18ᵉ cahier du *Journal de l'Ecole polytechnique.*

La découverte capitale d'Ampère est celle qui lui a permis de créer pour ainsi dire à lui seul une science nouvelle : « l'électrodynamique. »

Cette science, il la fit surgir comme corollaire de la mémorable expérience d'Œrsted. Nous n'avons pas à l'exposer ici. Elle se trouve dans tous les traités de Physique ainsi que la description des appareils ingénieux qu'il a imaginés pour démontrer les lois qu'il avait découvertes. Il fit plus encore : il montra que l'analyse mathématique était assez puissante pour en rendre compte, dans un ouvrage célèbre, publié en 1826, et qu'on peut placer à côté du livre des principes de Newton.

Ampère aurait certainement fait d'autres découvertes s'il avait pu se vouer entièrement à la science, mais la nécessité de gagner sa vie le força à accepter des fonctions multiples dans l'enseignement. Il passa aussi beaucoup de temps à composer un ouvrage sur la philosophie des sciences, ouvrage qui n'est pas sans mérite, mais dont l'absence aurait peut-être été compensée par des découvertes nouvelles en électricité ou en optique.

Fresnel-Biot. — *Augustin-Jean Fresnel,* né à Broglie, le 10 mai 1788, et mort à Ville-d'Avray, le 14 juillet 1827, était ingénieur des ponts-et-chaussées ; il consacra ses loisirs à l'étude de l'optique physique.

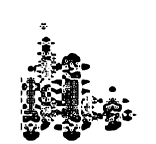
… mière, que Hooke, Huygens et
… nnements *à priori*, a été fondée
… de Young. Fresnel déduisit les
… es expériences et expliqua le
… mière ordinaire et polarisée.

… en passant, de l'ami et du con-
… *te Biot*, né à Paris, le 21 avril
… en 1862. La majeure partie de
… ulent sur l'optique et spéciale-
… ière. Ses travaux datent de la
… le ses mémoires les plus remar-
…

… *minique Arago* naquit à Esta-
… ier 1786, et mourut à Paris, le
… de l'École Polytechnique et, en
… re comme secrétaire du bureau
… l s'occupa de la mesure d'un arc
… ermination exacte de la longueur
… un emploi important à l'Obser-
… cole Polytechnique où ses cours
… tard, il fit sur l'astronomie des
… is claires et exactes, ensemble
… e que de nos jours. Il réorganisa
… ait depuis longtemps à désirer.
… e républicain ardent et, après le
… demi aveugle et mourant, il se
… plutôt que de prêter serment à
… ge de Napoléon III, qu'il donna
… ne fût pas inquiété et fût main-
…

… hysiques d'Arago ont trait à la
… températures et à la vitesse du
… le ses observations magnétiques
… découvrit ce qui a été appelé le

… ées par J.-A. Barral et publiées en
… volume est précédé d'une autobiogra-



magnétisme de rotation et le fait que la plupart des corps pouvaient être aimantés : ces découvertes furent complétées et expliquées par Faraday. Il soutint énergiquement les théories optiques de Fresnel et les deux savants dirigèrent ensemble ces expériences sur la polarisation de la lumière, qui conduisirent à cette conclusion : que les vibrations de l'éther luminifère sont transversales à la direction du mouvement et que la polarisation consiste dans la décomposition d'un mouvement rectiligne suivant deux composantes à angle droit. L'invention subséquente du polariscope et la découverte de la polarisation rotatoire sont dues à Arago. Il suggéra, en 1838, l'idée générale de la détermination expérimentale de la vitesse de la lumière d'après la méthode suivie, plus tard, par Fizeau et Foucault ; mais par suite de l'affaiblissement de sa vue, il ne put en étudier les détails et faire les expériences.

On remarquera que quelques-uns des derniers membres de cette Ecole française ont vécu jusqu'à une époque relativement récente, mais ils produisirent presque tous leurs travaux mathématiques avant l'année 1830. Ils ont été les successeurs directs des savants français qui fleurirent au commencement du XIX[e] siècle et paraissent n'avoir eu aucun contact avec les grands mathématiciens allemands dont les recherches ont inspiré beaucoup des meilleurs travaux du siècle. C'est pourquoi nous les avons placés ici, bien que leurs écrits soient, dans quelques cas, d'une date postérieure à ceux de Gauss, Abel, Jacobi et d'autres mathématiciens des temps récents*. On peut leur adjoindre *Delambre*, *Montucla* et *Poinsot**.

* **Delambre.** — *Jean-Baptiste-Joseph Delambre* naquit à Amiens, le 19 septembre 1749 et mourut le 19 août 1822 ; il a laissé des travaux astronomiques de valeur : *Tables de Jupiter et de Saturne*, *Mesure de l'arc méridien*, *Histoire de l'astronomie*, *Astronomie ancienne, du Moyen Age et moderne*, etc.. ; certaines formules de trigonométrie sphérique portent son nom *.

* **Montucla.** — Nous ne saurions oublier ici *Jean-Etienne Montucla*, né à Lyon le 5 septembre 1725, mort à Paris, le 18 décembre 1799, et auteur de la célèbre *Histoire des mathématiques*, ouvrage fort remarquable pour l'époque *.

* **Poinsot.** — *Louis Poinsot* naquit à Paris, en 1777, et mourut en 1859. Elève à l'École Polytechnique, professeur au lycée Bonaparte, puis examinateur à l'École Polytechnique, il succéda à Lagrange, à l'Académie des Sciences. Il a publié des travaux remarquables concernant la mécanique rationnelle : citons sa *Théorie des couples*, sa *Théorie de la rotation des corps* et son *Mémoire sur les cônes circulaires roulants* *.

INTRODUCTION DE L'ANALYSE EN ANGLETERRE

L'isolement complet de l'Ecole anglaise et son attachement aux méthodes géométriques constituent les faits les plus saillants de son histoire durant la dernière moitié du XVIII[e] siècle ; comme conséquence naturelle, cette Ecole ne contribua que fort peu aux progrès de la science mathématique. Un autre résultat fut que les savants anglais se consacrèrent principalement à la physique et à l'astronomie pratique, qui firent peut-être plus de progrès en Angleterre que dans les pays du continent.

Ivory. — Ivory, à qui l'on doit le célèbre théorème sur l'attraction, est presque le seul mathématicien anglais du commencement de ce siècle qui ait employé les méthodes analytiques et dont les travaux méritent de figurer ici. *Sir James Ivory* naquit à Dundee, en 1765, et mourut le 21 septembre 1842. Après avoir pris ses grades à Saint-André, il devint directeur gérant d'une filature de lin, dans le Forfarshire, mais il continua à consacrer aux mathématiques la majeure partie de ses loisirs. En 1804, il fut nommé professeur au Collège Royal militaire de Marlow, transféré plus tard à Sandhurst ; il fut annobli en 1831. Il fournit de nombreux mémoires aux *Philosophical Transactions*, et les plus remarquables sont ceux qui concernent l'attraction. Dans l'un d'eux, en 1809, il montra que l'attraction d'un ellipsoïde homogène sur un point extérieur est multiple de celle d'un autre ellipsoïde sur un point intérieur : et cette dernière peut être obtenue aisément. Il critiqua la solution de la méthode des moindres carrés donnée par Laplace, avec une sévérité inutile et dans des termes qui montraient qu'il ne l'avait pas bien comprise.

L'Ecole analytique de Cambridge. — Vers la fin du dernier siècle, les membres les plus éminents du Collège mathématique de Cambridge commencèrent à reconnaître que l'état d'isolement dans lequel ils se maintenaient à l'égard de leurs contemporains du continent, présentait de sérieux inconvénients. Le mérite du plus ancien essai tenté en Angleterre pour expliquer la notation et les méthodes du calcul telles qu'elles étaient employées sur le Continent revient à Woodhouse, qui doit être considéré comme l'apôtre de ce mouvement. Il est douteux qu'il eût pu, de lui-même, mettre en vogue les méthodes analytiques ; mais ses idées furent adoptées avec enthousiasme par trois étudiants, Peacock, Babbage et Herschel, qui réussirent à faire triompher les réformes qu'il avait suggérées.

Woodhouse. — *Robert Woodhouse* naquit à Norwich, le 28 avril 1773 ; fit ses études au Collège Caius, à Cambridge, en devint membre par la suite, occupa la chaire Plumian à l'Université et continua à vivre à Cambridge jusqu'à sa mort, qui survint le 23 décembre 1827.

Le plus ancien ouvrage de Woodhouse, intitulé *Principles of Analytical Calculation*, fut publié à Cambridge, en 1803. Il y expliquait la notation différentielle et en recommandait fortement l'emploi, mais il y critiquait sévèrement les méthodes employées par les écrivains du Continent et l'usage continuel qu'ils faisaient de principes non évidents. Cet ouvrage fut suivi, en 1809, d'une trigonométrie plane et sphérique et, en 1810, d'un Traité historique sur le calcul des variations et le problème des isopérimètres. Il composa ensuite une astronomie, dont le premier volume, Astronomie pratique et descriptive, parut en 1812 ; le second qui contenait une exposition de l'astronomie physique, d'après Laplace et d'autres écrivains du continent, parut en 1818. Tous ces ouvrages se distinguent par une sévère critique scientifique.

Un homme tel que Woodhouse, d'une honorabilité scrupuleuse, universellement respecté, logicien exercé, d'un esprit caustique, était bien celui qui convenait pour introduire un nouveau système ; le fait qu'en appelant pour la première fois l'attention sur l'analyse continentale, il exposait les faiblesses de quelques-unes de ses méthodes plutôt en adversaire qu'en partisan, était aussi

politique qu'honnête. Woodhouse n'exerça pas beaucoup d'influence sur la majorité de ses contemporains, et le mouvement aurait échoué à ce moment, s'il n'avait été soutenu par Peacock, Babbage et Herschel, qui créèrent une Société analytique ayant pour objet de préconiser l'usage général dans l'Université anglaise des méthodes analytiques et de la notation différentielle.

Peacock. — *George Peacock*, qui fut le plus influent des premiers membres de la nouvelle Ecole, naquit à Denton, le 9 avril 1791. Il fit ses études au Collège de la Trinité, à Cambridge, où il devint répétiteur, puis professeur. L'établissement de l'Observatoire de l'Université fut en grande partie dû à ses efforts et, en 1836, il fut chargé de la chaire Lowndeau d'astronomie et de géométrie. En 1839, il fut nommé doyen d'Ely, où il résida jusqu'à sa mort, le 8 novembre 1858. Bien que l'influence de Peacock sur les mathématiciens anglais fût considérable, il a laissé peu de traces de ses travaux : nous ferons observer cependant que son rapport sur les progrès récents de l'analyse, 1833, fut le début de ces résumés précieux sur les progrès de la science qui enrichissent plusieurs des volumes annuels des *Transactions* de l'Association Britannique.

Babbage. — Un autre membre important de la Société Analytique fut *Charles Babbage*, qui naquit à Totnes, le 26 décembre 1792; il entra au Collège de la Trinité, à Cambridge, en 1810, occupa ensuite à l'Université la chaire Lucasian, et mourut à Londres, le 18 octobre 1871. Ce fut lui qui dénomma la Société Analytique, qui, déclarait-il, était constituée pour soutenir « les principes du pur *d*-ism en opposition au *dot*-age de l'Université [1]. »

La fondation de la Société Astronomique, en 1820, est, en grande partie, due à ses efforts ; plus tard, en 1830 et 1832, il prit une part prééminente à la création de l'Association Britannique. Babbage est l'auteur de divers mémoires sur le calcul des fonctions et l'inventeur d'une machine analytique qui, non seule-

[1] Il est impossible de rendre en français le jeu de mots contenu dans cette phrase. C'est une opposition entre la notation de Leibnitz et celle de Newton au moyen d'un point, *dot*.

ment permet d'effectuer toutes les opérations ordinaires de l'arithmétique, mais encore peut calculer les valeurs d'une fonction quelconque et imprimer les résultats obtenus.

Herschel. — Avec Peacock et Babbage, *Sir John Frederick William Herschel* chercha à répandre en Angleterre l'usage des méthodes analytiques. Il naquit le 7 mars 1792, fit ses études au Collège Saint-Jean, à Cambridge, et mourut le 11 mai 1871. Son père était Sir William Herschel (1738-1822), astronome le plus illustre de la dernière moitié du dernier siècle et créateur de l'astronomie stellaire moderne. J. F. W. Herschel débuta dans ses travaux mathématiques par une note sur le théorème de Cotes, qui fut suivie par d'autres sur l'analyse mathématique ; mais son désir de compléter l'œuvre de son père, le conduisit finalement à s'occuper exclusivement d'astronomie. Ses mémoires sur la lumière et l'astronomie contiennent une exposition claire des principes qui servent de base à la théorie mathématique de ces sujets.

En 1813, la Société Analytique publia un volume de mémoires, dont la préface et le premier article (sur les produits continus) sont dûs à Babbage ; trois ans plus tard elle fit paraître une traduction de l'ouvrage de Lacroix : *Traité élémentaire de calcul différentiel et de calcul intégral* ; la notation différentielle fut employée dans les examens universitaires en 1817 et encore en 1819 ; après 1820 elle fut définitivement adoptée. La Société Analytique compléta sa rapide victoire par la publication, en 1820, de deux volumes d'exemples d'applications de la nouvelle méthode ; l'un par Peacock, sur le calcul différentiel et intégral, et l'autre par Herschel, sur le calcul des différences finies. Depuis, la notation des fluxions ne figure plus d'une façon exclusive dans les ouvrages anglais sur le calcul infinitésimal. Il faut noter, en passant, que Lagrange et Laplace, de même que la majorité des autres écrivains modernes, employaient à la fois les notations fluxionnelle et différentielle, et c'était l'usage exclusif de la première qui présentait tant de difficultés.

Parmi ceux qui contribuèrent de façon importante à étendre en Angleterre l'usage de l'analyse nouvelle, on doit compter William Whewell (1794-1866) et George Biddell Airy (1801-1802), tous deux membres de Trinity Collyge, à Cambridge.

Le premier publia, en 1819, un ouvrage sur la mécanique et le second, élève de Peacock, fit paraître, en 1826, ses *Traités*, où il appliquait, avec beaucoup de succès, la nouvelle méthode à divers problèmes de physique. La Société fut aidée dans ses efforts par la rapide publication de bons ouvrages classiques dans lesquels la méthode analytique de Leibnitz était franchement adoptée. L'emploi des nouvelles méthodes analytiques s'étendit de Cambridge à toute la Grande Bretagne et, vers 1830, ces méthodes étaient devenues d'un usage général dans le pays.

CHAPITRE XIX

—

LES MATHÉMATIQUES AU XIXe SIÈCLE

Le XIXe siècle a vu surgir, en mathémathiques pures, de nombreuses branches nouvelles. Notamment la théorie des nombres ou arithmétique supérieure ; la théorie des formes et des groupes ; la théorie des fonctions de périodicité multiple ou trigonométrie supérieure ; enfin la théorie générale des fonctions, embrassant les vastes régions de l'analyse supérieure. Les développements de la géométrie analytique et synthétique ont également engendré de nouveaux sujets d'études. Enfin l'application des mathématiques aux problèmes de la physique a révolutionné les fondements et l'exposition de cette science.

Une pareille extension peut, à juste titre, être considérée comme ouvrant une nouvelle période dans l'histoire, ; un futur écrivain, qui envisagerait l'histoire comme nous l'avons fait, aurait tout lieu de traiter les mathématiques des XVIIe et XVIIIe siècles comme formant une période distincte, et de considérer le XIXe siècle comme l'origine d'une nouvelle période. Une pareille division impliquerait alors une étude à peu près complète et systématique des mathématiciens du XIXe siècle. Mais il nous est évidemment impossible de discuter d'une façon impartiale les œuvres mathématiques d'une époque aussi rapprochée et les travaux de mathématiciens dont quelques-uns vivent encore et dont d'autres nous sont personnellement connus. C'est pourquoi nous n'avons pas la prétention de faire l'histoire complète des mathématiques au cours du XIXe siècle ; nous nous contenterons de mentionner les faits les plus saillants de l'histoire contemporaine des mathématiques pures en y compre-

nant la dynamique théorique et l'astronomie ; nous ne nous occuperons qu'incidemment des récentes applications des mathématiques à la physique.

Dans quelques cas seulement nous donnons des détails sur la vie et les œuvres des mathématiciens, et nous complétons par quelques courtes notes nos renseignements sur ceux d'entre eux qui ont étendu quelque branche nouvelle, en précisant la partie sur laquelle leur attention s'est particulièrement fixée. Même en nous renfermant dans ces limites, il nous a été très difficile de faire un exposé bien ordonné des mathématiques contemporaines ; nous répétons intentionnellement et en insistant : que nous ne prétendons pas (nos lecteurs ne doivent pas l'oublier), donner ici les noms de tous les principaux savants qui ont écrit sur les mathématiques. En fait, la quantité de matériaux produits a été si grande que personne ne peut espérer faire plus qu'étudier les œuvres relatives à une certaine branche ou à quelques branches spéciales. Nous pouvons ajouter à l'appui de cette remarque que la Commission nommée par la Société Royale pour préparer un catalogue des publications sur ce genre de littérature, a trouvé, en 1900, qu'il se publiait actuellement par an plus de 1 500 mémoires de mathématiques pures et plus de 40 000 sur des sujets scientifiques.

La plupart des histoires des mathématiques ne parlent pas des ouvrages parus dans le courant du XIX[e] siècle ; nous connaissons cependant quelques exceptions dont voici les principales : une courte dissertation par H. Hankel, intitulée : *Die Entwickelung der Mathematik in den letzten Jahrhunderten*, Tubingue, 1885 ; les onzième et douzième volumes de l'*Histoire des sciences* de M. Marie, dans lesquels on trouve quelques notes sur les mathématiciens qui naquirent dans le dernier siècle ; l'ouvrage de Gerhardt, *Geschichte der Mathematik in Deutschland*, Munich, 1877 ; un *Discours* de C. Hermite sur les professeurs de la Sorbonne, dans le Bulletin des sciences mathématiques, 1890 ; les *Lectures on Mathematics* de F.-C. Klein (Evanston Colloquium), New-York et Londres, 1894 ; et *Die reine Mathematik in den Jahren*, 1884-1899, de E. Lampe, Berlin, 1899.

Quelques ouvrages ont été écrits sur le développement de certains sujets particuliers, tels ceux d'Isaac Todhunter sur les théo-

ries de l'attraction et sur le calcul des probabilités ; on trouve aussi dans les volumes annuels de l'Association Britannique, nombre de rapports sur les progrès faits dans diverses branches des mathématiques modernes ; un ou deux rapports semblables ont été présentés à l'Académie des Sciences de Paris. La neuvième édition de l'*Encyclopédie Britannique* contient également quelques mémoires importants. Citons encore l'ouvrage du professeur G. Loria, *Die hauptsächlichsten Theorien der Geometrie*, Leipzig, 1888 ; * le *Rapport sur les progrès de la Géométrie* de Chasles, le *Rapport sur les progrès de l'analyse mathématique et les Eloges académiques* de J. Bertrand ; l'*Œuvre mathématique du* XIXe *siècle* de R. d'Adhémar ; *les sciences mathématiques au* XIXe *siècle*, de M. Painlevé * L'*Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, en cours de publication, * tant en Allemagne qu'en France * cherche à décrire l'état actuel des connaissances en mathématiques pures et appliquées et, sans aucun doute elle complètera heureusement les rapports précités.

Toutes ces références et ces rapports nous ont été utiles, mais pour la composition de ce chapitre nous nous sommes également beaucoup servi des notices nécrologiques parues dans les Comptes rendus des diverses Sociétés savantes, à l'étranger aussi bien qu'en Angleterre. Nous sommes encore redevables à nos amis de tous les renseignements qu'ils nous ont gracieusement fournis ; si nous n'insistons pas davantage sur ce point, c'est que nous ne voulons pas paraître les rendre responsables de nos erreurs et de nos omissions.

Généralement, à une période d'activité intellectuelle intense, succède un état de repos. Après la mort de Lagrange, Laplace, Legendre et Poisson, l'Ecole française, qui avait occupé une situation si prépondérante au commencement de ce siècle, ralentit pendant quelques années sa production d'œuvres nouvelles. * Dans ces derniers temps, par contre, elle devait briller d'un vif éclat.* Quelques-uns des mathémaciciens que nous nous proposons d'étudier en premier lieu, Gauss, Abel et Jacobi, ont été les contemporains des dernières années des savants français cités ci-dessus, mais leurs travaux nous ayant semblé appartenir à une nouvelle école, nous avons cru devoir les placer plutôt en tête d'un nouveau chapitre.

De tous les mathématiciens de ce siècle, il n'en est aucun dont

les écrits aient eu plus d'influence que ceux de Gauss, influence qui s'est fait sentir d'une façon permanente sur plusieurs branches de la science. Nous ne pouvons donc mieux commencer notre histoire des mathématiques contemporaines qu'en exposant très brièvement ses recherches les plus importantes.

Gauss (1). — *Charles-Frédéric Gauss,* naquit à Brunswick le 23 avril 1777 et mourut à Göttingue le 23 février 1855. Son père était un simple maçon et Gauss dût l'instruction qui lui fut donnée (contre le désir de ses parents, qui auraient voulu profiter de son salaire ouvrier) au Duc régnant, qui avait su deviner ses rares facultés. En 1792, il fut envoyé au Collège Caroline et, vers 1795, professeurs et élèves étaient d'accord pour déclarer qu'il connaissait tout ce que les maîtres du collège pouvaient lui enseigner ; c'est pendant son séjour dans cet établissement qu'il publia sa méthode des moindres carrés et qu'il établit par induction la loi de réciprocité quadratique. Il alla ensuite à Göttingue où il étudia sous la direction de Kästner ; plusieurs découvertes qu'il fit dans la théorie des nombres datent de l'époque où il était étudiant à cette Université. En 1798, il retourna à Brunswick où il vécut d'une façon assez précaire en donnant des leçons particulières.

En 1799, Gauss publia une démonstration de ce théorème : que toute équation algébrique a une racine de la forme $a + bi$; il en donna à la fois trois preuves distinctes. Ses *Disquisitiones Arithmeticæ* suivirent en 1801 ; elles forment le premier volume de ses œuvres complètes. La plus grande partie de ce travail avait été envoyée l'année précédente à l'Académie des sciences de Paris qui l'avait dédaignée avec un sans gêne injustifiable, même au cas où l'ouvrage eût été sans valeur, comme le pensaient les arbitres chargés de l'examiner. Gauss en fut péniblement affecté et sa répu-

(1) Les œuvres de Gauss, éditées en sept volumes par E.-J. Schering, 1863-71, ont été publiées par la Société Royale de Göttingue. Une grande quantité de travaux additionnels ont paru depuis et il y a lieu d'espérer que la collection n'est pas épuisée ; une nouvellle édition publiée par Félix Klein, est en cours de publication, neuf volumes ont paru ; le septième paru en 1907 contient comme la précédente édition la « *Theoria motus* » et en outre de très nombreuses additions, dues à la découverte de nombreux et importants manuscrits inédits de Gauss.

• Sartorius von Waltershausen a fait la biographie de Gauss : *Gauss zum Gedächtniss*, Leipzig, 1856.•

gnance à publier ses travaux peut en partie être attribuée à ce malheureux incident.

La découverte suivante de Gauss se rapporte à une branche tout à fait différente des mathématiques. On avait depuis longtemps remarqué l'absence de toute planète entre Mars et Jupiter où cependant, d'après la loi de Bode, les observateurs devaient s'attendre à en trouver une, mais ce fut en 1801 seulement que la présence de planètes secondaires y fut constatée. La découverte que fit G. Piazzi, de Palerme, d'une petite planète située entre Mars et Jupiter était d'autant plus intéressante qu'elle concordait avec la publication d'un opuscule d'Hegel dans lequel ce dernier critiquait sévèrement les astronomes qui négligeaient trop la philosophie ; cette science, disait-il, leur aurait fait voir de suite qu'il ne peut exister plus de sept planètes ; son étude leur aurait évité de perdre d'une façon ridicule un temps considérable à rechercher ce qui, dans la nature des choses, ne pouvait exister. La nouvelle planète reçut le nom de Cérès, mais elle avait été aperçue dans de telles conditions que le calcul préalable de son orbite paraissait impossible. Les observations faites furent heureusement communiquées à Gauss ; il calcula les éléments de la planète et son analyse prouva qu'il méritait d'être regardé aussi bien comme le premier des astronomes théoriciens que comme le plus grand des « arithméticiens ».

Ces recherches eurent pour effet d'attirer l'attention et lui valurent, en 1807, l'offre qu'il déclina, d'une chaire à Saint-Pétersbourg. La même année il fut nommé Directeur de l'Observatoire de Göttingue et professeur d'Astronomie à l'université de cette ville. Il exerça ces fonctions jusqu'à sa mort et, depuis sa nomination, ne coucha jamais ailleurs que dans son Observatoire, sauf en une seule occasion où il dut se rendre à Berlin pour un congrès scientifique. Ses leçons étaient d'une lucidité remarquable, et parfaites quant à la forme ; on prétend qu'il les consacrait à l'exposition de l'analyse qui l'avait conduit aux divers résultats obtenus dans ses recherches, et qui fait si visiblement défaut dans ses démonstrations écrites ; mais de crainte que ses auditeurs ne perdissent la suite de son exposé, il ne les autorisait pas volontiers à prendre des notes.

Nous avons déjà rapporté les publications de Gauss en 1799,

... es années qui suivirent 1807, son
... ris par les travaux de son Obser-
... à Hambourg sa « *Theoria Motus*
... qui contribua largement au perfec-
... ratique et dans lequel figure le prin-
... igne ; sur le même sujet, nous avons
... *mbinationis Observationum Erroribus*
... na une suite et un supplément.
... pa de géodésie ; de 1821 à 1848, il fût
... emark et du Hanovre pour les opéra-
... rs dans ces pays. Ses notes de 1843
... *der höhern Geodäsie*, exposent ses

... r l'électricité et le magnétisme datent
... mémoire sur la théorie du magné-
... *magneticæ Terrestris ad mensuram*
... ié en 1833. Quelques mois après il
... héliotrope et le magnétomètre à deux
... même année, ces deux savants firent
... servatoire magnétique, en s'arrangeant
... nt l'emploi du fer (comme cela avait
... plus petite échelle, par Humboldt et
... vations magnétiques et établirent, en
... tique d'envoyer des signaux télégra-
... ne temps une association dans le but
... ues d'observations à des époques dé-
... urs comptes rendus, *Resultate aus der*
... *hen Vereins* pour 1838 et 1839 con-
... moires de Gauss, l'un sur la théorie
... rrestre, l'autre sur la théorie des
... ttractive inversement proportionnelle

... Gauss considérait les phénomènes
... à des attractions et à des répulsions
... bles. Lord Kelvin, alors William
... ue les effets pourraient également être
... r un flux de calorique émanant de
... lement distribuées.

En électrodynamique, Gauss parvint en 1835 à un résultat équivalent à celui donné par W.-E. Weber, de Göttingue, en 1846, à savoir que l'attraction entre deux particules électrisées e et e', placées à la distance r l'une de l'autre, est liée à leur position et à leurs mouvements relatifs par la formule

$$ee'r^{-2}\left\{1+\left[\frac{d^2r}{dt^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right]^2 c^{-2}\right\}.$$

Gauss cependant était d'avis qu'on ne pouvait regarder comme satisfaisante une hypothèse reposant uniquement sur une formule et sans base physique ; et comme il ne put en imaginer une représentation physique plausible, il abandonna le sujet.

De telles hypothèses ont été proposées par Riemann en 1858, par C. Neumann de nos jours à Leipzig, et par Betti (1823-1892), de Pise, en 1868 ; mais Helmholtz montra, en 1870, 1873 et 1874, qu'elles étaient insoutenables. Une conception plus simple, dans laquelle on considère tous les phénomènes électriques et magnétiques comme des tensions et des mouvements d'un milieu matériel élastique, a été émise par Michael Faraday (1791-1867) et étudiée, en 1873, par James Clerk Maxwell, de Cambridge (1831-1879). Ce dernier, en employant un système de coordonnées généralisées, réussit à déduire des conséquences physiques de cette théorie et à établir son accord avec les faits. Maxwell concluait en montrant que si ce milieu était le même que le prétendu éther luminifère, la vitesse de la lumière serait égale au rapport des unités électromagnétique et électrostatique ; des expériences faites ultérieurement tendraient à confirmer cette conclusion. Les théories antérieurement admises supposaient l'existence d'un simple solide élastique ou une action entre la matière et l'éther.

Dans un rapport à l'Association Britannique, en 1885, J.-J. Thomson, de Cambridge, a classé la théorie précédente ainsi que d'autres théories de la façon suivante :

a) Celles qui ne sont pas fondées sur le principe de la conservation de l'énergie (telles que celles d'Ampère, Grassmann, Stefan et Korteweg) ;

b) Celles qui s'appuient sur des hypothèses ayant rapport aux vitesses et aux positions des particules électrisées (telles que celles de Gauss, W.-E. Weber, Riemann et R.-J.-E. Clausius) ;



...istence d'une espèce d'énergie dont
...connaissance (telles que la théorie de

...ur des considérations dynamiques,
...tion diélectrique (telles que la théo-

...uient sur des considérations dyna-
...te de l'action diélectrique (telles que

...diverses théories sont exposées, criti-
...sultats des expériences.
...ur l'optique, et spécialement sur les
...ubliées, en 1840, dans son ouvrage

...que nous venons de donner que le
...Gauss présentait une étendue consi-
...s, ses recherches servirent à amorcer
... dernier des grands mathématiciens
... presque universelles : depuis cette
...ifique a pris un tel développement
... été forcés de se spécialiser et de
...une branche ou à quelques branches
...intenant étudier brièvement les plus
...fit Gauss en mathématiques pures.
... dans ce genre est les *Disquisitiones*
...nt de départ de plusieurs études im-
...nombres. Ce Traité et la *Théorie des*
...jours classiques ; mais de même que
...tions elliptiques Legendre ne sut
...ne nouveau, de même aussi Gauss
...omme un simple chapitre de l'algèbre.
...t que la théorie des grandeurs dis-
...upérieure, était tout autre que celle
...algèbre, et il introduisit une nouvelle
...éthodes d'analyse, dont les auteurs
...lement fait usage. La théorie des
... deux parties principales, à savoir :
... la théorie des formes. L'une et l'autre

furent étudiées par Gauss. En particulier, dans les *Disquisitiones Arithmeticæ*, * il donne la grande loi de la réciprocité quadratique, qu'il démontre jusqu'à six fois, tant cette loi lui paraît, et avec raison, importante; ce sujet fut repris par *Jacobi*, *Eisenstein*, Liouville, Lebesgue Genocchi, Kummer, Kronecker et Th. Pépin *; puis il mit au jour la théorie moderne des congruences du premier et du second ordre : c'est à celle-ci qu'il ramenait l'analyse indéterminée. Il étudiait également dans le même ouvrage la solution des équations binômes de la forme $x^n = 1$; son exposé comprend le théorème célèbre dans lequel il établit la possibilité de construire par la géométrie élémentaire des polygones réguliers dont le nombre des côtés est $2^m(2^n + 1)$, m et n représentant des nombres entiers et $2^n + 1$ un nombre premier : il avait fait cette découverte en 1796. * La question fut reprise avec bonheur par *Wantzel* en 1837 *. C'est là que Gauss a développé la théorie des formes quadratiques ternaires comprenant deux indéterminées. Gauss fit encore porter ses recherches sur la théorie des déterminants et ses résultats servirent de bases aux travaux de Jacobi qui concernent ce sujet.

La théorie des fonctions de périodicité double eut pour origine les découvertes d'Abel et de Jacobi dont nous parlons plus loin. Ces deux mathématiciens obtinrent les fonctions Thêta qui jouent un si grand rôle dans cette théorie. Cependant Gauss avait découvert indépendamment, et même à une date beaucoup plus ancienne, ces fonctions et quelques-unes de leurs propriétés ; il y avait été conduit par certaines intégrales qui se présentaient dans la *Determinatio Attractionis*, et il imagina, pour les évaluer, la transformation liée aujourd'hui au nom de Jacobi. Bien que Gauss en eut fait part anciennement à Jacobi, il ne publia pas ses recherches : elles se trouvent dans une série de cahiers de notes ne remontant pas à une date antérieure à 1808, et font partie de ses œuvres complètes.

De ses autres mémoires sur les mathématiques pures, les plus remarquables ont pour objet la théorie des résidus biquadratiques (où la notion des nombres complexes de la forme $a + bi$ se trouve introduite pour la première fois dans la théorie des nombres) ; on y rencontre plusieurs tables, une en particulier sur le nombre des classes des formes binaires quadratiques; son mémoire relatif à la démonstration du théorème que toute équation algébrique a

une racine réelle ou imaginaire, celui sur la sommation des séries, un autre enfin sur l'interpolation sont aussi fort beaux. Son introduction de critériums rigoureux pour vérifier la convergence des séries infinies mérite l'attention.

Ses recherches sur les séries hypergéométriques sont également d'un haut intérêt ; elles contiennent une discussion de la fonction Gamma, sujet qui a pris une importance considérable et a été traité, entre autres, par Kummer et Riemann. Enfin nous avons ses théorèmes sur la courbure des surfaces et son important mémoire sur la représentation conforme, où les résultats donnés par Lagrange pour les surfaces de révolution sont étendus à toutes les surfaces. * Ajoutons que dans un célèbre mémoire, intitulé : *Disquisitiones generales circa superficies curvas,* Gauss démontre ce théorème très remarquable que : *Quand une surface est applicable sur une autre par déformation, sans rupture ni duplicature, le produit des deux rayons de courbure principaux est le même pour les deux surfaces en deux points corespondants* *. Il paraît que Gauss aurait aussi découvert quelques propriétés des quaternions.

Une de ses notes concerne l'attraction des ellipsoïdes homogènes ; de plus, son mémoire de 1839, déjà cité, *Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung,* traite de la théorie des forces attractives suivant l'inverse du carré de la distance ; Gauss y établit que les variations séculaires éprouvées par les éléments de l'orbite d'une planète sous l'influence de l'attraction d'une autre planète, exerçant une action perturbatrice, sont les mêmes que si la masse de cette seconde planète était distribuée au delà de son orbite et suivant un anneau elliptique, cela de telle sorte qu'à des arcs de l'orbite décrits dans le même temps correspondent des masses égales de l'anneau.

Les grands maîtres de l'analyse moderne sont Lagrange, Laplace et Gauss qui furent contemporains, et il est intéressant de noter le contraste marqué qui existe dans leurs écrits. Lagrange est parfait à la fois dans la forme et dans le fond, il est soucieux de donner la voie qu'il a suivie et ses écrits sont d'une lecture facile. Laplace par contre n'explique rien ; la forme le laisse indifférent, et une fois assuré de l'exactitude des résultats trouvés, il se con-

tente de les présenter sans démonstration ou quelquefois avec une démonstration imparfaite. Gauss est aussi correct et aussi élégant que Lagrange, mais encore plus difficile à suivre que Laplace, car il ne donne aucun renseignement sur la marche de ses idées et se borne à donner des démonstrations, il est vrai, rigoureuses, mais aussi synthétiques et aussi concises que possible.

Dirichlet (1). — Nous pouvons citer ici, l'un des élèves de Gauss, Lejeune Dirichlet. L'exposition, faite de mains de maître, qu'il a donnée des découvertes de Jacobi, qui était son beau-père, et de Gauss, a peut-être trop fait oublier ses propres recherches sur des sujets similaires. *Pierre Gustave Lejeune Dirichlet* naquit à Düren, le 13 février 1805, et mourut à Göttingue, le 5 mai 1859. Il enseigna successivement à Breslau et à Berlin, et à la mort de Gauss, en 1855, il fut désigné pour lui succéder comme professeur de mathématiques supérieures à Göttingue. Il se proposait de terminer les œuvres inachevées de Gauss, mais sa mort prématurée ne lui permit pas de conduire à bonne fin ce travail pour lequel il était admirablement préparé ; il produisit cependant quelques mémoires qui ont considérablement facilité la compréhension de quelques-unes des méthodes les plus obscures de Gauss. Quant aux recherches originales de Dirichlet, les plus célèbres sont celles où il établit le théorème de Fourier, et celles, dans la théorie des nombres, sur les lois asymptotiques, c'est-à-dire, les lois dont l'exactitude est d'autant plus grande que les nombres auxquels elles s'appliquent deviennent plus grands. *A lui est dû aussi une belle et rigoureuse démonstration du critérium de stabilité de l'équilibre d'un système matériel —*

LA THÉORIE DES NOMBRES OU ARITHMÉTIQUE SUPÉRIEURE

Les recherches de Gauss sur la théorie des nombres furent continuées ou complétées par *Jacobi*, qui démontra le premier la loi

(1) Ses œuvres ont été publiées en deux volumes, Berlin, 1889-1897. Ses leçons sur la théorie des nombres furent éditées par J.-W.-R. Dedekind, 3e édition, Brunswick, 1879-81 ; ses études sur la théorie du potentiel ont été éditées par F. Grube, seconde édition, Leipzig, 1887. C.-W. Borchardt a fait paraître une note sur quelques-unes de ses recherches dans le *Journal de Crelle* vol. LVII, 1859, pp. 91-92.

de réciprocité cubique, discuta la théorie des résidus et, dans son *Canon Arithmeticus*, donna une table des résidus des racines primitives.

* Dirichlet publia aussi, en 1825, un mémoire concernant la célèbre équation indéterminée $x^n + y^n = z^n$, que Fermat avait annoncée ne pouvoir être résolue en nombres entiers, et montra qu'il en était bien ainsi pour $n = 5$. Euler et Lagrange avaient démontré la proposition pour $n = 3$ et $n = 4$, Lamé la prouva plus tard pour $n = 7$. D'autres travaux concernant cette question ont été publiés depuis, mais on n'a pu arriver encore à une démonstration absolument générale.

Les travaux de Dirichlet concernant les nombres premiers sont intéressants. Après Gauss et Legendre, Dirichlet donna des expressions approchées du nombre des nombres premiers inférieurs à une limite donnée, mais il était réservé à Riemann, dans le mémoire *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*, 1859, de résoudre vraiment la question. Plus tard, H. Poincaré, Sylvester et Hadamard la reprirent et poussèrent l'approximation plus loin encore que ce dernier.

Il n'est pas inutile de dire à ce propos que, à défaut de méthode permettant de reconnaître si un nombre premier est donné, la British Association entreprit en 1877 la construction de tables étendues de facteurs premiers et confia la direction de ce travail à J.-W.-L. Glaisher.

Burkhardt avait construit une table des diviseurs des trois premiers millions. Glaisher construisit les tables des 4e, 5e et 6e million, et Dase celles pour les 7e, 8e et 9e million *.

Eisenstein (1). — La haute arithmétique fût également développée par *Ferdinand Gotthold Eisenstein*, professeur à l'université de Berlin, né à Berlin le 16 avril 1823 et mort dans la même ville, le 11 octobre 1852. La solution du problème de la représentation des nombres par des formes quadratiques binaires fut une des plus grandes entreprises de Gauss : il a donné dans ses *Disquisitiones Arithmeticæ* les principes fondamentaux sur lesquels

(1) Pour l'histoire de sa vie et de ses recherches, voir : *Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik*, 1895, p. 143 et seq.

repose la solution du problème. Gauss y ajoutait quelques résultats concernant les formes quadratiques ternaires, mais l'extension générale de deux à trois indéterminées est l'œuvre d'Eisenstein, qui, dans son mémoire *Neue theoreme der höheren Arithmetik*, définit les caractères génériques des formes quadratiques ternaires d'un déterminant impair et, dans le cas des formes définies, en assigne la valeur d'un ordre ou d'un genre quelconque ; mais il ne considère pas les formes à déterminant pair. Malheureusement les résultats trouvés ne sont accompagnés d'aucune démonstration.

Eisenstein s'occupa aussi du théorème relatif à la possibilité de représenter un nombre par une somme de carrés et montra que le théorème général était limité à huit carrés. Les solutions pour les cas de deux, quatre et six carrés peuvent être obtenues au moyen des fonctions elliptiques, mais les cas relatifs à un nombre impair de carrés impliquent des procédés spéciaux particuliers à la théorie des nombres. Eisenstein donna la solution pour le cas de trois carrés. Il laissa également un aperçu de la solution qu'il avait obtenue pour le cas de cinq carrés (1) ; ses résultats furent donnés sans démonstration et s'appliquent seulement à des nombres non divisibles par un carré.

Henry Smith (2). — Aux mathématiciens de l'Ecole de Gauss qui se distinguèrent le plus par leur originalité et leur puissance, il faut ajouter Henry Smith. *Henry John Stephen Smith* naquit à Londres, le 2 novembre 1826, et mourut à Oxford, le 9 février 1883. Il fit ses études à Rugby et au collège Balliol, à Oxford, et devint membre de cette Université. En 1861, il fut nommé professeur de géométrie, chaire Savilian, et résida à Oxford jusqu'à sa mort.

Le nom de Smith reste spécialement attaché à la théorie des nombres. Il y consacra dix années, de 1854 à 1864. Le principal résultat de ses recherches est compris dans deux mémoires insérés dans les *Philosophical transactions* pour 1861 et 1867 ; le premier

(1) *Journal de Crelle*, vol. XXXV, 1847, p. 368.

(2) La collection des œuvres mathématiques de Smith, éditées par J.-W.-L. Glaisher, avec une préface contenant une notice biographique et d'autres notes, fut publiée en deux volumes, à Oxford, 1894.

L'exposé qui suit est extrait de la notice nécrologique insérée dans les notices mensuelles de la Société astronomique, 1884, pp. 138-149.

est relatif aux équations indéterminées linéaires et aux congruences, et le second aux ordres et aux genres des formes quadratiques ternaires. Dans le dernier mémoire, Smith fournit les démonstrations des résultats trouvés par Eisenstein et donne leur extension aux formes quadratiques ternaires à déterminant pair ; il donne aussi une classification complète des formes quadratiques ternaires.

Cependant Smith ne se limita pas au cas de trois indéterminées ; il sut établir les principes sur lesquels repose l'extension au cas général de *n* indéterminées et obtenir des formules générales, faisant faire ainsi à la question le plus grand pas en avant depuis la publication des travaux de Gauss. Dans l'exposé de ses méthodes et de ses résultats, parus dans les Proceedings de la Société Royale [1], Smith faisait remarquer que les théorèmes concernant la représentation des nombres par quatre carrés et par d'autres formes quadratiques simples, se déduisent à l'aide d'une méthode uniforme des principes qu'il exposait, comme aussi les théorèmes relatifs à la représentation des nombres par six et huit carrés. Il continuait en disant que, puisque la série des théorèmes concernant la représentation des nombres par des sommes de carrés s'arrêtait, pour la raison assignée par Eisenstein, quand le nombre des carrés surpassait huit, il était désirable qu'elle ne présentât pas de lacunes. Les résultats pour les nombres pairs de carrés étaient connus. Les principaux théorèmes pour le cas de cinq carrés avaient été donnés par Eisenstein, mais il avait considéré seulement des nombres non divisibles par un carré, et n'avait pas examiné le cas de sept carrés. Smith complétait dans son mémoire l'énoncé des théorèmes pour le cas de cinq carrés, et ajoutait les théorèmes relatifs au cas de sept carrés.

Ce mémoire fut l'occasion d'un incident curieux dans l'histoire des mathématiques. Quatorze ans plus tard, l'Académie des sciences de Paris, n'ayant pas connaissance des travaux de Smith, proposa comme sujet du « Grand prix des sciences mathématiques », la démonstration et le complément des théorèmes d'Eisenstein pour le cas de cinq carrés. Smith envoya la démonstration des théorèmes généraux nécessaires pour établir les résultats dans le cas spécial de cinq carrés, et un mois après sa mort, en mars 1883,

[1] Voir vol. XIII, 1864, pp. 199-203, et vol. XVI, 1868, pp. 197-208.

le prix lui fut décerné ; un autre prix fut également accordé à H. Minkowski de Bonn. Aucun fait ne saurait mieux mettre en pleine lumière l'étendue des recherches de Smith ; une question. dont il avait donné la solution en 1867 comme corollaire de formules générales régissant une classe entière de questions de même nature, avait été considérée par l'Académie de Paris comme présentant assez de difficulté et d'importance pour mériter les honneurs du grand prix. Le même incident a provoqué cette réflexion que les Académiciens français du temps devaient connaître bien peu les recherches de leurs contemporains anglais et allemands, pour ignorer qu'ils avaient dans les recueils de leur bibliothèque la solution du problème qu'ils proposaient.

Parmi les autres travaux de Smith, nous pouvons mentionner spécialement son mémoire de géométrie *sur quelques problèmes cubiques et biquadratiques*, pour lequel l'Académie de Berlin lui décerna, en 1868, le prix Steiner. Dans une note envoyée aux *Atti* de l'Académie dei Lincei pour 1877, il établissait une relation analytique très remarquable reliant l'équation modulaire d'ordre m et la théorie des formes quadratiques binaires appartenant au déterminant positif n. Dans cette note, la fonction modulaire est représentée analytiquement par une courbe qui donne une image géométrique des systèmes complets des formes quadratiques réduites, appartenant au déterminant ; il donne aussi une interprétation géométrique des idées de « classe », d' « équivalence », et de « forme réduite ». Smith est également l'auteur de notes importantes étendant aux formes quadratiques complexes plusieurs des résultats de Gauss relatifs aux formes quadratiques réelles. Ses recherches sur la théorie des nombres le conduisirent à la théorie des fonctions elliptiques, et les résultats auxquels il parvint, spécialement en ce qui concerne les fonctions Thêta et Oméga, sont importants.

* *Ernest Edouard Kummer* (1810-1893), professeur à l'université de Berlin, s'occupa, lui aussi, de la théorie des nombres et particulièrement des nombres complexes généralisés de la forme $a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3 + \ldots$ où a_i sont des nombres réels et A_i les racines de l'équation $x^n - 1 = 0$. La théorie du plus grand commun diviseur n'est pas applicable à ces nombres, et leurs facteurs premiers doivent être définis d'une façon spéciale, ce qui conduisit Kummer

à la notion des nombres idéaux. Ces nombres paraissent être d'un intérêt restreint.

Jules Guillaume Richard Dedekind, né en 1831, à Brunswick, a donné dans la seconde édition des *Vorlesüngen über Zahlentheorie* de Dirichlet une nouvelle théorie des nombres complexes, où il complète les résultats de Kummer tout en évitant l'emploi des nombres idéaux.

Léopold Kronecker (1823-1891), élève de ce dernier, s'est plutôt intéressé aux équations algébriques. Citons enfin *Paul Bachmann*, né à Munster *.

On peut dire que la *Théorie des nombres*, telle qu'elle est traitée aujourd'hui, date de Gauss. Nous avons déjà rappelé de façon très brève des travaux de *Jacobi*, *Dirichlet*, *Eisenstein*, *Henry Smith*. Nous nous contentons d'ajouter quelques notes sur les développements postérieurs de certaines branches de cette théorie.

La distribution des nombres premiers a été étudiée en particulier par G.-F.-B. *Riemann*, J.-J. *Sylvester*, et P.-L. *Tchebycheff* (1) (1821-1894), de Saint-Pétersbourg. Le court traité de Riemann, sur le nombre des nombres premiers qui existent entre deux nombres donnés, offre un exemple remarquable de sa puissance analytique. Legendre avait antérieurement montré que le nombre des nombres premiers moindres que n était approximativement

$$n \times \frac{1}{\log_e n - 1{,}08366};$$

mais Riemann est allé plus loin; son traité contient, avec un mémoire de Tchebycheff, à peu près tout ce qui a été fait jusqu'ici concernant un problème d'un intérêt tel qu'il s'imposait à l'esprit de tous ceux qui ont abordé la théorie des nombres et qui, cependant, a dépassé la puissance même de Lagrange et de Gauss.

La partition des nombres, question qu'avait spécialement étudiée Euler, a été traitée par *A. Cayley*, *J.-J. Sylvester*, et *P.-A. Mac Mahon*.

(1) Les œuvres réunies de Tchebycheff, éditées par H. Markoff et N. Sonin, sont en cours de publication à Saint-Pétersbourg; le premier volume a été publié en 1899.

La représentation des nombres par des formes spéciales, les diviseurs des nombres de formes déterminées, les théorèmes généraux relatifs aux diviseurs des nombres sont des questions qui ont été étudiées par *J. Liouville* (1809-1882), directeur, de 1836 à 1874, du « Journal de mathématiques » et par J.-W.-L. *Glaisher*, de Cambridge.

La conception des nombres premiers idéaux est dûe à E.-E. *Kummer* de Berlin (1810-1893) et ses recherches ont été poursuivies par J.-W.-R. *Dedekind*, l'éditeur des œuvres de Dirichlet. E. F. *Kummer* étendit également les théorèmes de Gauss sur les résidus quadratiques aux résidus d'un ordre plus élevé.

La question des formes quadratiques binaires a été étudiée par A.-L. *Cauchy*; L. *Kronecker* (1) de Berlin (1823-1891) s'est occupé des formes ternaires et quadratiques ; et C. *Hermite* de Paris (1822-1901) des formes ternaires.

Les ouvrages classiques les plus communs sont peut-être celui de G.-B. Mathews, Cambridge, 1892 ; celui de E. Lucas, Paris, 1891 ; et celui de E. Cahen, Paris, 1900. L'intérêt qui s'attache aux problèmes relatifs à la théorie des nombres semble avoir récemment diminué : peut-être aurait-on avantage à aborder ce sujet par des voies nouvelles.

LA THÉORIE DES FONCTIONS DE PÉRIODICITÉ DOUBLE ET MULTIPLE.

La théorie des fonctions de périodicité double et multiple constitue une branche des mathématiques qui, dans la seconde moitié du XIXe siècle, a attiré particulièrement l'attention. Nous avons déjà fait remarquer que Gauss avait découvert, dès 1808, les fonctions *Thêta* et quelques-unes de leurs propriétés ; mais ses études demeurèrent plusieurs années enfouies au milieu de ses notes et le développement moderne du sujet est dû aux recherches faites par Abel et Jacobi de 1820 à 1830. L'exposition qu'ils en présentèrent a complètement remplacé celle de Legendre, et ils sont

(1) Voir le *Bulletin* de la Société mathématique de New-York, vol. I, 1891-2, pp. 173-184.

considérés, à juste titre, comme les créateurs de cette nouvelle branche des mathématiques.

Abel (1). — Niels Henrick Abel naquit à Findoë en Norvège, le 5 août 1802, et mourut à Arendal, le 6 avril 1829, à l'âge de vingt-six ans.

*Il entra en novembre 1815 à l'Ecole cathédrale de Christiania, où il eut en 1818 Holmoë comme professeur de mathématiques. Celui-ci ne tarda point à reconnaître les dispositions toutes spéciales de son élève ; il lui apprit rapidement les éléments, lut avec lui l'*Introductio* d'Euler, les *Institutiones calculi differentialis* et les *Institutiones calculi integralis* ; il l'initia à la méthode de Lagrange, « qui consiste à ne lire qu'un seul ouvrage à la fois, à le lire tout d'abord sans s'attacher aux difficultés, à revenir ensuite sur ces difficultés, s'aidant alors, s'il est nécessaire, d'autres ouvrages ».

Après s'être initié aux œuvres de Lacroix, Francœur, Poisson, Gauss, Garnier et surtout de Lagrange, Abel entra, en 1821, à l'Université en qualité de boursier, aidé par une cotisation des professeurs.

C'est en 1826 qu'il eut l'idée de l'*inversion* de l'intégrale elliptique.

Historiquement, c'est la théorie des fonctions elliptiques qui ouvre l'ère des mathématiques contemporaines et oriente les recherches des géomètres vers la haute analyse.

Les analystes reconnurent vite que l'intégrale elliptique de première espèce

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

où k^2 est une constante, dite *module*, ne peut s'exprimer à l'aide des fonctions élémentaires. C'est donc une transcendante nouvelle, généralisation de l'*arc sinus* qui correspond à $k = 0$, transcendante à laquelle se ramènent les intégrales

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4}}.$$

(1) La vie d'Abel par C.-A. Bjerknes a été publiée à Stockholm en 1880. Deux éditions des œuvres d'Abel ont été publiées, dont la dernière, due à Sylow et Lie et parue à Christiania, en deux volumes, 1891, est plus complète.

Euler fit connaître au sujet de l'intégrale elliptique de première espèce un théorème important, analogue à l'addition des arcs sinus ; d'autres géomètres, comme Landen et Lagrange, y ajoutèrent quelques résultats ; mais c'est Legendre qui eut le mérite de deviner là « le germe d'une branche importante de l'analyse ». Pendant quarante ans, il étudia l'intégrale de première espèce et aussi les intégrales, peu différentes de deuxième et de troisième espèce, et mit au jour leurs propriétés, à vrai dire sous forme compliquée et fragmentaire, comme il arriverait [1] si l'on étudiait les fonctions trigonométriques en partant de la relation

$$\text{arc sin } x = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Pour faire apparaître une théorie générale des intégrales elliptiques, il fallait introduire la fonction *inverse*, qui est à l'intégrale ce que le sinus est à l'arc sinus ; il fallait écrire

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2x^2)}}$$

et étudier non plus u comme fonction de x, mais x comme fonction de u.

C'est ce que fit Abel, tout en introduisant les valeurs imaginaires de la variable u.

La nouvelle fonction x fut désignée plus tard par le symbole $sn\ u$.

Grâce au théorème d'addition d'Euler, Abel découvrit cette propriété capitale de la fonction sn u d'être *doublement périodique* relativement à u, c'est-à-dire de ne pas changer quand on augmente u de l'une ou l'autre de deux quantités fixes, irréductibles l'une à l'autre, dites périodes, et dont l'une au moins est imaginaire : de même *sin* u est une fonction simplement périodique de u, où la période est 2π. La même propriété, de double périodicité, appartient aux deux autres fonctions elliptiques $cnu = \sqrt{1 - sn^2u}$, $dnu = \sqrt{1 - k^2sn^2u}$, dont l'étude se lie à celle de snu, comme l'étude du cosinus est liée à celle du sinus *.

[1] * Voir l'exposé sommaire de cette question dans le Traité des fonctions elliptiques de *Appell* et *Lacour*, Paris 1897 *.

Les premiers mémoires d'Abel concernant les fonctions elliptiques furent publiés dans le *Journal de Crelle*. Abel traite le sujet au point de vue de la théorie des équations et des formes algébriques, exposition à laquelle ses recherches l'avaient naturellement conduit.

Le résultat important et très général connu sous le nom de théorème d'Abel, appliqué, par la suite, par Riemann, à la théorie des fonctions transcendantes, fut envoyé en 1826 à l'Académie des sciences de Paris, mais principalement à cause de l'inaction de Cauchy il ne fut pas imprimé avant 1841.

* Dans ce mémoire, Abel introduit le premier les différentielles algébriques les plus générales, auxquelles Jacobi, par un juste hommage, a donné le nom d'abéliennes *.

Sa publication est due aux recherches de Jacobi, à la suite d'une citation sur la question, faite par B. Holmbœ dans son édition des œuvres d'Abel parue en 1830. Il n'est pas très facile de présenter le théorème d'Abel d'une façon à la fois intelligible et concise; on peut cependant dire que ce théorème permet d'évaluer la somme d'un certain nombre d'intégrales ayant le même intégrant, mais différentes limites. Ces limites sont les racines d'une équation algébrique. Le théorème donne la somme des intégrales en fonction des constantes qui se présentent dans cette équation et dans l'intégrant. Nous pouvons regarder l'inverse de l'intégrale de cet intégrant comme une nouvelle fonction transcendante, et ainsi le théorème fournit une propriété de cette fonction.

Par exemple, si on applique le théorème d'Abel à $(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$ il fournit le théorème d'addition pour les fonctions circulaires ou trigonométriques. Le nom de fonctions abéliennes a été donné aux transcendantes supérieures de périodicité multiple qui furent tout d'abord étudiées par Abel.

* En empruntant le langage géométrique, les intégrales abéliennes appartenant à une courbe plane $f(x,y) = o$, sont celles du type $\int \psi(x, y)\, dx$ où ψ désigne une fonction rationnelle de x, y et où y est lié à x par l'équation même de la courbe.

Soient maintenant $a, b, c, \ldots$ les points d'intersection de la courbe primitive avec une courbe quelconque ; soient A, B, C,... les points où viennent $a, b, c, \ldots$ quand cette dernière courbe varie ;

prenons une intégrale abélienne quelconque et donnons-lui successivement pour limites les coordonnées des points *a* et A, b et B,...; le célèbre théorème d'Abel peut s'énoncer : *la somme des intégrales ainsi définies est une* fonction rationnelle et logarithmique des valeurs initiales et finales des coefficients servant à définir la courbe mobile.

La théorie des fonctions abéliennes, qui a fait l'objet de remarquables travaux de Neumann, de F. Klein, avec ses formes premières, de MM. Pick, Burckhardt, Ritter, Nöther, Prym, Weber, Frobenius, Schottky, Weierstrass, Picard, Poincaré, est encore en voie de formation. Comme dans les fonctions hyperelliptiques, le problème principal est celui de la transformation. Nous en reparlerons à propos de l'œuvre d'Hermite *.

Abel critiqua l'usage des séries non convergentes et découvrit le théorème bien connu qui donne le critérium de la validité du résultat obtenu en multipliant une série infinie par une autre. Comme exemple de la fécondité de ses idées nous pouvons citer en passant sa célèbre démonstration de cette proposition : il est impossible d'exprimer la racine de l'équation générale du cinquième degré en fonction des coefficients au moyen d'un nombre fini de radicaux et de fonctions rationnelles ; ce théorème est très important puisqu'il limite définitivement un champ de recherches qui avait attiré autrefois l'attention de nombreux géomètres. Nous devons ajouter que ce théorème avait été énoncé en 1798 par Paolo Ruffini, médecin italien qui exerçait à Modène ; mais nous croyons que la démonstration qu'il en donnait manquait de généralité.

* La vie d'Abel fut courte et remplie de difficultés matérielles. On ne saurait oublier non plus qu'il eut avec Crelle l'honneur de fonder le célèbre recueil qui porte le nom de *Journal de Crelle* (1) *.

Jacobi (2). — *Charles-Gustave-Jacob Jacobi*, né à Postdam, le

(1) * Voir à propos d'Abel un article de G. Brunel dans le *Bulletin des sciences mathématiques* (1885) et aussi le tome XXIII des *Acta matematica* *.

(2) Voir C. J. Gerhardt, *Geschichte der Mathematik in Deutschland*, Munich, 1877. Les œuvres complètes de Jacobi ont été éditées par Dirichlet, 3 volumes, Berlin, 1846-71, et accompagnées d'une biographie, 1852 ; une nouvelle édition par C. W. Borchart et E. Weierstrass a été publiée à Berlin, en 8 volumes, 1881-87.

10 décembre 1804, de parents israélites, et mort à Berlin, le 18 février 1851, fit ses études à l'Université de Berlin, où il obtint en 1825, le grade de docteur en philosophie. En 1827, il devint professeur suppléant de mathématiques à Kœnigsberg et, en 1829, il fut promu professeur ordinaire ; il occupa cette chaire jusqu'en 1842, époque où le gouvernement Prussien lui accorda une pension ; il se rendit alors à Berlin où il résida jusqu'à sa mort en 1851. Il a été, pour l'enseignement des mathématiques, le plus grand maître de sa génération, et ses leçons, bien que parfois peu correctement ordonnées, étaient un stimulant puissant pour les élèves capables de le comprendre.

Les recherches les plus célèbres de Jacobi ont trait aux fonctions elliptiques ; il a établi leur théorie avec Abel mais indépendamment des travaux de ce dernier. Les résultats de Jacobi se trouvent dans son traité sur les fonctions elliptiques, publié en 1829, et dans quelques notes plus anciennes parues dans le *Journal de Crelle* ; ils sont antérieurs à ceux de Weierstrass dont nous parlons plus bas. La correspondance entre Legendre et Jacobi sur les fonctions elliptiques a été réimprimée dans le premier volume de la collection des œuvres de Jacobi. De même qu'Abel, Jacobi reconnaissait que les fonctions elliptiques ne touchaient pas simplement aux théories de l'intégration, mais constituaient des types de nouvelles transcendantes ; il s'occupa ensuite d'une façon toute spéciale de la fonction Thèta. Le passage [1] suivant dans lequel il explique ses idées est assez intéressant pour mériter une reproduction textuelle.

« E quo, cum universam, quæ fingi potest, ampletactur periodicitatem analyticam elucet, functiones ellipticas non aliis adnumerari debere, transcendentibus, quæ quibusdam gaudent elegantiis, fortasse pluribus illas aut majoribus, sed speciem quandam iis inessi perfecti et absoluti ».

* On doit à Jacobi l'expression des fonctions elliptiques *sn*, *cn*, *dn* sous forme de quotients de séries ou de produits infinis, découverte déjà nettement indiquée dans le premier mémoire d'Abel ; Jacobi créa à cette occasion la théorie des fonctions θ, qui sont des séries d'exponentielles et qui jouent un grand rôle dans la

[1] Voir la collection de ses œuvres, vol. I, 1881, p. 87.

théorie des fonctions elliptiques. Comme le montra Jacobi, les fonctions *sn*, *cn*, *dn* s'expriment en effet chacune par le quotient de deux fonctions θ. Enfin, Jacobi exprima les intégrales elliptiques de deuxième et de troisième espèces à l'aide des fonctions θ et de leurs dérivées ; il montra ainsi que les différentielles elliptiques les plus générales pouvaient s'intégrer par les transcendantes nouvelles, conquête non moins précieuse pour la théorie que pour l'application.

D'autres surprises étaient réservées aux mathématiciens par les relations curieuses qu'établit Jacobi entre les séries θ et l'arithmétique, et qui lui donnèrent d'intéressantes propositions sur la décomposition des nombres entiers en sommes de quatre carrés. Après lui, Hermite et Kronecker ont approfondi ce sujet *.

Parmi les autres recherches de Jacobi, nous pouvons signaler spécialement ses notes sur les déterminants, qui contribuèrent beaucoup à en généraliser l'usage ; et en particulier son invention du Jacobien, c'est-à-dire du déterminant fonctionnel formé par n^2 ~~coefficients différentiels~~ dérivées partiels du premier ordre de n fonctions données de n variables indépendantes. Nous devons aussi mentionner ses notes sur les transcendantes abéliennes ; ses recherches sur la théorie des nombres, auxquelles nous avons déjà fait allusion ; ses importants mémoires sur la théorie des équations différentielles, ordinaires et partielles ; son développement du calcul des variations ; ses mémoires sur le problème des trois corps et sur d'autres problèmes particuliers de dynamique. Les résultats auxquels il était parvenu dans ces dernières recherches se retrouvent dans ses *Vorlesungen über Dynamik*.

Riemann (1). — *Georges-Frédéric-Bernhard Riemann* naquit à Breselenz, le 17 septembre 1826, et mourut à Selasca le 20 juillet 1866. Il étudia à Göttingue avec Gauss, et ensuite à Berlin avec Jacobi, Dirichlet, Steiner et Eisentein, qui tous étaient professeurs dans cette ville à la même époque. Il eut à lutter contre la pau-

(1) Les œuvres de Riemann, édictées par H. Weber et précédées de l'histoire de sa vie par Dedekind, furent publiées à Leipzig, seconde édition, 1892.

Une autre courte biographie de Riemann a été écrite par E. J. Schering, Göttingue, 1867.

vreté et la maladie pour terminer ses études. En 1857 il fut nommé professeur à Göttingue; son talent fut bientôt généralement reconnu, mais en 1862 sa santé commença à décliner et il mourut quatre ans plus tard, travaillant jusqu'à la fin avec autant d'ardeur que de courage.

Riemann doit être considéré comme l'un des mathématiciens les plus profonds et les plus brillants de son temps. Il produisit peu mais son originalité et son talent sont manifestes; ses recherches sur les fonctions et sur la géométrie, en particulier, furent l'origine de développements forts importants de ces sciences.

Sa note la plus ancienne, écrite en 1850, traite des fonctions algébriques d'une variable complexe, et donna naissance à une nouvelle méthode pour traiter la théorie des fonctions. Le développement de cette méthode est spécialement le fait de l'Ecole de Göttingue à laquelle les noms de Riemann et de Klein sont étroitement liés. En 1854, Riemann écrivit son célèbre mémoire sur les hypothèses servant de fondement à la géométrie; nous y faisons allusion plus bas. Ce mémoire fut suivi par d'autres sur les fonctions elliptiques et sur la distribution des nombres premiers qui ont déjà été mentionnés. Enfin, en ce qui concerne les fonctions de périodicité multiple, on ne s'avance pas trop en disant que, dans son mémoire paru dans le *Journal de Borchardt*, année 1857, il a fait pour les fonctions abéliennes ce qu'Abel avait fait pour les fonctions elliptiques.

* Le problème fondamental de la théorie des fonctions algébriques est celui de l'inversion, dont il a été parlé à propos des travaux d'Abel.

Il fallait définir, d'une manière générale, les intégrales ou les différentielles algébriques propres à remplacer dans les équations d'inversion les différentielles elliptiques ou hyperelliptiques étudiées par Abel.

C'est ce que fit Riemann.

Représentant, comme Cauchy, la variable imaginaire sur un plan, mais sur un plan composé d'autant de feuillets superposés que la fonction algébrique à étudier a de valeurs distinctes, soudant ces feuillets le long de certaines sections, déterminées par les points critiques de la fonction, passant d'un feuillet à l'autre, selon des lois bien définies, quand la variable traverse une section, Rie-

mann parvint à rendre uniforme, les fonctions algébriques et avec celles-ci les intégrales abéliennes qui en dépendent ([1]).

La théorie de Riemann conduit à un ensemble de propositions généralisant les fonctions elliptiques et faisant pénétrer fort avant dans la nature des fonctions algébriques.

Son œuvre a été simplifiée par Lüroth, Clebsch, et Clifford qui a montré que l'ensemble de ses feuillets peut être transformé en une surface à Trous.

Aux idées de Riemann sur les fonctions analytiques, se lie le problème de la *représentation conforme* de deux aires l'une sur l'autre, problème qui consiste à trouver une fonction uniforme $Z = f(z)$, telle qu'à un point du plan de la variable z, situé dans une aire donnée, corresponde *un* point du plan Z, situé aussi dans une aire donnée et inversement. Ce problème, abordé par Riemann, a été résolu par M. Schwarz pour des aires limitées par un seul contour, par M. Schottky dans le cas de plusieurs contours *.

Fonctions elliptiques et abéliennes ([2]). — Nous avons déjà fait allusion aux recherches de *Legendre*, *Gauss*, *Abel*, *Jacobi* et *Riemann* sur les fonctions elliptiques et abéliennes. Le sujet a également été traité, entre autres auteurs, par *J.-G. Rosenhain* (1816-1887) de Kœnigsberg, qui écrivit, en 1844, sur la fonction hyperelliptique ou double θ et sur les fonctions de deux variables avec quatre périodes; *A. Göpel* (1812-1847) de Berlin, qui discuta ([3]) les fonctions hyperelliptiques; *L. Kronecker* ([4]) (1823-1891), de Berlin, qui écrivit sur les fonctions elliptiques; *L. Königsberger* ([5]), de Heidelberg, qui discuta la transformation de la fonction double θ; *F. Brioschi* (1824-1897), de Rome, qui écrivit sur les fonctions elliptiques et hyperelliptiques; *Henry Smith*,

([1]) A propos des variables imaginaires, voir l'exposé des travaux de CAUCHY.

([2]) Voir l'introduction à l'ouvrage *Elliptische Functionen*, par A. ENNEPER, seconde édition (éd. par F. MÜLLER), Halle, 1890; et *Geschichte der Theorie der Elliptischen Transcendenten*, par L. KÖNIGSBERGER, Leipzig, 1879. Sur l'histoire des fonctions abéliennes, voir les *Transactions of the British Association*, vol. LXVII, Londres, 1897, pp. 246-286.

([3]) Voir *Journal de Crelle*, vol. XXXV, 1847, pp. 277-312; une notice nécrologique par JACOBI s'y trouve, pp. 313-317.

([4]) Ses œuvres réunies en 4 volumes, éditées par K. HENSEL, sont en ce moment en cours de publication, à Leipzig, 1895.

([5]) Voir ses leçons publiées à Leipzig, en 1874.

d'Oxford, qui étudia la théorie de la transformation, les fonctions θ et ω, et certaines fonctions modulaires: *A. Cayley*, de Cambridge, qui le premier, en 1845, étudia la théorie des produits doublement infinis et détermina leur périodicité, et qui écrivit longuement sur la relation existant entre les recherches de Legendre et de Jacobi; et *C. Hermite* (1822-1901), de Paris, dont les travaux se rapportent principalement à la théorie de la transformation et du développement supérieur des fonctions θ.

* **Lamé**. — *Gabriel Lamé* naquit à Tours, le 22 juillet 1795. Sans fortune, il eut la plus grande peine à faire ses études, entra cependant à l'Ecole polytechnique. Sa promotion fut licenciée pour cause d'indiscipline, et il fut alors sur le point de partir pour le Brésil. Heureusement admis à passer ses examens de sortie, il fut nommé ingénieur des mines et envoyé en Russie, avec Clapeyron, sur la demande du Tsar qui désirait faire construire des routes.

Il fut, dans la suite, professeur à l'Ecole polytechnique, et c'est là qu'il médita ses plus beaux travaux.

Peu après son retour en France, il avait publié un beau mémoire sur les surfaces isothermes. Mais c'est plutôt vers la physique mathématique qu'il dirigea ses efforts, car il eût à enseigner cette branche des sciences en Sorbonne. On lui doit cependant un remarquable travail sur l'équation de Fermat et l'étude d'une équation différentielle importante reprise par Brioschi et Hermite *.

Weierstrass [1]. — *Carl Weierstrass*, né en Westphalie, le 31 octobre 1815, et mort à Berlin, le 19 février 1897, a été l'un des plus grands mathématiciens du XIXe siècle.

Son nom est lié d'une façon inséparable à deux branches des mathématiques pures : les fonctions elliptiques et abéliennes, et la théorie des fonctions. Ses plus anciennes recherches sur les fonctions elliptiques sont relatives aux fonctions θ, qu'il étudia sous

[1] La collection des œuvres de WEIERSTRASS est actuellement en cours de publication, Berlin, 1894, et suiv. Des récits de sa vie, par G. MITTAG-LEFFLER et H. POINCARÉ, sont donnés dans les *Acta Mathematica*, 1897, vol. XXI, pp. 79-82 et 1899, vol. XXII, pp. 1-18.

une forme modifiée permettant de les exprimer suivant les puissances du module. A une époque récente, il inventa une méthode permettant de traiter toutes les fonctions elliptiques d'une manière symétrique. Il fut conduit naturellement à cette méthode par ses recherches sur la théorie générale des fonctions, dans lesquelles il embrassait, en les coordonnant, les diverses voies suivies antérieurement.

* Aux fonctions d'Abel et de Jacobi, *sn, cn, dn*, θ, Weierstrass a substitué d'autres éléments elliptiques, les fonctions p, ζ, σ, qui simplifient les formules et les applications. Après Abel, Jacobi et Weierstrass, on appelle aujourd'hui fonctions elliptiques les fonctions à deux périodes d'une seule variable; leur théorie est aussi achevée que celle des fonctions circulaires. Leurs applications sont des plus nombreuses : en analyse pour les équations de M. Picard, dont la plus simple, intégrée par Hermite, est une équation célèbre que Lamé avait rencontrée dans ses recherches de physique mathématique ; en mécanique rationnelle aussi *.

En particulier, Weierstrass construisit une théorie des fonctions analytiques uniformes. La représentation des fonctions par des produits infinis et par des séries attira également d'une façon toute spéciale son attention. En dehors de ses travaux sur les fonctions, il écrivit encore ou fit des leçons sur la nature des hypothèses faites en analyse, sur le calcul des variations, et sur la théorie des surfaces minima. Ses méthodes sont remarquables à cause de leur grande généralité. Des recherches récentes faites sur les fonctions elliptiques sont en grande partie basées sur les méthodes de Weierstrass.

* Weierstrass s'est préoccupé toute sa vie des fonctions abéliennes ; dans la première période de sa carrière, il applique à ces transcendantes, et en particulier aux fonctions hyperelliptiques, les propriétés connues de *sn*, *cn* et *dn* ; à cette époque survint le premier mémoire de Riemann, qui relégua au second plan les fonctions hyperelliptiques : les fonctions abéliennes engendrées par les courbes algébriques les plus générales venaient à l'ordre du jour.

C'est alors que Weierstrass se posa ce problème : rechercher les fonctions périodiques les plus générales. Un premier problème déjà résolu par Jacobi, se posait : combien une fonction de *n*

variables peut-elle avoir de périodes ? $2n$, démontra lui aussi Weierstrass et plus simplement que son devancier. Puis à son tour il dirigea ses recherches vers les fonctions de n variables à $2n$ périodes les plus générales et parvint à montrer qu'elles jouissent de propriétés analogues à celles des transcendantes elliptiques, théorèmes d'addition notamment, résultats importants s'il en fût.

Mais la principale découverte de Weierstrass est celle des *facteurs primaires*.

Les transcendantes les plus simples sont les fonctions entières, qui n'ont de points singuliers qu'à l'infini. Ces transcendantes sont toujours des produits de facteurs primaires, composés chacun du produit d'un polynôme du premier degré par une exponentielle dont l'exposant est un polynôme de degré q : q est dit genre du facteur primaire. Une fonction est de genre q quand tous ses facteurs primaires sont de genre q au plus.

A cette découverte se rattache la classification des fonctions entières en genres, dont l'importance arithmétique a été récemment mise en évidence par M. Hadamard. Weierstrass a trouvé là également le moyen de construire une fonction entière ayant des zéros, ou racines, donnés.

Weierstrass a de plus trouvé dans la notion des facteurs primaires le moyen de représenter toute fonction méromorphe, on nomme ainsi les fonctions à singularités simplement polaires, par un quotient de fonctions entières, propriétés que M. Poincaré a étendues aux fonctions de deux variables.

Le domaine ainsi ouvert aux géomètres était immense. MM. Runge et Mittag-Leffler peuvent désormais effectuer la représentation des fonctions uniformes par des séries d'éléments simples ; M. Picard peut montrer qu'une fonction entière peut prendre toutes les valeurs finies, sauf une peut-être ; M. Poincaré peut faire voir que si y est une fonction analytique *non uniforme* de x, on peut toujours exprimer x et y en fonction uniforme d'une variable z, ramenant ainsi l'étude des fonctions non uniformes à celles des fonctions uniformes ; MM. Appell et Goursat étudient les fonctions à espaces lacunaires, M. Painlevé les lignes singulières des fonctions analytiques, MM. Borel et Hadamard donnent d'importantes propriétés des séries de puissances.

C'est enfin Weierstrass qui, le premier, a donné l'exemple d'une

fonction continue sans dérivée, à laquelle correspond une courbe où la tangente en un point quelconque est indéterminée... exemple frappant de la rigueur qu'il voulait voir en tout, de sa logique inflexible *.

Au nombre des continuateurs et des émules de Weierstrass, nous citerons *G.-H. Halphen* (1) (1844-1889), officier dans l'armée française, dont les recherches sont largement fondées sur les travaux de Weierstrass et *F.-C. Klein*, de Gœttingue. Les travaux de ce dernier sont relatifs aux fonctions abéliennes, aux fonctions elliptiques modulaires, et aux fonctions hyperelliptiques. Nous devons citer encore *H.-A. Schwarz*, de Berlin ; *H. Weber*, de Strasbourg ; *M. Nöther*, d'Erlangen ; *W. Stahl*, d'Aix-la-Chapelle ; *F.-G. Frobenius*, de Berlin et *J.-W.-L. Glaisher*, de Cambridge, qui a développé, en particulier la théorie de la fonction zêta.

Les ouvrages les plus répandus de nos jours sur les fonctions elliptiques sont peut-être ceux de J. Tannery et J. Molk, 4 volumes, Paris 1893-1901 ; de P.-E. Appell et E. Lacour, Paris, 1896 ; de H. Weber, Brunswick, 1891 ; et de G.-H. Halphen, 3 volumes, Paris, 1886-1891.

La théorie des fonctions. — Nous avons déjà dit que la théorie moderne des fonctions est due pour une grande part à Weierstrass. C'est un sujet présentant un attrait singulier et qui promet d'être une branche féconde et vaste de la science mathématique. Au point de vue historique, elle doit le jour à *A. Cauchy*, qui posa les fondements de la théorie des fonctions synectiques d'une variable complexe. Ces recherches furent continuées par *J. Liouville*, qui écrivit principalement sur les fonctions doublement périodiques. Ces travaux, étendus et reliées entre eux par *A. Briot* (1817-1882) et *J.-C. Bouquet* (1819-1885), reçurent par la suite de nouveaux développements de *C. Hermite* (1822-1901).

Les recherches sur la théorie des fonctions algébriques ont leur origine dans une note de *G.-F.-B. Riemann*, qui date de 1850 ; *H.-A. Schwarz*, de Berlin, établit d'une façon rigoureuse plusieurs théorèmes qui laissaient place à quelques objections après

(1) Un exposé de la vie et des travaux d'HALPHEN a été donné dans le *Journal de Liouville*, 1889, pp. 345-359, et dans les *Comptes Rendus*, 1890, vol. CX, pp. 489-497.

les travaux de Riemann. Dans la suite, *F.-C. Klein*, de Gœttingue, relia la théorie des fonctions de Riemann à la théorie des groupes, et s'occupa des fonctions automorphes et modulaires ; *H. Poincaré*, de Paris, s'occupa également des fonctions automorphes, de la théorie générale des fonctions et de son application spéciale aux équations différentielles ; tout récemment, *C. Painlevé*, de Paris, a écrit sur les fonctions uniformes, et *K.-H. Hensel*, de Berlin, sur les fonctions algébriques.

Nous avons déjà dit que les travaux de Weierstrass eurent pour effet de jeter une grande lumière sur ces questions. Sa théorie des fonctions analytiques a été développée par *M.-G. Mittag-Leffler*, de Stockholm, l'un des plus distingués mathématiciens contemporains. *C. Hermite*, *P.-F. Appell*, *C.-F. Picard* et *E. Goursat*, ont également écrit sur des branches spéciales de la théorie générale des fonctions.

Comme ouvrages d'étude, nous pouvons mentionner les suivants : *Theory of Functions of a complex variable*, par A.-R. Forsyth, seconde édition, Cambridge, 1900 ; *Die Funktionstheorie*, par J. Petersen, Copenhague, 1898 ; *Abel's Theorem*, par H.-F. Baker, Cambridge, 1897 ; *Des Fonctions algébriques*, par P.-E. Appell et E. Goursat, Paris, 1895 ; *The Theory of functions*, par J. Harkness et F. Morley, Londres, 1893 ; et peut-être l'ouvrage de Neumann, *Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale*, seconde édition, Leipzig, 1884.

Algèbre supérieure. — La théorie des nombres peut être considérée comme une arithmétique supérieure, et la théorie des fonctions elliptiques et abéliennes comme une trigonométrie supérieure. Les théories de l'algèbre supérieure (en y comprenant celle des équations) ont également été l'objet de travaux importants ; elles étaient les sujets favoris des études des mathématiciens dont nous allons parler, bien que leurs recherches ne se soient pas bornées à ce sujet.

Cauchy (¹). — *Augustin-Louis Cauchy* est, pour l'analyse, le

(¹) Voir *La vie et les travaux de Cauchy*, par L. Valson, 2 volumes, Paris, 1868. Une édition complète de ses œuvres est actuellement en cours de publication aux frais du gouvernement français.

principal représentant de l'Ecole française au XIXe siècle, il naquit à Paris, le 21 août 1789, et mourut à Sceaux, le 25 mai 1857. *Esprit universel, il fut initié par son père à la connaissance de ~~toutes les~~ branches des connaissances humaines*. Il entra à l'Ecole polytechnique, le berceau de tant de mathématiciens français de cette époque, et devint ingénieur des ponts-et-chaussées. Son premier travail est une note de 1811 sur les polyèdres. Des mémoires sur l'analyse et la théorie des nombres, présentés en 1813, 1814 et 1815, montrèrent l'étendue de son savoir qui était loin d'être limité à la géométrie : dans une de ces notes, il généralisait quelques résultats établis par Gauss et Legendre ; dans une autre, il donnait un théorème sur le nombre des valeurs qu'une fonction algébrique peut admettre quand les constantes littérales qu'elle contient sont échangées. C'est ce dernier théorème qui permit à Abel d'établir, qu'en général, une équation algébrique d'un degré supérieur au quatrième ne peut être résolue au moyen d'un nombre fini d'expressions purement algébriques.

Nous devons à Cauchy et à Gauss l'étude scientifique des séries ayant un nombre infini de termes ; mais c'est Cauchy qui a établi des règles générales permettant de s'assurer, dans des cas très étendus, de la convergence ou de la divergence de telles séries.

*Plus tard, *Bertrand* a donné le moyen de construire des ensembles de séries convergeant ou divergeant de moins en moins rapidement, ce qui permet, dans tous les cas pratiques, de décider de la convergence ou de la divergence d'une série donnée*.

Peu d'ouvrages de date plus ancienne font allusion aux restrictions que comporte l'emploi de ces séries. Lorsque Cauchy lut sa première note sur cette question, Laplace, dit-on, fut si impressionné par les exemples cités du danger d'employer de telles séries sans en avoir rigoureusement vérifié la convergence, qu'il mit de côté un travail auquel il était occupé, et ferma sa porte à tous les visiteurs, afin de s'assurer que toutes les démonstrations données dans les premiers volumes de sa *Mécanique céleste* étaient correctes ; il eut la bonne fortune de constater qu'aucune erreur importante ne s'était glissée dans sa rédaction par suite de l'emploi des séries. L'exposition de la théorie des séries et des conceptions fondamentales du calcul infinitésimal

était alors basée, dans la plupart des ouvrages classiques, sur les travaux d'Euler, et n'était pas sans soulever quelques objections de la part de ceux qui avaient conservé l'habitude des raisonnements rigoureux. C'est l'un des principaux mérites de Cauchy d'avoir établi cette branche de l'analyse sur un fondement logique.

* Dans les dernières années du XIXe siècle, la question des séries a été reprise par les géomètres français, MM. Borel et Servant notamment, qui ont réussi à résoudre ce problème : sommer les séries divergentes, dans des cas très étendus. Il s'agissait en l'espèce de substituer à une série

$$f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \dots$$

convergente pour les seules valeurs de x comprises entre deux limites données a et b, une série convergente également entre a et b, ayant dans cet intervalle même somme que la proposée et *de plus*, convergente pour x compris entre A et B, l'intervalle AB comprenant l'intervalle ab *.

Lors de la Restauration, en 1816, l'Académie des sciences fut renouvelée et, malgré l'indignation que manifestèrent les membres de cette société savante, Cauchy ne craignit pas d'accepter le siège laissé vacant par l'expulsion de Monge [1]. Il fut également, et en même temps, nommé professeur à l'Ecole polytechnique. Les leçons qu'il y fit sur l'analyse algébrique, le calcul infinitésimal et la théorie des courbes furent publiées et devinrent classiques. A la révolution de 1830, il quitta la France et fut d'abord professeur à Turin, d'où il se rendit à Prague pour faire l'éducation scientifique du comte de Chambord. Il retourna en France en 1837 ; en 1848 d'abord, puis de nouveau en 1851, par dispense spéciale de l'empereur, il fut autorisé à occuper une chaire de mathématiques sans être dans l'obligation de prêter le serment exigé de tous les fonctionnaires.

Son activité était prodigieuse et, de 1830 à 1859, il publia dans les *Comptes Rendus* de l'Académie plus de 600 mémoires originaux et environ 150 rapports. Ils embrassent un nombre extraordinaire de sujets, mais sont de mérite très inégal.

Parmi les plus importantes de ses recherches, nous pourrions

(1) M. Rouse Ball exagère quelque peu ; Cauchy royaliste convaincu, nommé par ordre du roi, ne crut pas devoir désobéir à cet ordre. (*Note de l'éditeur*).

citer ses travaux sur la convergence des séries ; la détermination du nombre des racines réelles et imaginaires d'une équation algébrique quelconque ; sa méthode pour le calcul approché des racines d'une équation ; sa théorie des fonctions symétriques des ~~coefficients~~ des équations d'un degré quelconque ; son évaluation *a priori* d'une quantité moindre que la plus petite différence entre les racines d'une équation ; ses notes de 1841 sur les déterminants, qui permirent d'en généraliser l'usage, et ses recherches sur la théorie des nombres. Cauchy perfectionna beaucoup la théorie des intégrales définies, inventa le calcul des résidus. Il a également donné une méthode analytique directe pour déterminer les inégalités planétaires de longue durée. Ses travaux en physique consistent en mémoires sur les ondes et sur la quantité de lumière réfléchie par les surfaces métalliques, et en diverses autres notes relatives à l'optique.

* Avant Cauchy, les imaginaires avaient été employés en analyse, souvent avec succès, jamais sans appréhension ; Cauchy, et c'est déjà une véritable découverte, commence par définir ce qu'on doit entendre par fonction de la variable imaginaire $z = x + iy$. $P(x, y) + i\,Q(x, y)$ est fonction de $z = x + iy$ si elle admet une dérivée par rapport z, ce qui nécessite que $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}$ et $\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$; les deux fonctions P et Q des variables réelles x et y vérifient dès lors l'équation de Laplace $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$; de telles fonctions sont dites harmoniques. Très effacées dans la théorie de Cauchy, on verra ces notions passer au premier plan dans celle de Riemann.

L'intégrale d'une fonction de variable imaginaire n'est point déterminée, comme l'est celle d'une fonction de variable réelle, quand on se donne les valeurs initiales et finales de la variable z. Il faut donner en outre les valeurs que prend z, ou les valeurs que prennent x, y, entre les valeurs initiales et finales. Géométriquement, en représentant la variable $z = x + iy$ sur un plan par le point de coordonnées x, y si a, b sont les points qui correspondent aux limites, l'intégrale doit dépendre de la ligne d'*intégration* que suit le point z entre a et b : le théorème fondamental de Cauchy est qu'en général elle n'en dépend pas. En général, pour deux chemins quelconques joignant les points a et b, l'intégrale a la même valeur, sauf quand ils comprennent un *point critique* de la

fonction, un point où la fonction est infinie ou indéterminée, et aussi dans le cas d'une fonction à valeurs multiples, comme un radical, les points où quelques-unes de ces valeurs deviennent égales, distinction qui n'a été nettement faite que par Puiseux.

De là, Cauchy, dans une série de mémoires parus de 1825 à 1851, et que complètent sur plusieurs points importants les travaux de Puiseux (1850–1851) déduit une série de propositions qui forment la base de la science mathématique actuelle.

Voici l'une des plus importantes : une *fonction analytique*, c'est-à-dire une fonction d'une variable imaginaire au sens de Cauchy, est développable en série, ordonnée suivant les puissances croissantes de $z - a$, et qui converge lorque z reste dans un cercle ayant pour centre le point a, supposé non critique, et pour rayon la distance de ce point au point critique le plus voisin : c'est l'extension au domaine imaginaire de la série classique de Taylor.

Sur la circonférence du cercle de convergence, ainsi défini, il existe au moins un point critique a, un point où la fonction n'est plus analytique. Prenons un point b situé dans le cercle de convergence : nous pourrons partir de ce point et développer la fonction en série suivant les puissances de $z - b$, cela dans un cercle ayant pour centre le point b et pour rayon la distance de b à a ; on conçoit que certains points de ce second cercle seront extérieurs au premier cercle, que le second développement sera valable pour des points, pour des valeurs de z, où le premier ne l'était pas. On dit que l'on a *prolongé* la fonction analytique en dehors du premier cercle. D'importants résultats concernant ce sujet sont dus à Weierstrass et à M. Méray, notamment que *parfois* les cercles ne peuvent s'étendre indéfiniment dans tout le plan. Alors, par une série de cercles se recoupant mutuellement, on définit dans le plan une certaine aire, dont la frontière, la courbe enveloppe des circonférences extrêmes, limite le domaine d'existence de la fonction.

Dans le domaine d'existence, l'on peut avoir des points singuliers isolés qui sont des *pôles* si autour de ces points a la fonction est de la forme :

$$\frac{A_m}{(\beta - a)^m} + \frac{A_{m-1}}{(z-a)^{m-1}} + \ldots + \frac{A_1}{z-a} + \text{série indéfinie en } z - a$$

et des points essentiels si, dans le développement précédent, m est

infini. La frontière contient un ensemble de points singuliers autres que des pôles.

Weierstrass a exclu de son étude les frontières, tandis que MM. Hadamard, Painlevé, Borel étudient les frontières ; M. Borel les franchit même et dans les espaces lacunaires, aires dont tous les points seraient singuliers d'après la définition de Weierstrass, il définit, dans certains cas, un prolongement de la fonction.

De là, le rôle immense de la série de Taylor, des travaux de Cauchy et de ses continuateurs dans l'analyse moderne.

Autre point de vue nouveau, dû encore à Cauchy. Entre deux points donnés, l'intégrale d'une fonction analytique à points critiques situés entre les deux chemins prend des valeurs qui diffèrent entre elles de quantités constantes, dites *périodes* de l'intégrale et qui ne dépendent pas de la position des deux points primitifs : la fonction inverse de l'intégrale est donc une fonction périodique. Ainsi se retrouvent et s'expliquent cette propriété des fonctions circulaires et elliptiques d'être périodiques et certaines particularités des fonctions abéliennes.

Rappelons encore à ce propos que dans toute fonction algébrique u de z, c'est-à-dire dans toute fonction définie par une relation $f(u, z) = 0$ où f est un polynôme entier en u et z, certaines des valeurs de u s'échangent les unes dans les autres, suivant des lois déterminées, lorsque le point z tourne autour des points critiques a de la fonction, et sont développables autour de a en séries convergentes ordonnées suivant certaines puissances fractionnaires de $z - a$.

C'est de ces principes que découlent, entre autres conséquences remarquables, le calcul des résidus, la détermination du nombre des racines situées à l'intérieur d'un contour, étendue au cas de plusieurs variables par Kronecker et M. Picard, la recherche de la valeur d'intégrales définies, etc...

A Cauchy encore, on doit des théorèmes très généraux concernant l'existence des solutions d'une équation différentielle donnée.

Soit donnée une relation :

$$(1) \qquad \varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0;$$

en peut-on déduire une relation équivalente $y = f(x)$?

Les géomètres du XVIIIe siècle avaient intégré un grand nombre d'équations différentielles. Cauchy a scindé la question, et sous son influence, l'on cherche d'abord des théorèmes d'existence, c'est-à-dire des conditions auxquelles φ doit satisfaire pour que l'on puisse avoir une véritable fonction y.

Après Cauchy, MM. Lipschitz et Picard ont donné des théorèmes d'existence sous des conditions plus larges.

Briot et Bouquet, MM. Poincaré et Picard, Bendixson et Horn ont publié de remarquables mémoires concernant des formes particulières de φ.

Plus récemment, M. Painlevé, dans ses leçons faites à Stockhlom, a fait une étude profonde des équations différentielles, envisagées au point de vue fonctionnel. Il se propose de reconnaître les singularités de l'intégrale, de savoir si elle est uniforme,  algébrique, ce qui est au sens moderne du mot intégrer l'équation.

Pour les équations linéaires, où y et ses dérivées n'entrent qu'au premier degré, l'on trouve immédiatement les points singuliers de l'intégrale et la forme de l'intégrale autour de ces points, comme l'ont montré MM. Fuchs, Poincaré, Darboux, Autonne, Thomé, dans le cas des équations du premier ordre. Au contraire, pour les équations d'ordre supérieur à *un*, les points singuliers essentiels de la fonctions y peuvent varier avec les constantes arbitraires qu'introduit l'intégration. Il y a là un fait capital, analogue à l'impossibilité de résoudre par radicaux les équations algébriques de degré supérieur à 4, fait mis en évidence d'abord par M. Picard, puis par M. Painlevé.

M. Painlevé a su de plus déterminer toutes les équations du deuxième ordre à points critiques fixes, indépendantes des constantes arbitraires. Il a entrepris la même recherche pour les équations du troisième ordre, et a été conduit ainsi à la découverte de transcendantes nouvelles.

Nous parlerons plus loin, à propos de Galois, de la théorie des groupes. Disons simplement ici, au sujet des équations différentielles, que cette notion intervient dans les méthodes de Sophus Lie et de Jacobi concernant la recherche effective des intégrales. Sophus Lie a su donner l'unité et la cohésion à ces théories et mettre en évidence les relations étroites qui existent entre les équations

différentielles et les groupes. Les travaux de Sophus Lie sur les groupes continus sont fort importants. Il en est de même des travaux de M. H. Poincaré sur ces groupes discontinus qu'il appelle Fuchsiens et qui engendrent les fonctions fuchsiennes. Ces fonctions donnent l'intégrale de toutes les équations linéaires à coefficients algébriques, c'est-à-dire des équations différentielles linéaires à coefficients irrationnels en x. On sait que les fonctions fuchsiennes généralisent les fonctions elliptiques, en ce sens que si celles-ci permettent la représentation paramétrique des courbes de genre *un* (dans les courbes de genre zéro les coordonnées sont fonctions rationnelles d'un paramètre) les fonctions fuchsiennes donnent la représentation paramétrique de courbes de genre quelconque, comme l'a encore montré M. Poincaré.

La découverte de pareilles fonctions, dont le rôle est capital dans toutes les branches de l'analyse, est un des titres de gloire de M. Poincaré.

Enfin, sous l'influence des écrits de M. Poincaré, l'étude au point de vue réel des équations différentielles a fait récemment de grands progrès.

Dès l'apparition ~~dans la science~~ du concept de *dérivée*, les équations différentielles s'introduisaient dans la science.

Aussitôt après se présentaient les équations aux dérivées partielles, qui posaient ce problème : d'une relation différentielle donnée

(I) $$\varphi\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial^n u}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}, \dots\right) = 0,$$

tirer, si possible, une relation finie

(II) $$u = f(x, y).$$

Dès le début du XIXe siècle, Cauchy, suivi par Jacobi, a ramené aux équations différentielles les équations (I) du premier ordre, c'est-à-dire celles de la forme simple $\varphi\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$. Pour les équations d'ordre quelconque, Cauchy se proposa l'étude des conditions d'existence de la fonction u et démontra ce théorème : on peut trouver un développement de u en série de x, y ayant, sur une courbe gauche donnée, des valeurs données, cela pour le cas de deux variables x, y. Le théorème s'étend au cas de n variables.

Le théorème de Cauchy a été repris par M[me] de Kowaleski, par M. Darboux, par M. H. Poincaré qui en a examiné les cas d'exception.

L'équation $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$, qui admet pour intégrale la fonction $u = F(x) + G(y)$, où F et G sont *arbitraires*, montre combien l'intégrale d'une équation donnée est indéterminée.

Citons sur le sujet Monge, Ampère, Laplace, MM. Moutard, Darboux, Mayer, Sophus Lie, von Weber, Riquier, Delassus, Beudon, Cosserat, König, Bäcklund, Hamburger, Sonine.

Dans tous ces travaux se retrouvent les transformations de contact, déjà employées par Ampère, et des applications d'un haut intérêt intéressant les surfaces.

En même temps que se développait la théorie analytique des équations aux dérivées partielles, le point de vue réel, avec conditions aux limites faisait l'objet de travaux d'autant plus remarquables que la physique mathématique y avait une part importante. La plus célèbre des équations ainsi étudiées est celle de Laplace :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

u ayant des valeurs données sur une courbe fermée. Cette étude, capitale en mécanique, en électricité, en thermodynamique, porte le nom de problème de Dirichlet. Au point de vue analytique, aucune distinction n'est à faire entre l'équation de Laplace (type elliptique) et l'équation $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ (type hyperbolique) et cependant, au point de vue réel, ces deux équations, affectées d'un second membre, présentent les différences les plus essentielles.

M. Picard a complètement intégré ces équations par sa belle méthode des approximations successives. Il a montré que, pour les équations de Laplace, on peut donner les valeurs de u sur une courbe fermée du plan et que pour les autres on peut donner u et l'une de ses dérivées sur un certain arc de courbe seulement.

Les belles méthodes de Laplace, de M. Darboux, de M. Goursat, de M. Coulomb, de M. d'Adhémar, on doit à ce dernier l'importante notion de conormale, permettent d'atteindre des catégories plus générales d'équations, mais non point d'obtenir des résultats aussi précis, aussi achevés.

Les travaux de M. Schwartz, la célèbre méthode du balayage

de M. Poincaré pour la résolution du problème de Dirichlet dans le plan ou dans l'espace, les mémoires de M. Le Roy sur les équations de la chaleur, ceux de M. Vito Volterra sur les équations de l'élasticité, de MM. Liapounoff, Horn, Steckloff, Harnack, Almansi, Bianchi, doivent encore être cités ici, d'autant plus qu'un fait important ressort de cet ensemble de travaux : tout comme pour les fonctions algébriques, les complications se multiplient quand on passe, au point de vue réel, de deux à trois variables, et plus.

Certaines lignes, dites caractéristiques, jouent un rôle fondamental dans les équations différentielles à deux variables indépendantes, rôle étudié surtout par MM. Picard et Goursat. Dans le cas de trois variables indépendantes Beudon, le premier, a trouvé les surfaces caractéristiques qui correspondent aux lignes caractéristiques. Il se présente ici un fait nouveau : pour avoir des surfaces caractéristiques, il faut connaître une intégrale particulière de l'équation, sauf pour les équations linéaires.

Tel est l'ensemble et des travaux de Cauchy et des travaux qu'il a inspirés *.

Argand. — Nous pouvons mentionner ici le nom de *Jean-Robert Argand*, qui naquit à Genève le 18 juillet 1768, et mourut le 13 août 1822. Dans son *Essai*, paru en 1806, il donnait la représentation géométrique d'un nombre imaginaire et s'en servait pour montrer que toute équation algébrique a une racine : cet opuscule, antérieur aux mémoires de Gauss et Cauchy sur le même sujet, n'attira pas beaucoup l'attention lorsqu'il fut publié.

Une démonstration plus ancienne de ce fait, que $\sqrt{-1}$ peut être interprétée comme indiquant la perpendicularité dans l'espace à deux dimensions, et même l'extension de cette idée à l'espace à trois dimensions par une méthode laissant pressentir l'usage des quaternions, a été donnée dans un mémoire de C. Wessel, présenté en mars 1797, à l'Académie des sciences de Copenhague ; d'autres mémoires sur le même sujet ont été publiés dans les *Philosophical transactions* pour 1806, et par H. Kühn, en 1750, dans les *Procès-verbaux* de l'Académie de Saint-Pétersbourg (1).

(1) Voir W.-W. Beman dans les *Proceedings of the American Association for the Advancement of Science*, vol. XLVI, 1897.

* **Göpel.** — *Adolphe Göpel* naquit à Rostock, en Saxe, en 1812. On lui doit un mémoire concernant les équations indéterminées du deuxième degré et surtout la solution d'un beau problème : donner une expression des fonctions inverses des intégrales abéliennes de première espèce, problème dont une solution plus simple fût obtenue peu après par Rosenhain *.

Hamilton (1) — Suivant l'opinion de quelques écrivains, la théorie des quaternions sera envisagée un jour comme l'une des plus grandes découvertes du XIXe siècle en mathématiques pures : cette découverte est due à *Sir William Rowan Hamilton*, qui naquit à Dublin, de parents écossais, le 4 août 1805 et mourut, dans cette même ville, le 2 septembre 1865. L'instruction qui lui fut donnée dans sa famille, paraît avoir été singulièrement décousue; sous l'influence d'un oncle bon linguiste, il se consacra tout d'abord à l'étude des langues ; vers l'âge de 7 ans, il pouvait lire avec facilité le latin, le grec, le français et l'allemand ; à 13 ans, il pouvait se vanter d'être familier avec autant de langues qu'il avait vécu d'années. Vers cette époque, il eut l'occasion de parcourir un exemplaire de l'*Arithmétique Universelle* de Newton ; ce fut son initiation à l'analyse moderne, et il étudia bientôt les éléments de la géométrie analytique et du calcul infinitésimal. Il lut ensuite les *Principes* et les quatre volumes alors publiés de la *Mécanique céleste* de Laplace. Dans le dernier, il découvrit une erreur et sa note sur le sujet, écrite en 1823, attira considérablement l'attention. L'année suivante, il entra au collège de la Trinité, à Dublin : sa carrière universitaire est sans exemple, car la chaire d'astronomie étant devenue vacante en 1827, lorsqu'il n'était encore qu'étudiant, les électeurs lui demandèrent de se mettre sur les rangs, et il fut élu à l'unanimité. Il était entendu qu'on le laisserait parfaitement libre de poursuivre en même temps ses propres études.

Son plus ancien mémoire fut écrit en 1823 et publié en 1828, sous le titre *Theory of Systems of Rays* ; deux suppléments écrits en 1831 et 1832, furent ajoutés après coup; dans

(1) Voir la vie d'Hamilton (avec une bibliographie de ses écrits), par R. P. GRAVES, en trois volumes, Dublin, 1882-89 : les faits principaux sont donnés dans un article de la *North British Review*, pour 1886.

le dernier, il annonçait le phénomène de la réfraction conique. Ce mémoire fut suivi d'une note, en 1827, sur le principe de la *Varying Action* et, en 1834 et 1835, par des mémoires sur une *General Method in Dynamics*, où il traitait, ainsi qu'il convient, la dynamique théorique comme une branche des mathématiques pures. Ses leçons sur les *Quaternions* furent publiées en 1852 ; quelques-uns de ses résultats auraient été, semble-t-il, découverts antérieument par Gauss, mais ils ne furent connus et publiés que longtemps après la mort du dernier. Parmi ses autres écrits, nous devons rapporter : une note sur la forme de la solution de l'équation générale algébrique du cinquième degré, qui confirmait la conclusion d'Abel que les racines ne pouvaient être exprimées au moyen d'un nombre fini d'expressions purement algébriques ; une note sur les fonctions ; un travail sur l'hodographe ; et enfin un mémoire sur les solutions numériques des équations différentielles. Ses *Elements of Quaternions* furent publiés en 1866 : parlant de cet ouvrage, une autorité compétente dit que les méthodes d'analyse qui s'y trouvent énoncées présentent sur les procédés de la géométrie analytique un perfectionnement aussi grand que ces derniers sur ceux de la géométrie euclidienne. A une époque plus récente P.-G. Tait, d'Edinbourg, a, de nouveau, développé le sujet.

Hamilton est d'une lecture pénible ; il a laissé une collection nombreuse de manuscrits que possède aujourd'hui la bibliothèque du collège de la Trinité, à Dublin, et dont quelques-uns, il faut l'espérer, seront un jour publiés.

* **Laurent.** — *Pierre-Alphonse Laurent*, né à Paris le 18 juillet 1813, entra à l'Ecole polytechnique en 1830 et mourut à Paris en 1854. Il fit sa carrière dans le génie, mais ne dépassa point le grade de commandant. Il ne fut membre d'aucune société savante, publia peu et se montra cependant mathématicien de valeur.

On lui doit une théorie importante sur la variation des intégrales multiples et une note sur le développement des fonctions, qui contient un théorème classique portant son nom ; il est à regretter qu'il n'ait pas poursuivi ses travaux d'analyse et qu'il leur ait préféré les théories de la physique mathématique *.

* **Cournot.** — *Antoine-Auguste Cournot* naquit à Gray en 1801 et mourut à Paris en 1877.

M. Poincaré, dans ses *Leçons sur le calcul des probabilités*, est d'avis qu'il n'est guère possible de donner une définition satisfaisante de la probabilité.

Cournot, cependant, avait développé une série de considérations conduisant à une définition convenable de la probabilité. Si sur m épreuves ou observations, faites dans des conditions constantes déterminées, un événement E se produit n fois et si le rapport $\frac{n}{m}$ tend vers une limite quand le nombre m croît, cette limite, selon Cournot, est la probabilité de l'événement E dans les conditions considérées.

Quand à la question du hasard, plutôt philosophique que mathématique, Cournot s'en est aussi préoccupé, et, après lui nombre d'auteurs que cite l'*Encyclopédie des sciences mathématiques*.

Hasard et probabilité sont des notions à peu près élucidées aujourd'hui et notamment les idées de Laplace, voulant que la probabilité soit relative en partie à nos connaissances, en partie à notre ignorance, celles de Hume, que le hasard est l'ignorance où nous sommes des véritables causes, sont complètement abandonnées.

Le calcul des probabilités est d'origine française. Il a été étudié tout d'abord par Pascal et Fermat, à propos d'une question relative aux jeux de hasard. Parmi les premiers mathématiciens qui s'en sont occupés on compte encore Galilée, Hierosme Cardan, Montmort, Huygens, Jacques Bernoulli, Leibniz, d'Alembert. Laplace fut le premier à en composer un corps de doctrine.

Moivre, Lagrange, Laplace ont appliqué les équations aux différences finies au calcul des probabilités, Boole a simplifié les méthodes de ces derniers. Ampère, puis M. Rouché ont étudié le problème de la ruine des joueurs, Euler et les Bernoulli celui de la loterie, Bertrand et M. André celui du scrutin, Buffon, Cesaro, M. Poincaré, M. Czuber et d'autres auteurs que nous ne saurions nommer, la question de la probabilité géométrique où il s'agit de problèmes tels que celui-ci : on jette une aiguille sur une table, sur laquelle on a tracé des parallèles équidistantes ; quelle est la probabilité pour que l'aiguille rencontre l'une des parallèles ? On peut aussi rappeler à ce sujet : Laplace, Lamé, Barbier, Crofton, Sylvester.

Poisson s'est occupé de certaines probabilités concernant un très grand nombre d'épreuves.

Laplace, Bayes, Morgan, Condorcet ont attaché leurs noms à la probabilité des causes.

Divers auteurs, Condorcet et Tchebichef surtout, se sont préoccupés de l'Espérance mathématique, ou évaluation objective de l'attente d'un gain attaché à la réalisation d'un événement incertain.

Comme on le voit par cette très rapide étude, le calcul des probabilités est surtout dû aux mathématiciens français. Il a d'ailleurs fait peu de progrès depuis Laplace.

Cournot s'est aussi préoccupé d'une question qui divisait les philosophes et les mathématiciens de son temps : les principes du Calcul Infinitésimal. M. Poincaré a exposé les idées de Cournot dans la *Revue de Métaphysique et de Morale*. Aujourd'hui, où le nombre incommensurable a été défini de façon satisfaisante par Kronecker, où l'analyse mathématique a été arithmétisée, les difficultés qui se trouvaient à la base du calcul différentiel ont disparu. Tout au plus est-il permis de se demander si les procédés du calcul différentiel et intégral, actuellement complétement justifiés au point de vue logique, peuvent être légitimement appliqués à l'étude des phénomènes naturels, ou plutôt à préciser sous quelles conditions une telle application est légitime.

Revenant à notre premier sujet, nous devons ajouter que Cournot, puis Westergaard ont produit des travaux classiques concernant les tables de mortalité *.

Grassmann (1). — L'idée des opérations non commutatives et des quaternions semble s'être présentée à l'esprit de Grassmann et de Boole à peu près à l'époque où Hamilton s'en occupait. *Hermann Günther Grassmann* naquit à Stettin, le 15 avril 1809 et y mourut en 1877. Il était professeur au gymnase de cette ville. Ses recherches sur les algèbres non commutatives sont contenues dans l'ouvrage *Ausdehnungslehre*, publié en 1844, et augmenté en 1862. L'exposition scientifique des principes fondamentaux de l'algèbre créée par Hamilton et Grassmann fut poursuivie par de Morgan et Boole et reçut plus tard de nouveaux développements de

(1) Ses œuvres, réunies en trois volumes, éditées par F. Engel, ont été publiées à Leipzig, 1894.

H. Hankel dans son ouvrage sur les complexes, 1867, et de G. Cantor, qui suivit une marche quelque peu différente, dans ses mémoires sur la théorie des grandeurs irrationnelles, 1871 ; l'examen de ces questions est si technique que nous devons nous contenter d'y faire allusion dans un livre tel que celui-ci. Grassmann a également étudié les propriétés de l'hyperespace homoloïdal.

Boole. — *George Boole*, né à Lincoln le 2 novembre 1815 et mort à Cork le 8 décembre 1864, imagina, indépendamment des travaux de Grassmann, un système d'algèbre non commutative. De ses mémoires sur les transformations linéaires, la partie relative à la théorie des invariants a pris un certain développement.

Galois (¹) — Un nouveau développement de l'algèbre, la théorie des groupes de substitutions a été imaginée par *Evariste Galois*, né à Paris le 26 octobre 1811 et qui s'annonçait comme un des mathématiciens les plus originaux du XIXᵉ siècle, lorsqu'il fut tué dans un duel, le 30 mai 1830, à l'âge de 20 ans.

La théorie moderne des groupes est née des recherches de Galois, Cauchy et J.-A. Serret qui se sont surtout préoccupés des groupes de substitution finis discontinus. Cette branche de recherches a été poursuivie par M. C. Jordan, de Paris, et E. Netto, de Strasbourg. Le problème des opérations avec les groupes discontinus, avec applications à la théorie des fonctions, a été abordé de nouveau par F.-G. Frobenius, de Berlin, F.-C. Klein, de Gœttingue, et W. Burnside, anciennement à Cambridge et aujourd'hui à Greenwich.

* La théorie des équations a fait au XIXᵉ siècle des progrès décisifs. C'est d'abord le théorème de Sturm, qui permet de calculer le nombre de racines réelles qu'une équation algébrique possède entre deux limites données, théorème qui, étendu aux racines imaginaires par Cauchy et Laguerre, offre encore un vaste champ de recherches. D'autre part, Gauss a donné une théorie complète des équations binômes. Il a étudié aussi les équations primitives et les équations non primitives. Ces dernières sont celles qui, étant de

(¹) * Sur ses recherches, voir l'édition de ses œuvres avec une introduction par E. PICARD, Paris, 1897 *.

degré mn se décomposent en m facteurs de degré n, au moyen de la résolution d'une seule équation de degré m.

Mais la découverte la plus profonde, celle qui a fait pénétrer au cœur de la question est celle de Galois. Le premier, Galois met en évidence l'importance du *groupe* de l'équation, qu'il définit ainsi. Il appelle *rationnelle* toute quantité qui s'exprime en fonction rationnelle des coefficients de l'équation et d'un certain nombre de quantités arbitraires adjointes à l'équation. Soient alors a, b, c..., les racines : il y a toujours un ~~groupe~~ de permutation des lettres a, b, c,... tel que toute fonction des racines invariable numériquement par les substitutions de ce groupe soit rationnellement connue et, réciproquement, que toute fonction des racines, déterminable rationnellement, soit invariable par les substitutions.

Une autre notion très importante est celle des sous-groupes dits invariants, contenus dans le groupe primitif. Un groupe est composé ou simple, selon qu'il renferme ou non un sous-groupe invariant. Galois tire de ces principes des résultats très remarquables, qui sont actuellement la base de la théorie des équations et qui furent complétés dans la suite par Betti, Kronecker, Serret et surtout par M. Jordan, qui s'est attaché à l'étude des groupes composés, des groupes transitifs, des groupes primitifs et a considérablement étendu à leur aide le champ de la théorie des substitutions. Il a montré que les équations à groupe composé peuvent se résoudre à l'aide d'équations auxiliaires, il a construit tous les groupes d'équations d'un degré donné résolubles par radicaux, problème à la fois très important et très difficile posé par Abel.

La notion de groupe de substitution ou de transformation, dont Galois a, le premier, révélé la fécondité, est aujourd'hui fondamentale dans bien des parties de l'analyse, car la science mathématique étudiant essentiellement les transformations de diverses natures doit toujours rechercher ce qui demeure constant et inaltéré dans ces transformations. Partout elle ~~étudie des *groupes* au moyen des *invariants*~~. La géométrie projective offre les relations les plus étroites avec la théorie des substitutions linéaires, de même que la géométrie élémentaire avec celle des substitutions orthogonales.

Halphen a étudié le groupe des substitutions linéaires, c'est-à-dire des changements projectifs de coordonnées ; il a nommé *invariants différentiels* certaines fonctions des dérivées que ces substitu-

... théorie complète de ces invariants ... et les plus remarquables d'entre ... oduit en analyse l'importante no- ... différentielles linéaires, mais c'est ... alogie de ceux-ci avec ses inva- ... ait son célèbre travail sur le pro- ... ons différentielles.

... stitutions ou de transformations, ... la fécondité, est aujourd'hui fon- ... étrie projective, les fonctions mo- ... ctions elliptiques, abéliennes et ... tude d'un groupe particulier, et ... t invariables par les substitutions ... orie des groupes est une immense ... mètres, Lie et M. Klein, M. Poin- ... Sylow, M. Maillet et M. de Séguier ... vue *.

... *de Morgan*, né à Madras en ... 18 mars 1871, fit ses études au ... ge, mais dans l'état de la législa- ... unitarien) être membre agrégé. En ... iversité nouvellement créée à Lon- ... stitution désignée aujourd'hui sous ... sité. Une fois là, il exerça, par ses ... èves, une grande influence sur les ... iété mathématique de Londres lui ... , et il prit une large part aux actes ... ale. Il était très au courant de la ... mathématiques, mais ses aperçus à ... ticles disséminés un peu partout; ... ge dans ce livre. Ses mémoires sur ... l'algèbre, son traité sur le calcul ... ont des œuvres de talent où l'on ... use de la théorie des séries infinies; ... ctions et sur la théorie des proba-

... S.-E. de Morgan. Londres, 1882.

bilités, méritent d'être spécialement notés. L'article sur le calcul des fonctions contient l'étude des principes de la dialectique symbolique, mais les applications concernent plutôt la solution des équations fonctionnelles que la théorie générale des fonctions.

***Genocchi.** — *Angelo Genocchi* naquit à Plaisance le 5 mars 1817 et mourut à Turin le 7 mars 1889. D'abord avocat et professeur de droit à Parme et à Plaisance, il abandonna bientôt ces premières études et, après avoir étudié à Turin, il publia, en 1851, un ~~premier~~ mémoire concernant la théorie des nombres et, en 1852, une note sur les résidus quadratiques.

En 1857, il avait déjà publié plus de quarante mémoires, et fut nommé professeur d'algèbre supérieure et de géométrie à l'Université de Turin, où il fit toute sa carrière.

Ses travaux ont eu pour objet les séries, le calcul intégral et surtout la théorie des nombres, où il se montra passé maître. La théorie des nombres complexes, la loi de réciprocité quadratique, la résolution en nombres entiers des équations indéterminées ont été de sa part l'objet de mémoires remarquables. La grande loi de réciprocité quadratique donnée par Gauss et démontrée une seconde fois par ce grand mathématicien, à la suite des recherches d'Euler et Legendre sur le même sujet, puis une quatrième, une cinquième, une sixième fois, toujours par Gauss, fut de nouveau l'objet des travaux de Jacobi, Eisenstein, Liouville, Lebesgue, Kummer, A. Stern, Zeller, Kronecker, Bouniakowsky, Shering, Petersen, Voigt, Busche, Th. Pepin. Tout spécialement, le mémoire de Genocchi sur le même sujet, *Sur la théorie des résidus quadratiques*, fut couronné par l'Académie des sciences de Bruxelles.

Genocchi s'intéressait aussi à l'histoire des mathématiques comme le montrent ses publications sur Léonard de Pise, la correspondance de Lagrange et d'Alembert, l'histoire de l'algèbre, et les manuscrits de Fermat *.

***Betti.** — *Henri Betti* naquit près de Pistoie le 21 octobre 1823 et mourut le 11 août 1892, près de Pise.

Ses premiers travaux concernent la théorie des équations. Dans une célèbre lettre écrite à Chevalier, la veille de sa mort, Galois, à l'exemple de Fermat, avait énoncé toute une suite de théorèmes sans

en donner les démonstrations; cette lacune fut comblée par Betti. Entre autres, il démontra que l'équation modulaire dont dépend la transformation des fonctions elliptiques peut être abaissée d'un degré et n'est pas résoluble par radicaux pour les degrés 5, 7, 11. Sur plusieurs points, il se rencontra avec Hermite et Kronecker. Il était sur la voie de la résolution de l'équation du cinquième degré par les fonctions elliptiques, mais il fut devancé par Hermite et Kronecker. On peut citer sur ce sujet les travaux de Sohnke, Mathieu, Königsberger, Joubert, Brioschi, Schläfli, Schröter, Gudermann, Gützlaff.

Les *leçons sur l'élasticité* de Betti, publiées en 1872, constituent une œuvre très importante et font date dans l'histoire de cette théorie. Le théorème qui porte son nom et qui concerne l'équilibre des solides élastiques, a pour beaucoup contribué à le faire reconnaître comme un mathématicien de valeur *. Ses recherches sur l'analysis situs ont été le p^t de départ d'importants travaux récents, surtout de M. Poincaré

Cayley (¹). — *Arthur Cayley* est un des plus grands mathématiciens anglais ; il naquit dans le comté de Surrey, le 16 août 1821 et, après avoir fait ses études au collège de la Trinité, à Cambridge, il fut inscrit au barreau ; mais ses goûts le portant vers les mathématiques, il fut nommé, en 1863, à la chaire Sadlerian, à Cambridge, où il passa le reste de sa vie. Il mourut le 26 janvier 1895.

Les écrits de Cayley se rapportent surtout aux mathématiques pures. Nous avons déjà fait mention de ceux qui se rapportent à la partition des nombres et aux fonctions elliptiques envisagées au même point de vue que Jacobi. Ses dernières notes sur les fonctions elliptiques visent principalement la théorie de la transformation et l'équation modulaire. Ce sont cependant ses recherches sur la géométrie analytique et sur l'algèbre supérieure qui constituent ses principaux titres de gloire.

En géométrie analytique, la conception de ce qu'on désigne (d'une façon peu heureuse, peut-être) sous le nom d'*Absolu* est due à Cayley. Comme il l'établit d'ailleurs lui-même « la théorie, en effet, est que les propriétés métriques d'une figure ne sont pas les propriétés de la figure considérée *per se*... mais ses propriétés quand on les considère en connexion avec une autre figure, à savoir la conique nommée *Absolu* » ; par suite, les propriétés métriques

(¹) La collection de ses œuvres en treize volumes a été publiée à Cambridge, 1889-98.

peuvent être soumises aux méthodes descriptives. Il contribua largement à la théorie générale des courbes et des surfaces ; son travail est basé sur la supposition d'une liaison nécessairement étroite entre les opérations algébriques et géométriques.

En algèbre supérieure, on doit à Cayley la théorie des invariants ; ses dix mémoires classiques sur les formes binaires et ternaires, ses recherches sur les matrices et sur les algèbres non commutatives font époque dans le développement du sujet.

Sylvester. — *James-Joseph Sylvester*, né à Londres le 3 septembre 1814 et mort le 15 mars 1897, est contemporain de Cayley. Lui aussi fit ses études à Cambridge où il se lia d'amitié avec Cayley ; leur liaison dura toute leur vie. Comme Cayley, il fut inscrit au barreau et cependant ses goûts le poussaient vers les mathématiques. Il professa successivement à Woolwich, Baltimore et Oxford. Personnalité puissante, il fut un professeur entraînant, mais il est difficile de résumer ses écrits, car ils sont nombreux et sans liens les uns avec les autres.

Sur la théorie des nombres, Sylvester a écrit des notes importantes concernant la distribution des nombres premiers et la partition des nombres. En analyse, il s'occupa du calcul infinitésimal et des équations différentielles. Mais son étude favorite était peut-être l'algèbre supérieure ; parmi ses nombreux mémoires sur ce sujet, nous pouvons citer en particulier ceux qui se rapportent aux formes canoniques, à la théorie des contrevariants, aux réciprocants ou invariants différentiels, à la théorie des équations (notamment à la règle de Newton). Il créa la langue et la notation de la majeure partie des sujets qu'il traita.

Les écrits de Cayley et de Sylvester présentent un contraste marqué ; ceux de Cayley sont méthodiques, précis, réguliers et complets ; ceux de Sylvester sont vifs, inachevés, mais non moins vigoureux ni moins stimulants. L'algèbre supérieure surtout a vivement intéressé ces deux mathématiciens et sa forme moderne leur est due pour une grande part.

Lie (¹). — Un autre grand analyste du XIXᵉ siècle, est *Marius-*

(¹) Voir la notice nécrologique par A.-R. Forsyth dans le *Year book of the Royal society*, Londres, 1901.

...842, et mort le 18 février 1899.
... puis il obtint une bourse de
... connaissance de Klein, Darboux
... trois hommes qui décida de sa

...ormation au moyen de laquelle
...hère à une ligne droite et dont
...r les théorèmes sur les assem-
...ur des assemblages de sphères.
...rie des transformations tangen-

...r à Christiania. Les premières
...nt les relations entre les équa-
...rmations infinitésimales. Il fut
...a théorie générale des groupes
...es résultats de ses études sur ce
...rage *Theorie der transformations*
...88-93. Il poursuivit ses travaux
... infinis, et il faut espérer que ses
...ubliées d'ici peu. Vers 1879, Lie
...métrie différentielle ; on publie
...atique de ses recherches sur cette
...*ungs-transformationen*.
...r que les travaux de Lie fussent
... éprouva un vif désappointement.
...ent. En 1886, il se rendit à Leipzig,
...iania, où un poste venait d'être
... situation, il conserva toujours un
...avait été méconnu, et les dix der-
... attristées.
...mprenant la théorie des formes et
...itée par tant d'autres auteurs qu'il
...ions auxquelles ils sont arrivés ou

...é étudiée par *J.-L. Raabe* (1801-
...*rand* (1822-1900), qui fut secré-
... Sciences de Paris ; *E.-E. Kummer*
...*ini* de Pise ; *A. Pringsheim* de

Munich (¹) ; et *Sir Georges-Gabriel Stokes* (²) de Cambridge, auquel on doit le théorème bien connu sur les valeurs critiques des sommes de séries périodiques.

Quant à la théorie des groupes de substitutions, nous avons déjà signalé, d'une part, les travaux de Galois, Cauchy, Serret, Jordan, J.-A. de Séguier et Netto, puis ceux de Frobenius, Klein et Burnside pour les groupes discontinus, enfin ceux de Lie pour les groupes continus.

Nous pouvons encore mentionner les auteurs suivants : *C.-W. Borchardt* (³) (1817–1880) de Berlin, qui examina en particulier le rôle des fonctions génératrices dans la théorie des équations ; *C. Hermite* (1822–1901) qui envisagea la théorie des covariants associés dans les formes binaires, la théorie des formes ternaires, et qui appliqua les fonctions elliptiques à la détermination d'une solution de l'équation du cinquième degré et de l'équation différentielle de Lamé.

Enrico Betti (1823-1892) de Pise et *F. Brioschi* (1824-1897) de Rome, s'occupèrent tous deux de formes binaires. *S.-H. Aronhold* (1819-1884), développa les méthodes symboliques pour la théorie des formes invariantes.

R.-A. Gordan (⁴) d'Erlangen, écrivit sur la théorie des équations, sur les théories des groupes et des formes, et a montré qu'il n'y a qu'un nombre fini ~~de formes adjointes~~ d'invariants associés à un groupe fini donné. *R.-F.-A. Clebsch* (⁵) (1833–1872) de Göttingue étudia, indépendamment de toutes recherches déjà faites, la théorie des formes binaires dans quelques notes, réunies et publiées en 1871 ; il écrivit également sur les fonctions abéliennes. *P.-A. Mac-Mahon*, officier dans l'armée anglaise, a écrit sur la relation des fonc-

(¹) Sur les recherches de RAABE, BERTRAND, KUMMER, DINI et PRINGSHEIM, voir le *Bulletin de la Société mathématique de New-York*, Vol. II, 1892-1893, p. 1–10.

(²) La collection des notes mathématiques et physiques de STOKES, a été publiée en deux volumes, à Cambridge, 1880 à 1883.

(³) Une édition de ses œuvres réunies, préparée par G. HETTNER, a paru à Berlin en 1888.

(⁴) Une édition de son travail sur les invariants (déterminants et formes binaires) préparée par G. KERSCHENSTEINER, a été publiée à Leipzig en trois volumes, 1885, 1887, 1893, le troisième volume n'est pas paru.

(⁵) Un compte rendu de sa vie et de ses travaux se trouve dans les *Mathematische Annalen*, 1873, vol. VI, pp. 197-202, et 1874, vol. VII, pp. 1-55.

[illegible] covariants, les formes adjointes [illegible]e. *F.-C. Klein*, de Göttingue, [illegible]éjà mentionnées, sur les fonc- [illegible]tinus, s'est occupé des équations [illegible]e Cambridge, a développé la [illegible]générale des équations différen- [illegible]nts. *G. P. Painlevé*, a écrit sur [illegible]ielles. Et enfin *D. Hilbert* de [illegible]ormes homogènes.

[illegible]rains se rapportant à l'algèbre [illegible]si nous ne faisions pas mention [illegible] : *Higher Algebra*, de G. Sal- [illegible] trinité à Dublin, *Algebra* de [illegible]rançais, et *Cours d'algèbre supé-* [illegible]) professeur à la Sorbonne, dans [illegible]rincipales découvertes modernes. [illegible]a théorie d'une variable complexe [illegible] Hankel *Vorlesungen über die* [illegible]

[illegible] naquit à Argenteuil le 16 avril [illegible] le Jura, en 1883. Elève à l'Ecole [illegible]sseur à Rennes et passa de là à [illegible] *les fonctions algébriques*, venant [illegible]auchy sur le même sujet, le plaça [illegible]ètres d'alors. Nommé professeur [illegible]on goût pour la mécanique céleste [illegible]au Bureau des Longitudes et à [illegible]sse d'abandonner ces fonctions le [illegible]les remplir.

[illegible]ences, Puiseux y laissa le sou- [illegible]t à prendre à sa charge les études [illegible]dont il faisait partie *.

[illegible] *Bouquet* naquit à Morteau en [illegible]819 et mourut à Paris le 9 sep- [illegible]

[illegible] *systèmes de droites dans l'espace*,

il publia une note sur les *surfaces orthogonales* qui fut l'origine de savantes recherches de Bonnet, Cayley, M. Darboux et M. Lévy.

En collaboration avec Albert Briot, Bouquet résolut de mettre de l'ordre et de la précision dans l'œuvre immense de Cauchy ; ils surent en tirer une œuvre originale, concernant la nature des fonctions aux points singuliers. Fuchs a donné postérieurement le développement en séries des intégrales des équations linéaires. M. Poincaré a fait de même pour le cas d'équations non linéaires. Cauchy et M[me] de Kowalewski avaient résolu le problème pour les points ordinaires. Bientôt suivit le *Traité des fonctions elliptiques* de Briot et Bouquet, fondé sur la théorie des imaginaires, œuvre considérable, qui eut le plus légitime succès.

C'est à Briot seul qu'on doit le *Traité des fonctions abéliennes*.

Bouquet entra à l'Académie des sciences en 1875 *.

* **Codazzi.** — *Delfino Codazzi* naquit à Lodie le 7 mars 1824 et mourut à Pavie le 21 juillet 1873.

Professeur d'algèbre supérieure et de géométrie à l'Université de Pavie, il publia plusieurs travaux concernant la théorie des surfaces et les coordonnées curvilignes. En 1861, l'Académie des sciences de Paris lui accorda avec éloges une mention honorable au sujet d'un mémoire présenté pour le grand prix des sciences mathématiques, et concernant la théorie des surfaces applicables sur une surface de révolution. On y rencontre d'importantes formules, à dire vrai rencontrées déjà par Mainardi, et qui portent le nom de *formules de Codazzi**.

* **Faà di Bruno.** — *François Faà di Bruno*, issu d'une noble famille, naquit à Alexandrie le 7 mars 1825 et mourut à Turin le 26 mars 1888.

D'abord capitaine au service de la maison de Savoie, il vint étudier à Paris, démissionna et suivit les cours de Cauchy, de Leverrier, se liant entre temps avec l'abbé Moigno et Hermite. De retour à Turin, il entra dans les ordres, mais il professa jusqu'à sa mort, dans la chaire d'analyse supérieure de l'université.

Plus important que ses travaux sur la théorie de l'élimination, sur le calcul des erreurs, est son *Traité des formes binaires*, écrit en français et traduit en allemand.

[illegible] r également un grand traité en trois [illegible] plications des fonctions elliptiques ; [illegible] écrire qu'environ la moitié. Deux [illegible] s *Fundamenta nova* y sont relevées*.

[illegible] *arles Catalan* naquit à Bruges en [illegible] 1.

[illegible] ole polytechnique et fut nommé à sa [illegible] Châlons-sur-Marne ; il passa de là [illegible]

[illegible] alan concernent le calcul des pro- [illegible] naisons reprises par tant d'auteurs, [illegible] André ; citons aussi ses remarques [illegible] *és*, procédé conventionnel de réso- [illegible] t les coefficients sont entachés de [illegible] mbre surpasse celui des inconnues. [illegible] beaucoup d'autres, cette méthode [illegible] espèce, mais est fort compliquée. [illegible] simplifiée. MM. Mansion et Goed- [illegible] t du même sujet.

[illegible] uable mémoire sur la transformation [illegible] contrant sur ce point avec Jacobi et [illegible] détermination des intégrales mul- [illegible] alyse.

[illegible] surfaces minima, où Plateau s'est [illegible] sformée plane d'une courbe tracée [illegible] s trajectoires orthogonales des sec- [illegible], sur la projection stéréographique, [illegible]

[illegible] harmonique, sur la transformation [illegible] le courbure, sur les polyèdres lui [illegible] sité de Liège et d'être élu à l'Aca- [illegible] se livra de plus en plus à ses tra- [illegible] théorie des nombres, les polynômes [illegible] tiques et surtout les *produits infinis*, [illegible] acobi *.

[illegible] *travaux mathématiques* de M. E.-C. Ca-

* **Brioschi.** — *François Brioschi* naquit à Milan le 22 décembre 1824 et mourut le 13 décembre 1897. Professeur à l'Université de Pavie, secrétaire général de l'Instruction publique, député, sénateur, fondateur de l'Institut technique supérieur de Milan, membre de la plupart des grands corps savants, il eut une carrière des plus brillantes.

Dans l'espace de cinquante années, il publia environ deux cents cinquante mémoires, concernant l'algèbre, la géométrie, le calcul intégral.

En géométrie supérieure, on peut citer ses travaux sur les lignes de courbure, sur les surfaces dont les lignes de courbure sont planes ou circulaires, sur l'intégration des équations différentielles auxquelles on est conduit par la considération des lignes géodésiques, sur les tangentes doubles de quelques lignes du quatrième ordre à points doubles.

Pour l'analyse, il y a lieu de rappeler ses mémoires sur les équations aux dérivées partielles du deuxième ordre, sur la distinction des maxima et minima dans le calcul des variations, sur une propriété des équations aux dérivées partielles du premier ordre, sur la réduction des intégrales elliptiques.

En algèbre, ses principales publications se rapportent à la *théorie des déterminants et leurs applications*, ouvrage qui eut les honneurs de nombreuses traductions, et surtout à la *théorie des formes algébriques*, qui fut l'objet de toute sa prédilection. A propos de l'ouvrage dictatique de Brioschi sur les déterminants, citons ceux de Spottiswoode, Baltzer, Günther, Dostor, Scott, Muir, Mansion. La théorie de l'élimination doit de nombreux progrès à Brioschi, et aussi à Sylvester, Cayley, Salmon, Jacobi, Hesse, Cauchy, Gordan.

Brioschi fut moins un esprit original qu'un habile calculateur; il sut mettre au point nombre de théories importantes, et c'est à ce titre surtout qu'il a laissé, et justement, un nom dans la science *.

* **Casorati.** — *Félix Casorati* naquit à Pavie le 17 décembre 1835 et y mourut le 11 septembre 1890. En 1858, il fut nommé professeur d'algèbre et géométrie analytique, puis en 1863 de calcul infinitésimal, à l'université de sa ville natale.

Il fut ensuite membre de la plupart des académies italiennes et étrangères.

Les travaux de Casorati se rapportent presque uniquement à l'analyse ; les plus importants concernent la théorie des fonctions d'une variable complexe et comprennent sept mémoires parmi les quarante-sept qu'il a publiés; ce sont : quelques réflexions relatives à la théorie générale des fonctions d'une variable, théorème fondamental dans la théorie de la discontinuité des fonctions, théorie des fonctions d'une variable complexe, relations fondamentales entre les modules de périodicité des intégrales abéliennes de première espèce, ~~autour du~~ sur le nombre des modules des équations ou des courbes algébriques d'un genre donné, sur les fonctions analytiques, sur de récents travaux de Weierstrass et Mittag-Leffler au sujet des fonctions d'une variable complexe *.

* **Halphen** (1). — *Georges-Henri Halphen* naquit à Rouen le 30 octobre 1844 et mourut à Paris en 1889. Entré à *l'Ecole* polytechnique en 1862, il s'y fit bientôt remarquer par un incontestable talent d'algébriste. Il prit part à la campagne de 1870, puis fut nommé en 1873 répétiteur à l'Ecole polytechnique. Il put dès lors se consacrer entièrement aux sciences mathématiques.

Un de ses premiers travaux se rapporte à cet important problème de géométrie : une conique est définie par cinq conditions, en sorte que l'équation générale d'un système de coniques assujetties à quatre conditions renferme un seul paramètre ; combien un pareil système contient-il de coniques satisfaisant à une cinquième condition ? L'amiral de Jonquières avait indiqué une solution simple mais incomplète du problème. Chasles l'avait complétée, sans donner la démonstration de son résultat, qui était erroné. En 1873 seulement, Clebsh, l'un des savants les plus justement célèbres de l'Allemagne, et Halphen résolurent définitivement la question. Il se trouvait même que la solution d'Halphen était susceptible d'extension à une courbe quelconque, plane ou gauche, et aux surfaces.

En ce premier travail, apparaît nettement l'esprit méthodique d'Halphen, qui se préoccupait bien plus de trouver effectivement les solutions des problèmes posés et d'en tirer toutes les conséquences

(1) H. Poincaré. — *Journal de l'Ecole Polytechnique*, 1890.

que d'étendre indéfiniment et superficiellement les frontières de la Science.

Une autre question de pure géométrie, l'étude des points singuliers des courbes algébriques, retint longtemps Halphen. Cette question est analogue à la précédente et n'offre pas moins d'importance pour l'Analyse que pour la Géométrie. D'une part, en effet, elle touche aux travaux classiques de Puiseux sur la théorie générale des fonctions et, d'autre part, elle se rattache aux transformations birationnelles des courbes algébriques et, par conséquent, aux propriétés fondamentales des transcendantes abéliennes.

C'est à ce dernier point de vue que se plaça Halphen. Il sut montrer entre autres résultats intéressants, qu'une courbe plane quelconque peut être considérée comme la perspective d'une courbe gauche admettant un point singulier unique à tangentes séparées.

Le chef-d'œuvre d'Halphen est son Mémoire sur les courbes gauches algébriques, couronné en 1881 par l'Académie de Berlin.

Les courbes gauches ne peuvent être définies par un nombre unique, comme les courbes planes, qui le sont par leur degré. Le genre des courbes gauches n'est pas non plus lié à leur degré par une relation algébrique, comme il se fait pour les courbes planes. La classification des courbes gauches présentait donc des difficultés spéciales et considérables, que sut vaincre Halphen. A titre d'applications, il donna dans son mémoire la classification des courbes des vingt premiers degrés et des courbes de degré 120.

Rappelons à ce propos les travaux de Nöther, bien qu'ils soient d'ordres tout différents, en ce sens surtout qu'ils se rapportent à des problèmes ayant leurs analogues, en géométrie plane.

Les travaux géométriques d'Halphen se rattachent tous à la géométrie énumérative, qui a pour but de déterminer le nombre des points, des droites, des courbes ou des surfaces qui satisfont à certaines conditions données. Cette branche de la géométrie a été fondée par Chasles. Nombre de géomètres s'y sont intéressés dans la suite. Halphen a le mérite d'y avoir introduit la rigueur bien à tort négligée par ses devanciers.

C'est au moyen des invariants de Laguerre, dont nous avons parlé à propos de Galois, qu'Halphen réussit à intégrer une classe très remarquable d'équations différentielles, travail qui lui valut,

en 1880, le grand prix des sciences mathématiques proposé par l'Académie des sciences de Paris.

Deux notes mémorables de cet éminent géomètre que fut Laguerre avaient appelé l'attention des géomètres sur les invariants des équations différentielles linéaires. Halphen y trouva de suite un rapport avec ses recherches antérieures et y vit un moyen d'édifier une théorie complète des invariants des équations linéaires. Le nombre des invariants absolus distincts d'une équation linéaire étant inférieur de deux unités à son ordre, et ces invariants pouvant être effectivement obtenus en ramenant l'équation à une forme dite canonique, on peut reconnaître par un procédé déduit de ces données si une équation différentielle linéaire est susceptible d'être ramenée, au moyen d'un changement de variable et de fonction n'altérant pas sa forme, à certains types connus déjà intégrés. Les relations entre invariants absolus jouent dans cette question un rôle capital et c'est de la nature de ces relations qu'Halphen déduisit la solution du beau problème qu'il s'était posé.

C'est ainsi qu'Halphen élargit considérablement le champ des formes intégrables connues à son époque, et qui étaient les équations à coefficients constants, certains cas particuliers de l'équation de Gauss, certaines équations du second ordre à quatre points singuliers et les équations à coefficients doublement périodiques de M. Picard.

Halphen avait entrepris dans ses dernières années une œuvre de longue haleine que la mort ne lui laissa pas le temps d'achever : son *Traité des fonctions elliptiques* et de leurs applications. Le but de ce grand ouvrage, dont les trois quarts ont vu le jour, était de mettre au service des astronomes ces belles théories, jusqu'alors restées dans le domaine de la science pure. Les notations employées sont celles de Weierstrass. Le rôle des fonctions pu, σu y est prépondérant et les fonctions θ. sn, dn, cn y sont reléguées au second plan. L'avantage des notations nouvelles est incontestable. Par exemple, il n'est plus nécessaire dans les questions de physique ou de mécanique, où interviennent les fonctions elliptiques, de distinguer trois cas : une seule analyse suffit

Halphen a été prématurément enlevé à la science ; géomètre éminent alors qu'il était relativement jeune, il se fut classé dans la suite parmi les mathématiciens illustres.

Hermite (¹)*. — *Charles Hermite* naquit à Dieuze, en Lorraine, le 24 décembre 1822 et mourut le 14 janvier 1901 à Paris. Il fit ses études au collège de Nancy, puis à Paris, au collège Henri IV et au collège Louis-le-Grand, où sa vocation de mathématicien s'affirma : déjà il lisait à la Bibliothèque Sainte-Geneviève le *Traité de la résolution des équations numériques* de Lagrange et achetait avec ses économies la traduction française des *Recherches arithmétiques* de Gauss.

Ses premières recherches, concernant l'impossibilité de résoudre algébriquement l'équation du cinquième degré, furent publiées en 1842 dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*. Il donne une démonstration fort simple de la proposition découverte par Abel.

La même année, il entrait à l'Ecole polytechnique et menait de front les études classiques qui lui étaient imposées et ses recherches personnelles. Dès le mois de janvier 1843, il écrit à Jacobi pour lui faire part de ses recherches sur les fonctions abéliennes. Il étendait aux fonctions abéliennes un théorème important des fonctions elliptiques, découvert par Abel. En août 1844, il écrit de nouveau à Jacobi, cette fois au sujet de la transformation des fonctions elliptiques : il énonce alors les principes de la théorie des fonctions θ. Jacobi s'intéressa vivement à ces recherches, au point d'insérer les deux notes d'Hermite dans l'édition complète de ses œuvres.

Plus tard, en 1855, Hermite étend aux fonctions abéliennes le problème de la *transformation*, résolu pour les fonctions elliptiques par Abel et Jacobi. Etant données les deux équations différentielles, qui pour un radical portant sur un polynôme arbitraire du cinquième ou du sixième degré, définissent les fonctions abéliennes, Hermite considère simultanément les quinze fonctions uniformes quadruplement périodiques introduites par Göpel et Rosenhaïn, et qui sont les analogues de snx, cnx, dnx. Le problème de la transformation est dès lors ainsi posé : Pour un polynôme donné, déterminer un nouveau polynôme tel qu'en formant des combinaisons linéaires convenables des équations différentielles relatives à ce polynôme, les quinze fonctions abéliennes cor-

(¹) Cf. *L'œuvre scientifique* de CHARLES HERMITE par E. PICARD, « Acta mathematica» , tome XXV.

respondantes s'expriment rationnellement à l'aide des quinze premières.

Pour résoudre ce problème algébrique, Hermite se place au point de vue transcendant et cherche d'abord à étendre aux fonctions θ de deux variables l'analyse qu'il indiquait jadis à Jacobi au sujet des fonctions θ d'une variable. De grandes difficultés se présentaient aussitôt, difficultés qui furent plus tard l'occasion de remarquables travaux de MM. Clebsch, Nöther, Enriques, Castelnuovo, Humbert, Picard. Notons en passant que si les courbes algébriques possèdent un seul invariant, le genre, les surfaces en possèdent plusieurs. MM. Picard et Simart ont résumé les questions de cette nature dans un beau traité, actuellement en cours de publication.

Les difficultés qui se présentaient à Hermite étaient surtout de nature arithmétique et n'avaient pas leur analogue dans la théorie des fonctions elliptiques. De là, la nécessité de fonder en quelque sorte une branche d'analyse nouvelle, ce que sut faire Hermite en un admirable travail, bien souvent commenté, et qui a ouvert la voie à d'importants mémoires de Laguerre et de M. Jordan.

Hermite n'abandonnait point pour cela la théorie des fonctions elliptiques, dont les belles formules, disait-il, remplissaient de joie son âme d'algébriste. En 1858, il reprend l'étude de leur transformation et y rencontre entr'autres une solution de l'équation du cinquième degré, solution non-algébrique, cela va sans dire, et analogue à la solution trigonométrique de l'équation du troisième degré. Cette solution s'effectue à l'aide des fonctions modulaires, dont le rôle important en arithmétique et en géométrie s'accentue en ce sens qu'elles ont conduit aux célèbres fonctions fuchsiennes découvertes par M. Poincaré.

Dès sa jeunesse, Hermite fut séduit par la théorie des nombres. La lecture d'un théorème de Jacobi, démontrant l'impossibilité d'une fonction d'une variable à trois périodes, des *Recherches arithmétiques* de Gauss, l'amenèrent à étudier les formes quadratiques, c'est-à-dire les polynômes homogènes du second degré, et à introduire dans cette théorie la considération de variables continues ; il en devait tirer nombre de résultats intéressants, ceux notamment qui concerne leur réduction. Citons encore ses beaux travaux relatifs à leurs invariants, où il devait se rencontrer avec Cayley et Sylvester.

Mais passons à un autre genre d'études qui eussent suffi à immortaliser le nom d'Hermite : les fractions continues algébriques.

Déjà la théorie des fractions continues arithmétiques, c'est-à-dire la représentation approchée d'un nombre incommensurable par un nombre rationnel, avait été étendue aux fonctions d'une variable. Etant donnée une fonction d'une variable x développée en série de Taylor suivant les puissances entières, positives ou négatives, de x, on avait étudié les fractions rationnelles dont le développement suivant les puissances de x restituait, aux termes de degrés supérieurs près, le développement de la fonction, étude qui devait former plus tard le sujet de beaux mémoires contemporains. Ce mode de représentation conduisit Hermite à l'une de ses plus belles découvertes : la transcendance du nombre e, base des logarithmes népériens. Son point de départ, dans ce mémoire célèbre *Sur la fonction exponentielle*, publié en 1873, est l'approximation simultanée d'un certain nombre d'exponentielles de la forme e^{ax} au moyen de fractions rationnelles. Les différences entre ces exponentielles et les fractions rationnelles, ou fractions continues, qui les représentent approximativement, sont évaluées à l'aide d'intégrales définies ; faisant $x = t$ dans les formules, puis supposant que a est un nombre entier, il en résulte cette conclusion : que e ne peut satisfaire à aucune équation algébrique à coefficients entiers. L'intérêt qui s'attache à un nombre aussi fondamental que e, donnait un prix immense à cette découverte. Neuf ans plus tard, M. Lindemann, s'inspirant des études d'Hermite, faisait à son tour, et dans le même ordre d'idées, une découverte capitale : il démontrait la transcendance du nombre π. Ainsi était établie rigoureusement et définitivement l'impossibilité de la quadrature du cercle, l'impossibilité de construire avec la règle et le compas un carré ou rectangle d'aire équivalente à celle d'un cercle donné : problème qui tenta les plus grands mathématiciens d'autrefois, et que, dit-on, s'entêtent encore à résoudre de vains chercheurs.

Weierstrass a donné en 1890 une démonstration directe de la transcendance de ces deux nombres e et π, qu'Hilbert, en 1893, réduisit encore, si bien que cette belle question est devenue classique.

Après son mémoire sur la fonction exponentielle, Hermite con-

tinua ses recherches sur les fractions continues algébriques. On connaissait depuis Gauss le rôle des polynômes de Legendre dans le développement de $\log \frac{x-1}{x+1}$ en fraction continue, et les recherches de MM. Heine et Christoffel avaient montré les rapports qui existent entre la théorie des fractions continues et certaines équations différentielles linéaires du second ordre. Hermite étend tous ces résultats en montrant comment une certaine équation d'ordre $n+1$, généralisant l'équation de Gauss, se lie aux modes d'approximations simultanées dont il avait donné une application dans son mémoire *Sur la fonction exponentielle*.

La théorie des fractions continues algébriques, qui semble devoir réserver tant de surprises aux géomètres est encore à peine ébauchée. Elle comprend deux problèmes distincts : développer une fonction donnée en fraction continue, étudier la convergence du développement.

Il n'existe pas encore de méthode générale, analogue au théorème de Taylor, pour le développement en série, permettant de développer une fonction en fraction continue. Seules quelques fonctions fort simples ont été jusqu'ici développées et les mémoires que Laguerre a publiés à ce sujet font autorité.

Le problème de la convergence, étudié incidemment par Laguerre et Riemann, repris dans un cas étendu par Stieltjes, élève d'Hermite enlevé prématurément à la science, mis au concours en 1906 comme sujet du Grand Prix des Sciences mathématiques par l'Académie des Sciences de Paris, est loin d'avoir livré tous ses secrets. Une conclusion semble cependant se dégager de l'ensemble des travaux récemment publiés sur ce sujet, travaux tout particulièrement encouragés par MM. Appell et Mittag-Leffler : les fractions continues permettent de représenter les fonctions dans tout le plan de la variable, sauf sur certains arcs de lignes qui sont parmi les coupures voulues par la théorie des fonctions analytiques.

Les fractions continues seraient ainsi un instrument d'étude des plus puissants, dépassant comme valeur les séries de puissances et même les séries de polynômes, étudiées récemment par MM. Mittag-Leffler et Painlevé.

Hermite s'est aussi occupé de généraliser les fractions continues algébriques, mais bien qu'il en ait tiré des conclusions intéressantes, il semble que ce genre d'études doive attendre pour pro-

gresser que l'étude des fractions continues algébriques ordinaires soit plus avancée.

Parmi les travaux originaux d'Hermite figurent aussi ses études sur la décomposition des fonctions doublement périodiques de troisième espèce. M. Appell devait y apporter des compléments très importants, qui contribuèrent à illustrer son nom.

Hermite a joué un rôle des plus importants dans la science mathématique moderne, non seulement par ses écrits originaux, mais encore par son enseignement.

En 1869, il fut nommé professeur en Sorbonne et débuta par la théorie des équations. En 1875, il devait abandonner l'exposé de l'algèbre et se consacrer au calcul intégral et à la théorie des fonctions. Son enseignement, fait de causeries merveilleuses, prononcées d'un ton grave, où des horizons immenses s'ouvraient tout à coup, a laissé un souvenir impérissable. Vrai directeur scientifique, il répondait par ailleurs à toute question, avec une bienveillance exquise, donnant sans compter son temps et ses idées, persuadé qu'un savant ne contribue pas seulement aux progrès de la science par ses travaux personnels, mais aussi par les conseils donnés, particulièrement à ceux qui entrent dans la vie scientifique. Sa correspondance avec Stieltjes, récemment publiée, en est la meilleure preuve.

L'enseignement d'Hermite à la Sorbonne a exercé une très grande influence. Ses cours ont été lithographiés et tous les géomètres contemporains les ont lus et médités. C'est lui qui fit connaître en 1880, les idées du grand mathématicien Weierstrass et qui vulgarisa la théorie des fonctions analytiques, lui aussi qui illustra d'exemples classiques les propositions générales de Weierstrass et de Mittag-Leffler.

Par contre, Hermite se sentait peu d'intérêt pour les raffinements de rigueur qu'on a voulu depuis quelques années introduire dans les fondements des mathématiques. Surtout il s'opposait à ce qu'on attirât l'attention des débutants sur ces sujets délicats et, sur ce dernier point, il avait raison. « L'admiration est le principe du savoir ; je m'autoriserai de cette pensée pour exprimer le désir qu'on fasse la part plus large, pour les étudiants, aux choses simples et belles, qu'à l'extrême rigueur aujourd'hui si en honneur, mais bien peu attrayante, souvent même fatigante et sans profit pour le

commençant qui n'en peut comprendre l'intérêt. » Toute la méthode d'enseignement d'Hermite, dit M. Picard dans sa belle monographie, tient en raccourci dans ces quelques lignes : personne plus que lui ne sut exciter l'admiration pour les choses simples et belles *.

* **Wronski.** — *Hœnë Wronski*, que nous citons à dessein ici, car il semble avoir été l'un des précurseurs de la science actuelle, naquit à Posen en 1778, et mourut à Neuilly en 1853. Il eut une existence fort agitée, combattant dans les rangs de l'armée polonaise, puis s'engageant au service de la Russie et plus tard à celui de la France.

Wronski a laissé une œuvre mathématique, médiocrement exposée par Montferrier, qui paraît importante, mais qui est mal connue. Ses travaux sur la résolution numérique des équations, sur certaines questions de l'analyse, ont une haute valeur.

Il s'est préoccupé de satisfaire formellement aux systèmes algébriques ou différentiels par des développements en séries dont la convergence serait utilement étudiée *.

* **Bertrand.** — *Joseph-Louis-François Bertrand* naquit à Paris le 11 mars 1822 et y mourut le 3 avril 1900. Il fut enfant prodige au plus large sens du mot, connaissant dès l'âge de neuf ans les principes de l'algèbre et de la géométrie. A dix-sept ans, il était docteur ès-sciences mathématiques et fut reçu premier à l'Ecole polytechnique. Un an plus tard, il fut admis à l'agrégation des facultés, puis à celle des lycées. Il sortit élève-ingénieur des mines de l'Ecole polytechnique. Il quitta la carrière d'ingénieur pour professer au lycée St-Louis, tout en étant agrégé des facultés (1). Dans la suite, il enseigna l'analyse à l'Ecole polytechnique et la physique mathématique au Collège de France.

(1) * On sait que l'agrégation des lettres et l'agrégation des sciences confèrent un droit spécial à une chaire, non pas de l'Enseignement supérieurs, mais de l'Enseignement secondaire. Au contraire, l'agrégation de médecine et l'agrégation de droit ouvrent les portes des facultés de médecine et de droit. Vers 1850, une agrégation des Sciences, spéciale aux professeurs de facultés, fût de même instituée ; mais elle tomba bientôt en désuétude. Bertrand fût l'un des rares savants à se pourvoir de ce diplôme et, bizarrerie, il n'enseigna jamais dans les facultés. *

Nous citerons ses mémoires sur les systèmes orthogonaux, sur la théorie des surfaces, sur une classe de courbes dont les normales principales sont aussi les normales principales d'une autre courbe, sur le nombre des valeurs que peut prendre une fonction quand on y permute les lettres qu'elle renferme, question étudiée déjà par Lagrange, Ruffini et Cauchy, puis par Tchebychef et le prince de Polignac.

En mécanique, Bertrand a publié une note intéressante sur la similitude en mécanique (question déjà abordée par Newton et par Reech), sur les courbes tantochrones, un remarquable travail sur les intégrales communes à plusieurs problèmes de dynamique, un mémoire important sur un théorème de Poisson, un autre sur le mouvement d'un point matériel, une note concernant les polyèdres réguliers étoilés, dus à Poinsot, enfin un Traité de Calcul différentiel et intégral justement apprécié.

Ses critères concernant la convergence des séries sont importants, nous l'avons dit.

On ne doit pas oublier que Bertrand a publié nombre d'articles de science vulgarisée et d'histoire des sciences, où des faits du plus haut intérêt sont exposés dans un langage digne des maîtres de la littérature française. *

* **Laguerre.** — *Edmond Laguerre* naquit à Bar-le-Duc le 9 avril 1834 et mourut le 14 août 1886. Nous avons déjà parlé de ses travaux et nous n'y reviendrons pas, mais nous devons une courte notice à ce mathématicien de grand talent qui n'eût qu'un seul défaut : être trop modeste.

Son œuvre se compose de 140 notes ou mémoires se rapportant à l'emploi des imaginaires en géométrie, aux applications du calcul intégral et de la théorie des formes à la Géométrie, à la Géométrie infinitésimale, à la Géométrie de direction, aux méthodes d'approximation pour certaines fonctions analytiques, à la résolution numérique des équations, aux équations différentielles et aux fonctions elliptiques, aux fractions continues algébriques. Ses travaux ont été publiés par les soins de l'Académie des sciences et on ne peut que regretter que cet esprit original et fécond ait été enlevé à la science si prématurément. Laguerre, officier d'artillerie, était répétiteur et examinateur à l'Ecole polytechnique, professeur

suppléant au Collège de France. Il mourut peu après son admission à l'Académie des sciences. *

* **Stieltjes.** — *Thomas-Jean Stieltjes* naquit à Zwolle, en Hollande, le 29 décembre 1856 et mourut à Toulouse en 1893. Fils d'un ingénieur distingué, il fit de brillantes études scientifiques et entra en 1877 à l'Observatoire de Leyde, où il se consacra pendant six ans à une étude approfondie de l'Astronomie. En même temps, il se livrait à des recherches historiques concernant cette branche de la science, et l'on sait aujourd'hui quel intérêt s'attache aux découvertes qu'il y fit. En 1883, il demandait, mais en vain, une chaire de mathématiques à l'université de Gröningue. Il vint alors étudier à Paris et fut appelé en 1886 à la faculté des sciences de Toulouse.

La période la plus féconde de sa trop courte vie scientifique commençait.

Son principal travail a trait aux fractions continues algébriques et à la convergence de certaines de celles-ci : Le premier peut-on dire, il fit quelques pas dans cette voie difficile de l'analyse, qui semble réserver tant de surprises aux mathématiciens, encore qu'elle ait à peine été étudiée. Citons aussi ses recherches d'arithmétique supérieure.

Sa correspondance, avec Hermite a été récemment publiée et montre à l'évidence que Stieltjes doit être considéré comme l'un des grands mathématiciens des temps modernes. Nous avons eu l'occasion d'analyser plusieurs de ses travaux et ceux de ses continuateurs : nous n'y reviendrons pas. *

Géométrie analytique. — Il est utile maintenant d'attirer l'attention sur une autre division des mathématiques pures, la géométrie analytique, qui a reçu, ces dernières années, de grands développements. Le sujet a été étudié par une foule d'auteurs modernes, mais nous ne nous proposons pas d'exposer leurs recherches ; nous nous contenterons simplement de mentionner les noms des mathématiciens suivants.

James Booth (1) (1806-1878) et *James Mac Cullagh* (2) (1809-

(1) Voir son *Treatise on some new Geometrical methods*, Londres, 1873.
(2) Voir la collection de ses œuvres éditée par Jellett et Hangton, Dublin, 1860.

1846) tous deux de Dublin, ont été, au XIXe siècle, deux des premiers écrivains de la Grande Bretagne qui se soient occupés de géométrie analytique; mais leurs études concernent surtout des sujets déjà étudiés avant eux. *Julius Plücker* [1] (1801-1868), de Bonn, introduisit de nouveaux développements dans cette science; il se consacra spécialement à l'étude des courbes algébriques, à une géométrie dans laquelle la droite est l'élément de l'espace, à la théorie des congruences et des complexes. * On lui doit encore l'importante méthode des notations abrégées, les coordonnées tangentielles, les coordonnées trilinéaires, l'emploi des formes canoniques. On doit aussi à Plücker des recherches concernant les singularités dites *ordinaires* des courbes planes algébriques, recherches auxquelles la notion de *classe*, introduite par *Gergonne*, donna naissance.

Gergonne, né à Nancy en 1771, mort à Montpellier en 1859, professeur à l'École Centrale de Nîmes, professeur d'astronomie à Montpellier, recteur de l'Académie de cette ville, exerça une grande influence sur la Géométrie de son temps par ses *Annales de Mathématiques*, publiées à Nîmes de 1810 à 1831, et qui furent pendant plus de quinze ans la seule publication du monde entier exclusivement consacrée aux mathématiques. Il sut reconnaître la valeur des méthodes de Poncelet et les perfectionner même par le *principe de dualité*.

Les célèbres formules de Plücker, auxquelles nous avons fait allusion plus haut, ont été généralisées par Salmon et surtout par Cayley qui, ajouterons-nous à ce propos, a contribué pour une bonne part à la théorie des surfaces du 3e et du 4e ordre *.

En 1847, Plücker échangea sa chaire de mathématiques pour une chaire de physique; ses nouvelles recherches se rapportent au spectre solaire et au magnétisme.

La majeure partie des mémoires qu'écrivirent *A. Cayley* et *Henry Smith* sur la géométrie analytique concernent la théorie des courbes et des surfaces; les plus remarquables de *L.-O. Hesse* (1811-1874) de Munich, sont relatifs à la géométrie plane des courbes; * mieux que Plücker, il sut développer la méthode des homogènes; il enrichit, ainsi que Paul Serret, la théorie des surfaces

(1) Les œuvres réunies de PLÜCKER, en trois volumes, éditées par A. SCHOENFLIES et F. POCKELS, ont été publiées à Leipzig, 1875, 1896.

du 2e ordre d'une foule de propriétés élégantes* ; ceux de M. *Darboux*, traitent de la géométrie des surfaces ; ceux de *G.-H. Halphen* et de M. *Appell* s'occupent des particularités des surfaces et des courbes gauches. Les singularités des courbes et des surfaces ont également été étudiées par *H.-G. Zeuthen*, de Copenhague, et par *H.-C.-H. Schubert* (1), de Hambourg. La théorie des courbes gauches a été discutée par *M. Nöther*, d'Erlangen ; et *R.-F.-A. Clebsch*, a appliqué à la géométrie le théorème d'Abel.

* *Mobius* (1790-1868) a déterminé les formes des différentes cubiques au moyen de considérations purement géométriques et *Zeuthen* a discuté celles des courbes planes du quatrième ordre ; F. Klein a relié les résultats de Zeuthen à ses recherches sur les surfaces cubiques, *Kohn* s'est occupé des surfaces du quatrième ordre, *Dyck* a représenté au moyen de surfaces les fonctions d'une variable complexe, *Schönflies* et *Van Vleck* ont étudié les polygones tant rectilignes que curvilignes *.

Parmi les plus récents classiques sur la géométrie analytique, nous citerons : l'ouvrage de Clebsch *Vorlesungen über Geometrie*, édité par F. Lindemann ; les *Conic sections*, la *Geometry of three Dimensions*, et *Higher plane Curves*, de G. Salmon ; * les principales découvertes de ces savants sont respectivement reproduites dans ces traités dont les éditions françaises ont eu une grande vogue *.

Enfin, nous pouvons faire allusion à l'extension apportée à la géométrie analytique par *H.-G. Grassmann*, en 1844 et 1862, *G.-F.-B. Riemann*, en 1854, *A. Cayley* et plusieurs autres, à qui on doit l'idée de l'espace à *n* dimensions.

* **Clebsch** (2) *Rudolf Friedrich Alfred Clebsch*, naquit à Königsberger, en Prusse, en 1833 et mourut en 1872. De 1858 à 1863, il occupa la chaire de Mécanique rationnelle au Polytechnicum de Carlsruhe, et passa de là à l'Université de Giessen, puis à celle de Göttingue. Nous allons compléter ici ce que nous avons dit précédemment à son sujet. Ses travaux concernent la physique mathématique, le calcul des variations, les équations aux dérivées partielles du premier ordre, la théorie analytique générale des courbes et

(1) Les leçons de SCHUBERT ont été publiées, Leipzig, 1879.

(2) * Nous empruntons cette *addition*, et plusieurs autres, à l'*Etude sur le développement des méthodes géométriques* de M. DARBOUX, G.-V., à Paris, 1904.*

des surfaces, les fonctions abéliennes et leurs applications géométriques, les invariants. Il sut faciliter l'accès de l'œuvre de Riemann et y ajouter un intérêt concret par ses considérations géométriques. La manière dont il a généralisé toute la théorie des fonctions abéliennes a une grande valeur et a donné lieu à de remarquables travaux de Nöther, de MM. Picard, Poincaré et Appell.

Dans le dernier mémoire que Clebsch a écrit, il est question de l'application des fonctions abéliennes aux équations différentielles, aux transcendantes que définissent de telles équations. De même que les intégrales abéliennes peuvent être classées d'après les propriétés de la courbe fondamentale qui reste inaltérée pour une transformation rationnelle, de même Clebsch classe les transcendantes définies par les équations différentielles, d'après les propriétés invariantes des surfaces correspondantes pour des transformations rationnelles bi-uniformes. Ce point de vue a été repris, et de très-pénétrante façon, par M. Painlevé.

L'œuvre de Clebsch se relie surtout à celles de Gordan, Salmon, Cremona, Steiner et Riemann. On peut dire de lui qu'il a introduit dans la science des idées vraiment nouvelles et fécondes, en généralisant comme il l'a fait la théorie des fonctions abéliennes, et que le manque de rigueur dont il a parfois fait preuve tient plutôt aux usages de son temps qu'à sa propre tournure d'esprit.

Il montra, le premier, dans une longue série de travaux, toute l'importance de la notion de *genre* d'une courbe, en développant une foule de résultats et de solutions élégantes que l'emploi des intégrales abéliennes paraissait, tant il était simple, rattacher à leur véritable point de départ. L'étude des points d'inflexion des courbes du 3e ordre, celle des tangentes doubles des courbes du 4e ordre et, en général, la théorie de l'osculation, sur laquelle s'étaient si souvent exercés les anciens et les modernes, furent rattachées au beau problème de la division des fonctions elliptiques et des fonctions abéliennes. Dans un de ses mémoires, Clebsch avait étudié les courbes *rationnelles* ou de genre zéro ; cela le conduisit, vers la fin de sa vie trop courte, à envisager ce qu'on peut appeler aussi les surfaces *rationnelles* (1) *.

(1) * Cf. F. Klein, *Conférences sur les mathématiques*, Hermann, à Paris, 1898*.

Analyse. — * Nous sommes loin aujourd'hui sur la route qu'ont ouverte Leibnitz et Newton, ces deux inventeurs du Calcul infinitésimal, si loin que non seulement on embrasse avec peine le chemin parcouru, mais encore qu'on distingue malaisément les nombreux embranchements créés dans la dernière moitié du XIXe siècle.

Même il est de simples mots, tels que celui de *fonction*, auxquels nous n'attachons plus du tout le même sens que les mathématiciens d'il y a cent ans.

Pour eux, une fonction était ce qu'est aujourd'hui une fonction pour les débutants. Si nous devons laisser ceux-ci à leur illusion, de crainte de décourager leur bonne volonté, il n'empêche que le vocable a profondément changé de sens.

Quel en est le sens actuel ? L'expliquer ici sera résumer l'histoire des mathématiques récentes et donner un aperçu, en son lieu, de ce qu'elle est. Les développements qui viendront dans la suite en seront singulièrement éclaircis.

Nous n'admettons plus qu'une fonction d'une variable soit simplement l'entité qu'on peut représenter par une courbe formant un trait continu.

Aux fonctions continues sans dérivées, découvertes par Riemann et Weierstrass, ne correspond en effet aucune courbe ; à *certaines* fonctions $x = f(t)$, $y = \varphi(t)$, correspondent des aires et non plus des courbes, comme l'a montré M. Peano : quand t varie de a à b, le point x, y peut prendre des positions quelconques dans un certain rectangle. Si $F(x, y)$ est continue par rapport à x et par rapport à y, $F(x, y)$, nous apprend M. Dini, peut ne pas être continue par rapport à l'ensemble de x et de y. M. Lebesgue montre à son tour que les surfaces développables ne sont pas seules applicables sur un plan, car on peut, à l'aide de fonctions continues, obtenir des surfaces correspondant à un plan, de telle sorte que toute ligne rectifiable du plan ait pour correspondante une ligne rectifiable de même longueur de la surface, la surface n'étant pas réglée.

Le concept de fonction est donc quelque chose de plus complexe qu'on ne se l'imaginait autrefois.

On tend de plus en plus à définir, en général, les fonctions par une collection de fonctions simples : séries de monômes, séries de polynômes, séries trigonométriques ; et c'est l'étude approfondie de ces collections qui a changé l'idée qu'avaient nos ancêtres du mot

fonction. Il se trouve, en effet, qu'on ne peut, par exemple, traiter une série de monômes comme un simple polynôme.

C'est l'idée des séries trigonométriques qui a ouvert la voie nouvelle.

Daniel Bernoulli montre le premier qu'on peut satisfaire à certaine équation différentielle par une série trigonométrique. Fourier affirme ensuite que toute fonction peut être représentée entre les valeurs o et 2π de l'argument par un développement de cette nature et qu'un même développement peut, entre ces limites, représenter des fonctions correspondant à des arcs de courbes différents. Plus tard, Dirichlet soumet à un examen sévère les séries trigonométriques. Il précise la condition suffisant à ce qu'un développement trigonométrique représente une fonction donnée dans l'intervalle de o à 2π. Du Bois Reymond et M. Jordan montrent qu'une fonction continue n'est pas toujours développable en série trigonométrique. Par contre, Riemann cherche les conditions nécessaires au développement; M. Lerch aussi, apporte une importante contribution à ce chapitre de l'analyse.

Fourier a ainsi posé le problème des séries trigonométriques, élément analytique aussi capital que la série de Taylor en relation étroite avec lui [1].

Tout particulièrement, les expressions des fonctions elliptiques par des séries simples de sinus et de cosinus, telles que les donne la formule de Fourier, ont, à bien des points de vue, une grande importance en Analyse et dans ses applications à la Physique, à l'Astronomie, à la théorie des nombres. Dans un mémoire justement célèbre *Sur les intégrales des fonctions à multiplicateur*, M. Appell a donné des développements analogues des fonctions quadruplement périodiques de deux variables inverses des intégrales hyperelliptiques de première classe.

Nous aurions beaucoup à dire encore sur ce sujet. Nous devons nous borner et passer à d'autres ordres d'idées.

La classification des équations aux dérivées partielles, intégrées au point de vue de la Physique mathématique, dépend de la théorie des caractéristiques, avec Monge, Cauchy, Backlund, MM. Goursat, Beudon.

(1) Cf. Les ouvrages et mémoires récents de MM. Lebesgue et Fatou.

Tenons-nous en au second ordre. Avec les caractéristiques imaginaires, on a affaire au type *elliptique* et au problème de Dirichlet : l'on donne, sur un contour fermé, une donnée, soit la fonction. soit la dérivée normale. C'est ici que se placent les admirables travaux de Riemann, Lamé, C. et F. Neumann, Schwartz, Robin, MM. Poincaré, Liapounof, Stecklof, Korn, Zaremba, Harnak, Pockels.

Tout récemment, M. Fredholm a obtenu une forme, à peu près définitive, de la solution, par sa magnifique résolution des équations fonctionnelles contenant une fonction inconnue, au premier degré, sous le signe de quadratures. Il y a là un progrès éminent, qui n'en laisse pas moins subsister l'essentiel des travaux plus anciens. Déjà, MM. Hilbert, Picard, Schmidt ont ajouté d'importants résultats à ceux de M. Fredholm. En particulier, M. Hilbert part du problème fini, discontinu, pour retrouver les transcendantes de M. Fredholm. ce qui est très intéressant. Et toutes les fonctions fondamentales de Laplace, Lamé, Poincaré, etc., sont retrouvées, aves ces fonctions intégrales, d'une manière naturelle.

D'autre part, à la suite de M. Hilbert, plusieurs auteurs ont étudié les problèmes de Dirichlet, comme le faisait Riemann, c'est-à-dire au point de vue du calcul des variations, et avec les précisions que l'on apporte ici depuis Weierstrass.

M. Picard, par la méthode des approximations successives, a d'ailleurs intégré des équations plus compliquées encore ; il a apporté des résultats fondamentaux au sujet de la nature analytique des solutions, suivi, en tout cela, par MM. Zaremba, Le Roy, Bernstein, etc. Ces approximations successives ont été appliquées, avec un égal bonheur, par M. Picard, aux équations hyperboliques, aux équations fonctionnelles (et ici se place un travail intéressant de M. Leau) aux équations différentielles ordinaires. Enfin, M. Goursat les a appliquées à la recherche des fonctions implicites. Il y a là une méthode des plus fécondes, et dont l'importance a été reconnue à l'occasion des équations de la Physique, traitées constamment, il est vrai, à un point de vue qui dépasse en généralité celui de la Physique mathématique, et qui diffère du point de vue Cauchy-Kowalewski.

Passons au type *hyperbolique*, c'est-à-dire aux équations qui ont leurs caractéristiques réelles.

On a alors affaire au problème de Cauchy, sauf que les données ne sont pas forcément analytiques, comme le suppose la démonstration de Mme de Kowalewski.

Riemann avait donné une méthode célèbre pour l'intégration de la plus simple des équations hyberboliques, à deux variables indépendantes. Pour l'équation des ondes sphériques, à quatre variables indépendantes, on avait les beaux travaux de Poisson et de Kirchhoff : on pourra consulter à ce sujet les belles leçons de M. P. Duhem. Récemment, M. Vito Volterra a renouvelé la question, par son étude de l'équation des ondes cylindriques, à trois variables indépendantes.

Ses travaux ont été suivis de ceux de M. O. Tedone, de M. J. Coulon, qui a donné d'intéressantes interprétations physiques de ses résultats, de M. R. d'Adhémar, qui a introduit la notion très objective de conormale et qui, en même temps que M. Hadamard, a fait usage des parties finies d'intégrales infinies. M. Hadamard publie, en ce moment, d'importants travaux sur ces questions, dont on commence à apercevoir la solution générale.

On possède ainsi de beaux ensembles de résultats sur les problèmes elliptiques et hyperboliques et, suivant l'expression de M. Hadamard, des problèmes nouveaux, qu'on peut qualifier de mixtes, se poseront : en des régions différentes de la frontière donnée, les données seront de nature différente.

Nous ne saurions oublier ici que M. Delassus, qui a étendu les résultats de MM. Méray, Riquier, Bourlet, sur le théorème de Cauchy-Kowalewski, a aussi fait l'extension de la méthode de Riemann aux équations hyperboliques à deux variables. M. Le Roux a apporté une contribution importante à l'étude de ces questions, ainsi que MM. Bianchi, Nicoletti (¹). Nous devons encore citer, au sujet des équations différentielles, les études de M. Appell sur certaines équations spéciales, celles de M. Cotton sur les formes associées, de M. Hedrick sur la nature analytique des solutions, les théorèmes d'existence de M. Holmgren, les travaux de MM. Böcher, Levi-Civita, Lauricella, Arn. Sommerfeld.

On voit assez combien l'étude des équations différentielles peut

(¹) * Cf. Hadamard, *Leçons sur la théorie des ondes*, Paris, 1902, et R. d'Adhémar, *Les équations aux dérivées partielles*, Paris, 1907 *.

se faire à des points de vue différents, et quel a été, là comme ailleurs, le grand rôle de Cauchy.

Il faut dire, cependant, que Cauchy et ses disciples français n'ont point étudié les points singuliers dénommés essentiels, dont le point $z = 0$ pour la fonction $e^{\frac{1}{z}}$ donne l'exemple le plus simple. C'est Weierstrass qui montra, par la considération des facteurs primaires, que dans le voisinage d'un point singulier essentiel isolé, une fonction uniforme peut se représenter par le quotient de deux fonctions uniformes n'ayant pas de pôle de ce point singulier et que, dans le voisinage d'un tel point, la fonction s'approche autant qu'on veut de toute valeur donnée.

M. Picard et, longtemps après lui, M. Schottky, a établi ce très important résultat : que dans le voisinage d'un point *singulier* essentiel *isolé*, la fonction prend rigoureusement une infinité de fois toute valeur donnée, sauf pour deux valeurs particulières, au plus. Après M. Picard, M. Borel a approfondi et généralisé ce théorème.

Signalons maintenant les travaux de M. Hadamard sur le genre des fonctions entières et l'application qu'il en a faite à l'étude de la distribution des racines d'une fonction qui se rencontre dans l'étude des nombres premiers, ceux de M. Borel sur les zéros des fonctions entières, ceux de M. Darboux sur l'approximation *des fonctions* de grands nombres, ceux enfin de M. Lindelöf sur le prolongement analytique, renvoyant pour cette dernière question à ce que nous avons dit précédemment, mais nous ne saurions oublier ici que M. Appell, M. Picard aussi, a fait une magistrale étude de fonctions généralisant certaines intégrales abéliennes, qui se présentent dans la recherche des coefficients des fonctions abéliennes de deux variables, quand on les développe en séries trigonométriques.

Nous aurions encore à énumérer diverses découvertes importantes concernant les fonctions de deux variables et à parler à ce propos des travaux d'Hermite, de M. Picard [1], de M. Bourget, de M. Humbert, qui ont attaché leurs noms aux groupes hyper-

[1] * Nous nous sommes largement inspirés dans cette note et dans plusieurs autres des Conférences faites par M. Picard en Amérique (Gauthier-Villars à Paris, 1905) *.

fuchsiens et hyperabéliens, aux fonctions abéliennes singulières, mais nous sortirions peut-être du cadre de cet ouvrage.

Nous ne saurions trop insister cependant sur la théorie des groupes, fondamentale aujourd'hui, car les groupes sont à la base de l'algèbre toute entière, théorie des formes, des invariants, etc., et de l'analyse. Ils définissent des transcendantes, telles que les fonctions fuchsiennes de M. Poincaré, nommées automorphes par MM. Klein et Fricke : ici se placent de remarquables travaux de MM. Humbert, Lerch, Picard, Stouff, Alezais.

Avec MM. Klein, Jordan, Poincaré, Painlevé, Boulanger, les groupes discontinus finis interviennent dans la théorie des équations différentielles linéaires. Les groupes continus sont à la base de la théorie généralisée de l'intégration des équations aux dérivées partielles, de S. Lie.

M. Picard, suivi par MM. Drach et Vessiot, a inauguré la classification générale des transcendantes par les groupes. La considération des groupes de transformation à un nombre fini de paramètres a conduit enfin M. Vessiot à une théorie complète de l'irréductibilité des systèmes différentiels, couronnée par l'Académie des Sciences.

C'est dire quelle place Galois et Lie tiennent dans la science actuelle. De ce dernier savant, dont le rôle n'a pas été complètement mis en lumière par M. Rouse-Ball, citons encore la Géométrie des sphères, développée par M. Darboux, et qui fait correspondre les lignes de courbure d'une surface aux lignes asymptotiques d'une autre surface, ses travaux sur les transformations de contact, dont bien des cas particuliers avaient déjà attiré l'attention des géomètres, telle la variation du paramètre, exposée par Lagrange dans le problème des trois corps ; une des plus importantes applications des transformations de contact se rencontre dans la théorie des équations aux dérivées partielles qui, à ce nouveau point de vue, acquiert un degré de profondeur jusqu'alors inconnu ; la véritable signification des mots *solution*, solution *générale, complète, singulière*, introduits par Lagrange et Monge, devient tout-à-fait claire. Nous aurons à revenir sur ces questions et il apparaîtra alors que Lie tient l'une des premières places dans la science actuelle.

Peut-être est-il bon de rappeler ici qu'avec MM. Fuchs et Poin-

quel grand rôle jouait dans l'intégra- différentielles non linéaires la célèbre l'élément de réduction.

s déterminant les intégrales des équa- nnent de nos jours des formes très nées peuvent remplacer les conditions

re d'idée sont les questions qui con- des intégrales. Après Euler, Lagrange ux travaux sur des questions de mini- repris par M. Appell, Monge, cette e dont, croyons-nous, M. Rouse-Ball le mérite, qui ne connaît son admi- ions de l'analyse à la Géométrie, après a publié un mémoire fondamental sur . M. Goursat a rassemblé dans un ou- des proposées, en y ajoutant ses belles

, Goursat ont étudié aussi les séries hy- usieurs variables, M. Appell enfin, l'in- s, les fonctions abéliennes, les fonctions s circulaires et Eulériennes, le dévelop- ns holomorphes et d'importantes équa- encontrent en mécanique.

que plusieurs mathématiciens contem- ons de citer surtout, ont ouvert cette otion d'*intégrale* abélienne.

ns rationnelles attachées à une courbe riétés essentielles de cette courbe ou, si algébrique à un paramètre. L'étude des algébriques à deux paramètres par les s attachées à la surface est non moins arquablement abordée par M. *Picard.* lié à l'*Analysis situs*, où viennent se M. Poincaré.

s de ce dernier paragraphe les noms ovo, Humbert, Séveri, Lacaze, Tray-



A l'occasion de Cauchy, enfin, nous avons vu combien, aujourd'hui, l'idée de fonction analytique est fondamentale encore que dérivée de son sens primitif, puisque MM. du Bois-Reymond, Pringsheim, Lerch, Borel ont fait connaître des fonctions non analytiques ayant toutes leurs dérivées jusqu'à l'infini. En ces dernières années, et après Weierstrass, toutes les questions de principe ont été élucidées. C'est ainsi que la théorie des Ensembles, fondée par M. Cantor, est venue se placer à la base des plus larges classifications, et a permis d'en faire un corps de doctrine d'une harmonie parfaite. Citons à ce propos les travaux de M. Baire sur les fonctions discontinues, ceux de Riemann, de MM. Jordan, Darboux, Lebesgue, de la Vallée-Poussin, sur les fonctions intégrables et sommables, ceux de M. Osgood sur la convergence des séries, uniformes ou non.

Toujours dans le même ordre d'idées, Weierstrass, MM. Poincaré, Borel, Pringsheim, Lerch, Zoretti ont heureusement étudié les prolongements analytiques, avec ou sans espaces lacunaires, Laguerre, MM. Borel, Lindelöf et P. Boutroux ont lié la croissance des fonctions aux notions de genre et d'ordre, M. Painlevé enfin a étudié les équations différentielles à ce même point de vue, fondamental, de la croissance.

M. Appell, dans son mémoire sur les fonctions périodiques de deux variables, ainsi que MM. Picard, Poincaré et Kœnigs, ont abordé le problème extrêmement difficile de définir les fonctions par des relations fonctionnelles. Ce problème du plus haut intérêt offre un champ des plus vastes aux mathématiciens de l'avenir.

D'autre part, on a vu combien les travaux concernant les fonctions spéciales, elliptiques, abéliennes, fuchsiennes, hyperabéliennes, hyperfuchsiennes, Zéta et autres ont pris d'importance dans ces dernières années.

Plus haut, nous avons assez longuement parlé de la *Théorie des nombres et de l'Algèbre*. Une mention spéciale doit cependant être accordée aux travaux récents de M. Lerch sur certains théorèmes d'Arithmétique et les formes quadratiques et à *P. Tchébychef*, qui naquit le 26 mai 1821 à Borovsk, en Russie, et mourut à Pétersbourg le 8 décembre 1894. Nommé professeur à l'université de cette ville en 1853, il y professa des cours fort estimés sur les intégrales définies, sur les équations différentielles,

sur la théorie des nombres et sur le calcul des probabilités. En 1874, il fût élu associé de l'Académie des sciences de Paris. Tchébychef est un arithméticien de valeur, bien qu'il se soit surtout occupé de l'application des mathématiques aux sciences expérimentales : questions de maximum et de minimum d'un genre différent de celles qui conduisirent à l'invention du calcul différentiel et du calcul des variations, recherches des valeurs approchées des nombres, des fonctions, des intégrales, recherches sur les fractions continues et, surtout : théorie des probabilités, où il se montre analyste de talent. Peut-être pourrait-on regretter qu'il n'ait point poursuivi ses premières recherches sur la théorie des nombres, où il étudia avec bonheur la loi de distribution des nombres premiers.

Rappelons en dernier lieu que Fourier a le premier envisagé un système d'équations du premier degré en nombre infini, les inconnues étant elles-mêmes en nombre infini. De tels systèmes se présentent dans plusieurs systèmes d'analyse, quand on veut développer le quotient de deux séries trigonométriques, quand on veut intégrer une équation différentielle linéaire à coefficients périodiques au moyen d'une fonction périodique ou au moyen du produit d'une telle fonction par une exponentielle, problème qui se pose en mécanique céleste.

M. Poincaré a fait de ces systèmes d'équations une magistrale étude et a montré que, fait singulier, des égalités en nombre infini peuvent, dans certains cas être remplacées par des inégalités en nombre infini, aussi.

L'analyse se limiterait donc singulièrement en se bornant à l'étude des systèmes d'équations en nombre fini, algébrique ou non, encore que les premières et parmi celles-ci les plus simples seules, soient bien connues.

Ajoutons qu'en ces vingt dernières années, de remarquables traités classiques d'Analyse ont vu le jour, ceux de MM. Jordan, Picard, Humbert, Goursat, de la Vallée-Poussin, Appell, pour ne citer que les auteurs français *.

Géométrie synthétique. — Les écrivains que nous venons de citer se sont, pour la plupart, intéressés à l'analyse.

Nous allons maintenant parler de quelques-uns des travaux les

plus importants du siècle concernant la géométrie synthétique ([1]).

On peut dire que la géométrie synthétique moderne a son origine dans les travaux de l'illustre Monge, en 1800, de Carnot, en 1803, et de Poncelet, en 1822 ; mais les œuvres de ces savants laissent seulement entrevoir la grande extension que cette branche des mathématiques devait recevoir en Allemagne et en France et dont Steiner, Von Staudt et Chasles sont peut-être les auteurs et les propagateurs les plus connus.

Steiner ([2]). — *Jacob Steiner*, « le plus grand géomètre depuis Apollonius », naquit à Utzensdorf, le 8 mars 1796, et mourut à Berne, le 1er avril 1863. Son père était campagnard et jusqu'à l'âge de quatorze ans, l'enfant n'eut aucune occasion d'apprendre à lire et à écrire. Dans la suite, il se rendit à Heidelberg, puis à Berlin, subvenant à ses besoins en donnant des leçons. Son ouvrage, *Systematische Entwickelungen*, fut publié en 1832 et sa réputation fut aussitôt faite : il contient une discussion complète du principe de dualité, des relations projectives et homographiques des points en ligne droite, des faisceaux de droites, etc., basée sur les propriétés métriques. Grâce à l'influence de Crelle et Jacobi, qui furent frappés de la puissance de cet ouvrage, une chaire de géométrie fut créée pour Steiner, à Berlin, et il l'occupa jusqu'à sa mort. Les plus importantes de ses autres recherches sont contenues dans des notes parues à l'origine dans le *Journal de Crelle*, et sont comprises dans sa *Synthetische Geometrie* : elles traitent principalement des propriétés des courbes algébriques et des surfaces, des podaires et des roulettes, des maxima et minima ; la discussion est purement géométrique. Les ouvrages de Steiner peuvent être considérés comme une autorité classique en ce qui concerne la géométrie synthétique récente. * Steiner se rencontra avec Cayley, Salmon, Cremona, dans l'étude des surfaces

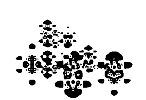
([1]) Les œuvres réunies de Steiner, éditées par Weierstrass, ont été publiées en deux volumes, Berlin, 1881-82. Un récit de sa vie se trouve dans *Erinnerung an Steiner*, par C.-F. Geiser, Schaffhausen, 1874.

([2]) L'*Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*, par M. Chasles, Paris, seconde édition, 1875, et *Die synthetische Geometrie in Alterthum und in der Neuzeit*, par Th. Reye, Strasbourg, 1886, contiennent d'intéressants résumés de l'histoire de géométrie ; mais l'ouvrage de Chasles est écrit à un point de vue exclusivement français.

... mple et aussi facile que celle des su-
... saurait en dire autant des surfaces ...
... Steiner, Kummer, Cayley, Moutard
... citer que les plus anciens. Steiner
... portants développements à la théorie

... me de géométrie pure, complètement
... ar Steiner* et Chasles*, fut proposé par
... *Staudt*, né à Rothenburg, le 24 janvier
... occupait la chaire de mathématiques. ...
... *der Lage*, il proposait un système de
... une référence au nombre ou à la gran-
... bstraite, parvenait à établir les pro-
... ques des figures, envisageait les *points*
... plans et même obtenait une défini-
... re : ses vues furent encore *étendues*
... *zur Geometrie der Lage*, 1856-1860.
... et brillante ; elle a été *utilisée* par Cul-
... ique dont elle forme la base.
... es sur la géométrie synthétique, nous
... *métrie supérieure*, de Chasles, 1852 ;
... *he Geometrie*, de Steiner, 1867 ; les
... *ctive*, de Cremona, et la *Geometrie der*
... e, 1866-1868. Une bonne exposition
... a géométrie pure se trouve dans *l'ou-*
... *teoria geometrica delle curve piane*,
... *ari di una teoria geometrica delle su-*
... de l'Ecole polytechnique de Rome.
... ées et dans les méthodes anciennement
... synthétique et la géométrie analytique
... r développement ultérieur.

... *rles-François baron Dupin*, naquit à
... mille d'ancienne bourgeoisie, en 1784.
... Il entra à l'Ecole polytechnique et en
... titre d'ingénieur des *constructions*



Ses travaux sur les *surfaces cyclides*, en suite de ceux de Fermat, Euler et Monge, et avant ceux de M. Darboux, sont justement célèbres ; mais sa carrière très active d'ingénieur, à Anvers, à Corfou, à Toulon, ne lui laissait guère le loisir de se livrer à ses études favorites. Il put cependant tirer d'intéressantes conclusions, concernant les lignes de courbure, de l'étude des déblais et remblais. Son nom reste aussi attaché à la notion de l'*indicatrice*, qui devait renouveler après Euler et Meunier toute la théorie de la courbure, celle des tangentes conjuguées, des lignes asymptotiques, qui ont pris une place si importante dans les récentes recherches. L'étude de la lumière enfin et les principes fondamentaux de la résistance des matériaux, lui doivent de notables progrès.

Professeur au Conservatoire des Arts et Métiers, ingénieur et économiste distingué, membre de l'Académie des sciences, Dupin fut nommé, en 1826, député du Tarn, et conserva ces fonctions jusqu'en 1870 *.

* **Chasles**. — *Michel Chasles* naquit à Chartres, en 1793, et mourut à Paris en 1880. Elève à l'Ecole polytechnique, il publia trois notes de géométrie qui ne furent point alors appréciées à leur valeur, devint, sur le désir de son père, associé d'agent de change, se lança dans la vie mondaine et ne revint qu'après des revers de fortune à ses études premières. C'était en 1827. Dix ans plus tard, grâce surtout à son *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*, il avait mérité et acquis une grande notoriété.

L'Aperçu historique fut publié en 1834. L'année suivante, Chasles publiait plusieurs beaux mémoires sur la théorie de l'attraction, puis découvrit, après Gauss et Green, le théorème qui porte le nom de ce dernier mathématicien ; en 1843, il obtint la chaire de géodésie et de machines à l'Ecole polytechnique et, peu après, la chaire de géométrie supérieure, créée spécialement pour lui, en Sorbonne. Son *Traité de Géométrie supérieure* et son *Traité des sections coniques*, malheureusement inachevé, ont une haute valeur. Ses beaux théorèmes sur le déplacement d'un corps solide ont apporté une contribution précieuse à la Cinématique.

Chasles, avec Cayley, Cremona, Salmon, La Gournerie, a étudié encore les surfaces réglées algébriques, dont certaines applications sont fort importantes.

Chasles n'entra à l'Académie des sciences qu'à l'âge de 58 ans. Un illustre géomètre anglais a cru pouvoir dire de lui qu'il était « l'empereur de la géométrie » *.

* **Bellavitis.** — *Giusto Bellavitis*, de pauvre, mais noble famille, naquit à Bassano, le 22 novembre 1803, et mourut à Padoue, le 9 novembre 1880. Son père fit son éducation. En 1840, il fut nommé membre pensionné du Royal Institut Vénitien des sciences et, en 1845, professeur à l'Université de Padoue. Son premier travail, où il réfutait certaines erreurs du traité de mécanique de Ventaroli, parut en 1836. On lui doit quelques mémoires concernant le calcul différentiel, entre autres la détermination de l'aire des polygones et celle du volume des polyèdres en fonctions des distances respectives des sommets, formules retrouvées par Staudt, en 1842 ; une étude sur les fonctions inverses ; une étude sur des séries se rapportant aux factorielles et aux intégrales eulériennes ; une classification des courbes du 3e et du 4e ordre. Il fit aussi des recherches concernant la partition des nombres, l'analyse indéterminée, les imaginaires, les nombres de Bernoulli, les déterminants et les substitutions linéaires.

Son œuvre originale est le *Calcul des équipollences*. Carnot, dans sa *Géométrie de position*, publiée en 1803, avait déjà parlé de l'importance qu'aurait l'introduction en géométrie d'un algorithme représentant à la fois la grandeur et la position des diverses parties d'une figure. Ce fut en 1835 que Bellavitis sut réaliser le vœu du géomètre français. Son calcul des équipollences jouit d'avantages incontestables qui sont les suivants : à chaque propriété de points en ligne droite, répond une propriété de points du plan ; les solutions graphiques des problèmes sont aisées à obtenir ; la théorie des courbes peut se faire indépendamment de tout système de coordonnées, et les formules en sont à la fois simplifiées et généralisées ; la théorie des imaginaires se présente sous un aspect nouveau.

C'est en vain que Bellavitis voulut étendre à l'Espace sa théorie des équipollences. Il n'y put réussir. Hamilton, seulement, avec ses *quaternions*, devait vaincre la difficulté.

Bellavitis résolut nombre de problèmes au moyen des équipollences, et en obtint parfois des solutions brèves et élégantes. Ses

contemporains ne le suivirent guère dans cette voie. Seul, M. Laisant parvint à manier, à l'égal du maître, cet instrument. Il semble, en effet, que le *Calcul barycentrique*, de Möbius, et les *quaternions* d'Hamilton aient quelque peu éclipsé l'algorithme de Bellavitis *.

* **Cremona.** — *Louis Cremona* naquit à Pavie, le 8 décembre 1830, et mourut à Rome, le 10 juin 1903. Il fit ses études à l'Université de Pavie, sous la direction de Brioschi. Il professa à Crémone, Milan, Bologne et Rome.

On lui doit de très nombreux mémoires de géométrie.

En 1848, Steiner, reprenant la théorie des polaires d'un point par rapport à une courbe, montra comment elle pouvait servir de fondement à une théorie des courbes planes, indépendamment de tout système de coordonnées. De cette simple donnée, de certains travaux aussi de Chasles et de Jonquières sur la géométrie projective, Cremona sut tirer sa remarquable *Introduction à la théorie géométrique des courbes planes* où figurent non seulement les résultats alors acquis, mais encore nombre de faits nouveaux et intéressants. Il y est question du rapport anharmonique, de l'involution, de la génération des courbes planes, de la détermination des courbes, des polaires, des Steinériennes, des Hessiennes, des formules de Plücker, des courbes du troisième ordre.

Cremona étudia les courbes gauches, les surfaces réglées du troisième et du quatrième ordre, et surtout les transformations géométriques ; ses travaux à ce sujet sont des plus remarquables. Mieux que Magnus, il sut en donner une théorie générale, dont les applications à l'analyse sont nombreuses et importantes. C'est grâce à cette théorie, surtout, qu'il a laissé un nom dans la science.

Citons, parmi ses principaux ouvrages, ses *Eléments de calcul graphique* et ses *Eléments de géométrie projective* *.

* *La Géométrie infinitésimale.* — Quelques-uns des disciples de Monge, citons parmi eux Lancret et Dupin, s'attachèrent à développer les notions mises au jour par leur maître, sur les courbes à double courbure, sur la génération des surfaces, notions dont le germe se rencontre dans l'*Application de l'Analyse à la Géométrie* de leur illustre précurseur.

A la suite des *Disquisitiones generales circa superficies curvas* de Gauss (1827), la méthode infinitésimale, l'application du Haut Calcul à la Géométrie, prit en France un essort remarquable. Ce sont Frenet, Bertrand, Molins, J.-A. Serret, Bouquet, Puiseux, O. Bonnet, Paul Serret qui développent la théorie des courbes, Jacobi qui intègre l'équation différentielle des lignes géodésiques de l'ellipsoïde, Lamé qui fonde la théorie des coordonnées curvilignes dans l'espace, Ribaucour qui rend mobiles les axes usuels de coordonnées et tire le plus heureux parti, comme l'a montré M. Darboux, de cette idée si simple.

On doit à Bonnet et Liouville la notion de courbure géodésique, que Gauss possédait, mais n'avait pas fait connaître. Ribaucour, Halphen et Lie ont étudié les surfaces dont les rayons de courbure sont fonctions l'un de l'autre, Bonnet a donné la notion des surfaces associées, Weierstrass a établi un lien étroit entre les surfaces minima et les fonctions d'une variable complexe et a montré que certaines formules de Monge peuvent servir de base à l'étude des surfaces minima.

On sait déterminer, depuis Riemann, les surfaces minima qui passent par des contours déterminés, les plus simples, et, pour le contour général, l'étude a été brillamment commencée.

Les surfaces à courbure constante ont fait l'objet de beaux travaux. Leur équation générale n'a pu être intégrée, malgré sa simplicité apparente, mais on a pu obtenir en termes finis les équations de quelques-unes d'entre elles.

Minding et Bour ont étudié la déformation générale des surfaces. La théorie des lignes de courbure et des lignes asymptotiques a fait de grands progrès. Dupin, Bertrand, Hamilton, Kummer, Ribaucour ont attaché leurs noms aux congruences, Cayley, Lamé aux systèmes triples orthogonaux, Jacobi et Ossian Bonnet aux lignes géodésiques, qui sont, sur les surfaces, les plus courts chemins d'un point à un autre.

Sophie Lie se place au premier rang des mathématiciens qui ont cultivé cette branche de la Géométrie. On lui doit une transformation célèbre qui fait correspondre une sphère à une droite et permet, par suite, de rattacher toute proposition relative à des droites à une proposition relative à des sphères ; il a étudié les congruences et les complexes de courbes, transformations de contact

surtout, qui ont jeté un jour si vif sur la théorie des équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur.

M. Darboux a fait la synthèse de la plupart des découvertes précitées dans deux ouvrages justement appréciés, où se retrouvent aussi ses propres travaux : ses *Leçons sur la théorie générale des surfaces* et ses *Leçons sur les systèmes orthogonaux*.

Fort intéressantes sont les courbes définies par une équation différentielle ordinaire. Les points singuliers des courbes correspondant à l'équation très simple

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} \text{ (X et Y polynômes en } x, y),$$

se partagent en trois types, que M. Poincaré appelle *cols*, *nœuds* et *foyers*. Les travaux les plus récents sur les points singuliers des courbes intégrales de cette équation sont dus à M. Bendixon ; le savant géomètre suédois a établi en particulier que s'il existe pour cette équation une courbe intégrale allant à l'origine avec une tangente déterminée, toutes les courbes intégrales allant à l'origine y parviendront avec des tangentes déterminées. Les courbes intégrales peuvent être fermées ; elles peuvent avoir un foyer comme point asymptote, elles peuvent être asymptotes à une courbe fermée, solution elle-même de l'équation différentielle, courbes fermées que M. Poincaré appelle *cycles limites* et qui jouent un rôle capital dans cette étude.

Nous avons jusqu'ici parlé des courbes intégrales des seules équations linéaires et du premier ordre.

Les difficultés s'accroissent quand on passe aux équations du premier ordre et de degré supérieur.

Là, l'étude des points singuliers a été poussée fort loin, mais ce fait qu'une courbe intégrale recouvre parfois une aire, complique fort l'étude des courbes dans l'ensemble du plan. Il arrive aussi que certains développements en série, utilisables pour le premier ordre, ne donnent rien qui vaille quand on passe aux ordres supérieurs.

M. Hadamard a étudié les lignes géodésiques de surfaces à courbures opposées. Il a établi que là existent des lignes géodésiques se rapprochant d'une géodésique fermée déterminée, puis l'aban-

donnant pour se rapprocher d'une autre, puis passant à une troisième, et ainsi de suite indéfiniment.

C'est à l'aide de faits particuliers de ce genre qu'on établit les bases des théories générales. Nous l'avons déjà dit et nous le répétons à dessein *.

La Géométrie non-euclidienne. — Les études relatives aux fondements de la géométrie ont donné lieu récemment à des travaux très remarquables.

La question de l'exactitude des hypothèses généralement faites en géométrie avait déjà été examinée par J. Saccheri, vers 1733 ; et elle a été discutée à des époques plus récentes par N.-I. Lobatschewsky (1793-1856) de Kasan, en 1826 et encore en 1840 ; par Gauss, peut-être en 1792, mais certainement en 1831 et en 1846 ; et par J. Bolyai (1802–1860), en 1832, dans l'appendice, au premier volume de son père, *Testamen* ; mais le mémoire présenté, en 1854, par Riemann, attira l'attention générale sur la question d'une géométrie non-euclidienne et, depuis, la théorie a été développée et simplifiée par divers écrivains, notamment par A. Cayley, de Cambridge, E. Beltrami (¹) (1835-1900), de Pavie ; H.-L.-F. von Helmholtz (1821–1894), de Berlin ; F.-C. Klein, de Göttingue, et A.-N. Whitehead, de Cambridge, dans son *Universal Algebra*. Le sujet est si technique que nous nous contenterons de présenter un simple aperçu du concept (²) d'où l'idée est dérivée.

Pour qu'un espace à deux dimensions possède les propriétés géométriques qui nous ont été rendues familières par l'étude de la géométrie élémentaire, il est nécessaire que l'on puisse construire, en un point quelconque de cet espace, une figure congruente à une figure donnée. Lorsque le produit des rayons principaux de courbure

(¹) Une liste des écrits de Beltrami est donnée dans les *Annali di matematica*, mars 1900.

(²) Comme références voir nos *Mathematical Recreations and Problems*, Londres, 1896, chap. x. Une histoire sommaire de la géométrie non-euclidienne est donnée dans les ouvrages de F. Engel et P. Stackel, Leipzig, 1895, 1899, etc. ; voir aussi J. Frischauf, *Elements der absoluten Geometrie*, Leipzig, 1876 ; et un rapport de G.-B. Halsted, sur les progrès de la question, a été inséré dans le journal *Science*, N. S., vol. X, New-York, 1899, pp. 545-557.

en chaque point de l'espace ou de la surface est constant, et seulement dans ce cas, on le peut. Trois sortes de surfaces jouissent de cette propriété, ce sont : 1° les surfaces sphériques pour lesquelles le produit est positif ; 2° les surfaces planes, qui nous conduisent à la géométrie euclidienne, et pour lesquelles le produit est zéro ; et ce que Beltrami a appelé surfaces pseudo-sphériques, pour lesquelles le produit est négatif. De plus, si une quelconque de ces surfaces est déformée sans déchirure ni duplicature, la mesure de sa courbure demeure constante. Ainsi, ces trois sortes de surfaces représentent trois types distincts sur lesquels on peut construire des figures congruentes. Par exemple, une surface plane peut être enroulée de façon à former un cône, ou un cylindre, et le système de géométrie correspondant à une surface conique, ou cylindrique, sera identique à celui correspondant à un plan.

Une simple particularité distingue les unes des autres ces trois espaces à deux dimensions. D'un point d'un espace sphérique, ou d'une autre surface quelconque à une courbure positive constante, on ne peut mener aucune ligne géodésique parallèle à une ligne géodésique donnée, la ligne géodésique étant définie comme « la plus courte distance entre deux points ». Par un point de l'espace euclidien, ou d'un plan, on peut mener une ligne géodésique, c'est-à-dire une ligne droite, et une seulement, parallèle à une ligne droite donnée. Par un point de l'espace pseudo-sphérique, on peut mener plusieurs lignes géodésiques parallèles à une ligne géodésique donnée.

On pourrait croire que nous sommes en mesure de démontrer que notre espace est plan, puisque par un point donné nous ne pouvons mener qu'une seule ligne parallèle à une droite donnée. Mais cela n'est pas, car on conçoit fort bien que nos moyens d'observation ne nous permettent pas d'avancer avec une certitude absolue que deux lignes sont parallèles ou non ; par suite, il ne nous est pas possible d'utiliser cette proposition pour affirmer que notre espace est ou n'est pas plan. Une meilleure preuve pourrait être basée sur cette proposition que, dans tout espace à deux dimensions de courbure constante, si la somme des angles d'un triangle diffère de deux angles droits, la différence est une quantité proportionnelle à l'aire du triangle. Il est dès lors possible que, bien que cette différence soit imperceptible pour les triangles que nous pouvons me-

surer, * même les plus grands, les triangles géodésiques, par exemple *, elle puisse être sensible pour les triangles présentant des dimensions un million de fois plus grandes.

Si l'espace considéré est sphérique ou pseudo-sphérique, son étendue est limitée ; si l'espace est plan, il s'étend à l'infini, * géométriquement et non philosophiquement parlant *. Pour ce qui regarde l'espace pseudo-sphérique, nous ajouterons que, s'il est construit dans l'espace à quatre dimensions, son étendue peut être infinie.

Dans l'aperçu que nous venons de présenter des fondements de la géométrie non-euclidienne, nous avons admis tacitement que la mesure d'un même segment était indépendante de sa situation. M. Klein a montré qu'il n'en est pas ainsi ; on peut, sous condition de choisir de façon convenable la loi suivant laquelle varie la mesure d'une distance, obtenir trois systèmes de géométrie plane analogues aux trois systèmes mentionnés ci-dessus et qui sont respectivement : la géométrie elliptique, la géométrie parabolique et la géométrie hyperbolique.

Ce qui précède s'applique seulement à l hyperespace à deux dimensions. La question de savoir s'il n'y a pas plusieurs sortes d'hyperespace à trois ou plus de trois dimensions, se présente alors naturellement ici. Riemann a montré qu'il existe trois sortes d'hyperespace à trois dimensions ayant des propriétés analogues à celles des trois sortes d'hyperespace à deux dimensions déjà étudiées. Ces espaces se distinguent les uns des autres par ce fait que, par un point donné on ne peut mener aucune surface géodésique parallèle à une surface donnée, ou qu'on en peut faire passer une seule, ou encore qu'on en peut mener un faisceau ; une surface géodésique étant telle que toute ligne géodésique joignant deux de ses points est tout entière sur la surface.

* **Beltrami.** — *Eugène Beltrami* naquit à Crémone le 16 novembre 1835 et mourut à Rome le 18 février 1900. Divers travaux lui valurent d'être nommé en 1862, professeur d'algèbre et de géométrie analytique à l'université de Bologne. C'est à Rome qu'il acheva sa carrière, membre de la plupart des académies savantes et comblé d'honneurs.

L'ouvrage qui le mit en vue est ses *Recherches sur les applica-*

tions de l'analyse à la géométrie. Dans son mémoire classique *sur l'interprétation de la géométrie non-euclidienne*, il arriva à cette conclusion si importante : que les théorèmes de la géométrie non Euclidienne trouvaient leur réalisation sur les surfaces à courbure constante négative. A propos de l'étude qu'il fit des surfaces à courbure constante positive, il démontra que l'espace à courbure constante positive est contenu dans l'espace à courbure constante négative.

M. Hilbert, il est vrai, dans un mémoire postérieur, *Ueber Flächen von Konstanter Gausscher Krummung* a démontré qu'il n'existe pas de surfaces à courbures constantes négatives absolument régulières, ce qui limite singulièrement l'interprétation de la géométrie non-Euclidienne imaginée par Beltrami.

Beltrami publia aussi plusieurs mémoires sur diverses questions de physique mathématique.

Comme plusieurs mathématiciens, il était musicien distingué *.

Mécanique. — Nous terminerons ce chapitre par quelques notes, plus ou moins décousues, sur les branches des mathématiques d'un caractère moins abstrait, qui traitent les problèmes se présentant dans la nature. Nous commencerons par la mécanique, qui peut être étudiée graphiquement ou analytiquement.

Méthodes graphiques. — Dans la science graphique, on a établi des règles pour résoudre les divers problèmes au moyen d'épures : les procédés utilisés sont étudiés dans la géométrie projective et le sujet est étroitement lié à la géométrie moderne. Cette façon d'aborder les questions, mise en œuvre déjà par Newton [1], a été jusqu'ici appliquée principalement à des problèmes concernant la mécanique, l'élasticité et l'électricité. Elle est particulièrement utile dans l'art de l'ingénieur et, dans cette partie, un bon dessinateur doit être capable d'obtenir approximativement les solutions de la plupart des équations, différentielles ou autres, qu'il pourrait vraisemblablement rencontrer, cela sans faire des erreurs dépassant celles qui proviennent de notre connaissance imparfaite de la structure des matériaux employés.

On peut dire que cette théorie a pris naissance avec les travaux

[1] Cf. pp. 22-23 de ce volume.

de Poncelet, mais nous pensons que c'est seulement au cours de ces vingt dernières années que des exposés systématiques du sujet ont été publiés. Parmi les traités les mieux connus nous pouvons citer : la *Graphische Statik*, par *C. Culmann*, Zurich, 1875, récemment éditée par W. Ritter ; les *Lezioni di Statica grafica*, par *A. Favaro*, Padoue, 1877 (une traduction française annotée par P. Terrier, a été publiée en deux volumes, 1879–1885) ; le *Calcolo grafico* par *L. Cremona*, Milan, 1879 (une traduction anglaise par T. H. Beare, a été publiée à Oxford, en 1889), qui est fondé en grande partie sur l'ouvrage de Mobius ; *la statique graphique*, par *M. Lévy*, Paris, 4 volumes, 1886-1888 (¹) ; *la statica graphica*, par *C. Sairotti*, Milan, 1888 ; * *la Nomographie* par *M. d'Ocagne*, Paris *.

La note suivante, résumant le travail de Culmann, donnera une idée suffisante du caractère général de ces ouvrages. Culmann commence par la description des procédés donnant la représentation géométrique des quatre opérations fondamentales : addition, soustraction, multiplication et division ; il passe ensuite à l'extraction des racines et à l'élévation aux puissances, cette dernière opération étant effectuée au moyen de la spirale logarithmique. Il montre alors comment des quantités, telles que les volumes, les moments et les moments d'inertie, peuvent être représentées par des lignes droites ; il en déduit les règles pour combiner les forces, les couples, etc. Puis il explique la construction et l'usage de l'ellipsoïde d'inertie, et de ses éléments. Le reste de l'ouvrage, c'est-à-dire sa majeure partie, montre comment les tracés géométriques, faits d'après les principes exposés, donnent les solutions de nombreux problèmes pratiques relatifs aux cintres, ponts, charpentes, à la pression des terres sur les murs et sur les voûtes, etc.

Le sujet a été traité durant ces vingt dernières années par de nombreux mathématiciens surtout en Italie et en Allemagne, et a été appliqué à un grand nombre de questions. Mais comme nous avons déclaré au commencement de ce chapitre que nous éviterions, autant que possible, de discuter les ouvrages des auteurs vivants, nous n'en dirons pas plus long sur ce sujet.

* **Poinsot.** — *Louis Poinsot* naquit en 1777 à Clermont-en-Beauvaisis, où son père était épicier, et mourut à Paris en 1859.

(¹) * Une 3ᵐᵉ édition est en cours de publication *.

Elève au collège Louis-le-Grand, il fut reçu en 1795 à l'Ecole polytechnique, passa de là à l'Ecole des Ponts et Chaussées et débuta dans l'enseignement comme professeur dans un lycée de Paris.

La théorie des équations l'attira tout d'abord, puis il dirigea ses réflexions sur la mécanique théorique et bientôt ses *Eléments de statique*, publiés en 1803, attirèrent sur lui l'attention des mathématiciens. Le livre sut intéresser l'Académie des Sciences : tout y était nouveau ou présenté de manière nouvelle. Ses mémoires *sur la composition des moments et des aires dans la mécanique, sur la théorie générale de l'équilibre et du mouvement des systèmes, sur la précession des équinoxes*, suivirent de près et lui valurent à 31 ans la situation d'inspecteur général de l'Université.

Peu après il publiait un excellent mémoire sur les polygones et les polyèdres où se trouvaient décrits quatre polyèdres réguliers nouveaux. *Broscius*, en 1652, avait déjà décrit les polygones étoilés de Poinsot, mais ce travail était resté dans l'oubli.

En 1824, lors de l'avènement de Charles X, Poinsot, alors membre de l'Académie des sciences, fut privé de sa charge d'inspecteur général de l'Université. Sa fortune personnelle le rendait indifférent à une telle mésaventure. Bien plus, il n'en eut que plus de temps à consacrer à l'étude et c'est alors qu'il élabora d'importants travaux concernant la dynamique des corps solides, parmi lesquels la *Théorie nouvelle de la rotation des corps*, que les recherches de d'Alembert, Euler et Lagrange semblaient avoir épuisée, et *la théorie des cônes circulaires roulants*, travaux qui sont restés classiques *.

Clifford (1). — Nous pouvons ajouter ici une courte note sur Clifford qui fut l'un des premiers mathématiciens anglais de la dernière moitié du siècle à préconiser, de préférence à l'analyse, l'usage des méthodes graphiques et géométriques. *William Kingdon Clifford*, né à Exeter, le 4 mai 1845, et mort à Madère, le 3 mars 1879, fit ses études au Collège de la Trinité, Cambridge, et en fut un des membres. En 1871, il fut nommé professeur de mathématiques appliquées au Collège de l'Université, à Londres, et

(1) Pour de plus amples détails sur la vie de Clifford et ses travaux voir les autorités citées dans l'article qui lui est consacré dans le *Dictionary of National Biography*, vol. XI.

occupa ce poste jusqu'à sa mort. Son remarquable talent dans le choix de ses exemples et sa faculté à saisir les analogies firent de lui un des plus brillants interprètes des principes mathématiques. Il tomba malade en 1876, et l'auteur de ce livre entreprit de le remplacer dans ses cours pendant quelques mois; Clifford se rendit alors en Algérie d'où il revint à la fin de l'année, mais il eut une rechute en 1878. Ses plus importants ouvrages sont : sa *Theory of Biquaternions, on the classification of Loci* (inachevé) et *The theory of Graphs* (inachevé). Sa *Canonical Dissection of a Riemaun's surface*, et les *Elements of Dynamics* contiennent également beaucoup de choses intéressantes.

Mécanique analytique. — Revenons maintenant à la mécanique envisagée au point de vue analytique. On peut dire que toutes les connaissances des grands mathématiciens du XVIII[e] siècle, relatives à la mécanique mathématique des solides, ont été résumées dans l'admirable *Mécanique analytique* de Lagrange, dans le *Traité de mécanique* de Poisson,* et surtout dans le *Traité de Mécanique* de M. P. Appell *, et que l'application à l'astronomie des résultats obtenus forme le sujet de la *Mécanique céleste* de Laplace et de l'ouvrage analogue de Tisserand.

Nous avons déjà parlé de ces ouvrages. * La mécanique des systèmes à frottements a reçu de M. Painlevé des développements importants ; elle montre la complication de la dynamique des solides naturels. Quant à la mécanique des fluides, qui présente plus de difficultés encore que celle des solides, la théorie en est encore à peine ébauchée avec les travaux de MM. Boussinesq, Boulanger, Masoni, Lallin, Maillet, Allievi, Joukowsky, Guyon, Helmholtz, Brillouin, Poincaré, Duhem.

Un long chapitre serait à écrire sur la Mécanique analytique. Nous n'avons pas cru devoir le faire, de crainte que l'édition française de l'ouvrage de M. Rouse-Ball n'en fût surchargée. Le même motif nous a empêché de compléter comme il aurait convenu le trop court aperçu qu'il donne de l'Astronomie théorique moderne et de la Physique mathématique * .

La statique théorique, spécialement la théorie du *potentiel* et de *l'attraction*, a attiré d'une façon très marquée l'attention des mathématiciens du siècle dernier.

Nous avons déjà dit que l'idée de potentiel est due à Lagrange et qu'elle apparaît dans un mémoire remontant à 1773. L'idée fut aussitôt saisie par Laplace qui l'introduisit franchement dans son mémoire de 1784 ; on lui en attribua parfois, bien qu'un peu injustement, le mérite de l'invention.

Nous avons parlé des travaux de *Gauss* sur la question de l'attraction. La théorie des surfaces de niveau et des lignes de force est surtout due à *Chasles* qui détermina également l'attraction d'un ellipsoïde sur un point extérieur quelconque. Rappelons également ici le *Barycentrisches calcul*, publié en 1826, de *A.-F. Möbius* (1) (1790-1868), l'un des élèves les plus connus de Gauss.

Green (2). — *George Green* fut l'un des premiers géomètres de ce siècle qui fit avancer l'étude des propriétés du potentiel. Né près de Nottingham, en 1793, dans une humble condition, il mourut à Cambridge, en 1841. Il s'instruisit lui-même en étudiant dans quelques livres de mathématiques qu'il avait réussi à se procurer. En 1827, il écrivit une note sur le potentiel, le mot s'y trouve introduit pour la première fois, dans laquelle il en établit les principales propriétés, et applique les résultats aux théories de l'électricité et du magnétisme. On y rencontre l'important théorème qui porte aujourd'hui son nom. Ce remarquable mémoire, lu par quelques voisins, qui surent en apprécier tout le mérite, fut publié par souscription en 1828, mais ne paraît pas avoir tout d'abord attiré beaucoup l'attention. Des résultats semblables furent établis indépendamment, en 1839, par Gauss à qui on en doit la vulgarisation.

En 1832 et 1833, Green présenta à la Société de physique de Cambridge, des mémoires sur l'équilibre des fluides et la théorie des attractions dans l'espace à n dimensions ; dans la dernière de ces années, sa note sur le mouvement d'un fluide sous l'influence des vibrations d'un ellipsoïde solide, fut lue devant la Société royale d'Edinbourg. En 1833, il entra au collège Caïus, à Cambridge, et

(1) La collection de ses œuvres a été publiée, à Leipzig, en quatre volumes, 1885 7.

(2) Une édition des œuvres complètes de Green a été publiée à Cambridge, en 1871, et a été réimprimée à Paris, A. Hermann, 1903.

en devint, plus tard, membre agrégé. Il se lança alors dans des recherches nouvelles et produisit, en 1837, ses notes sur le mouvement des ondes dans un canal, et sur la réflexion et la réfraction du son et de la lumière. Dans la dernière, il déduit au moyen du principe de l'énergie, les lois géométriques de la propagation du son et de la lumière à la théorie des ondulations, il explique le phénomène de la réflexion totale et certaines propriétés d'un milieu vibrant. Il étudia également la propagation de la lumière dans un milieu cristallin quelconque.

La *Dynamique théorique*, que Jacobi avait mise sous sa forme moderne, a été étudiée par la plupart des auteurs mentionnés ci-dessus. Nous pouvons également répéter ici que le principe de la « moindre action », fut étudié par Sir William Hamilton en 1827, et que les « équations d'Hamilton » furent données en 1835. Nous signalerons encore les recherches dynamiques de J. Bour et de J. Bertrand. L'usage des coordonnées généralisées, introduites par Lagrange, est devenu maintenant d'un emploi courant dans les questions de dynamique, de même que dans beaucoup de problèmes relatifs à la physique.

Comme classiques usuels, nous pouvons indiquer les ouvrages de E.-J. Routh, de Cambridge, * ceux de M. P. Appell, de Paris *, sur la dynamique moléculaire et les corps rigides ; les *Leçons sur l'intégration des équations différentielles de la mécanique*, par Painlevé, Paris, 1895, et l'*Intégration des équations de la mécanique*, par J. Graindorge, Bruxelles, 1889. Nous pouvons également faire allusion ici au traité de *Philosophie naturelle*, de sir William Thomson, aujourd'hui lord Kelvin, et P.-G. Tait.

Nous passerons sous silence la mécanique des fluides, liquides et gaz, considérée indépendamment des théories physiques sur lesquelles elle repose ; nous nous référerons simplement aux mémoires de Green, sir George Stokes, lord Kelvin, mieux connu sous le nom de sir William Thomson, et von Helmholtz. La théorie attrayante, mais difficile des tourbillons est due aux écrivains cités en dernier lieu. Un des problèmes relatifs à cette théorie a été également envisagé par J.-J. Thomson. La question de la propagation du son peut être traitée comme une conséquence des principes de l'hydrodynamique, mais sur ce point, nous renvoyons le lecteur désireux

d'avoir de plus amples renseignements à l'ouvrage publié en 1877, à Cambridge, par lord Rayleigh.

L'*Astronomie théorique* est comprise dans la *Dynamique théorique*, ou tout au moins, est étroitement liée à cette dernière. Parmi ceux qui, dans ce siècle, se sont consacrés à l'étude de l'astronomie théorique, *Gauss* occupe un des premiers rangs ; nous avons déjà parlé de ses travaux.

Bessel (1). — Des contemporains de Gauss, le plus connu est *Friedrich-Wilhelm Bessel*, qui naquit à Minden, le 22 juillet 1784, et mourut à Kœnigsberg, le 17 mars 1846. Bessel débuta comme employé dans une maison de commerce, mais, en 1806, il fut pris comme aide à l'Observatoire de Lilienthal. De là, il fut appelé à la direction du nouvel Observatoire prussien de Kœnigsberg, où il résida jusqu'à sa mort. Bessel a introduit, en mathématiques pures, les fonctions qui portent aujourd'hui son nom ; le fait date de 1824, bien que l'usage de ces fonctions soit indiqué dans un mémoire antérieur de sept ans. Mais ses travaux les plus remarquables consistent dans la réduction (donnée dans ses *Fundamenta Astronomiæ*, Kœnisberg, 1818), des observations de 3 222 étoiles faites à Greenwich par Bradley, et sa détermination de la parallaxe annuelle de l'étoile 61 du Cygne. Les observations de Bradley ont été, de nouveau, récemment réduites par A. Auwers, de Berlin.

Leverrier (2). — L'un des événements astronomiques les plus marquants de ce siècle a été la découverte de la planète Neptune par Leverrier et Adams. *Urbain-Jean-Joseph Leverrier*, fils d'un petit employé de Normandie, naquit à Saint-Lô, le 11 mars 1811, et mourut à Paris, le 23 septembre 1877. Elève de l'Ecole polytechnique, il y fut nommé professeur d'astronomie en 1837. Dans ses premières recherches astronomiques, communiquées à l'Acadé-

(1) Voir l'ouvrage *History of Astronomy*, par A.-M. Clerk, Edinbourg, 1887, pp. 36-53. La collection des œuvres de Bessel avec sa correspondance a été éditée par R. Engelmann et publiée en quatre volumes à Leipzig, 1875-82.

(2) Pour de plus longs détails sur sa vie voir l'*Eloge*, de Bertrand, insérée dans le vol. XLI des *Mémoires de l'Académie* ; et pour un exposé de son œuvre, voir l'adresse d'Adams dans le vol. XXXVI des *Monthly Notices* de la Société astronomique royale.

[illegible] plait avec une approximation beau-
[illegible] étendue des variations des incli-
[illegible] orbites planétaires. La découverte
[illegible] par Leverrier et Adams, de la
[illegible] s perturbations que sa présence
[illegible] us, attira l'attention générale sur
[illegible] ua à augmenter la confiance des
[illegible] gravitation universelle. En 1855,
[illegible] me directeur de l'Observatoire de
[illegible] ment aux exigences de l'astronomie
[illegible] rs la tâche de discuter les recher-
[illegible] ouvements des planètes et de revi-
[illegible] et usage. Il vécut juste assez pour
[illegible] travail.

[illegible] ais à qui revient la gloire d'avoir
[illegible] Leverrier, la planète Neptune, est
[illegible] ans le Cornwall, le 5 juin 1819, fit
[illegible] n, à Cambridge, fut nommé plus
[illegible] owndeau, à cette Université, puis
[illegible] enfin mourut à Cambridge, le
[illegible]

[illegible] rticulièrement trois problèmes im-
[illegible] à la découverte de la planète Nep-
[illegible] erturbations que sa présence pro-
[illegible] la découverte d'Adams est très peu
[illegible] mais son travail ne fut pas publié
[illegible] partient sans conteste à Leverrier,
[illegible] son travail.
[illegible] e 1855 sur l'accélération séculaire
[illegible] Lune. Laplace l'avait calculée en
[illegible] était causée par l'excentricité de
[illegible] tenu un résultat concordant, en
[illegible] duite de la comparaison des do-
[illegible] anciennes et modernes. Adams
[illegible] aient été négligés, et que si on en

[illegible] Adams, avec une biographie, a paru en

tenait compte, le résultat ne serait que la moitié, environ, de celui trouvé par Laplace. Plana, Pontécoulant et d'autres astronomes du Continent, nièrent l'exactitude des calculs d'Adams, mais son travail fut vérifié et reconnu exact par Delaunay en France et Cayley en Angleterre.

La troisième question liée au nom d'Adams, est sa détermination, en 1867, de l'orbite des Léonides ou étoiles filantes qui furent particulièrement visibles en novembre 1865, et dont la période est d'environ trente-trois ans. H. A. Newton et Yale (1830-1896) avaient montré qu'il n'y avait que cinq orbites possibles, Adams calcula la perturbation que produiraient les planètes sur le mouvement du nœud de l'orbite d'un essaim de météores dans chacun des cas, et trouva que ses résultats concordaient avec l'observation pour une seule des orbites possibles et qu'il y avait désaccord pour les autres. Comme conclusion l'orbite était déterminée.

* **Tisserand.** — *Félix Tisserand* naquit le 11 janvier 1845 à Nuits-Saint-Georges, en Bourgogne, et mourut à Paris en 1899. Son père était tonnelier. Elève à l'Ecole normale, il entra bientôt à l'Observatoire de Paris et s'adonna dès lors entièrement à l'étude de l'Astronomie. En 1868, il alla observer à Malacca l'éclipse totale de soleil, puis fut nommé peu après directeur de l'Observatoire de Toulouse, où il eut comme élèves MM. Bigourdan et Perrotin. Après la mort de Leverrier, Tisserand entra à l'Académie des sciences, obtint en Sorbonne la chaire de mécanique céleste et fut appelé à la direction de l'Observatoire de Paris. Il y résolut, à l'aide de formules de Jacobi, un difficile problème concernant les comètes, et y écrivit son célèbre *Traité de mécanique céleste*, qui est son œuvre capitale. *

Les autres astronomes bien connus de ce siècle sont *G. A. A. Plana* (1781-1894), dont le travail sur le mouvement de la lune a été publié en 1832 ; le comte *P. G. D. Pontécoulant* (1795-1871); *C. E. Delaunay* (1816-1872), dont les travaux sur la théorie de la lune tracent la meilleure méthode qui ait été encore indiquée pour les recherches analytiques concernant le problème dans son en-

semble et dont les Tables lunaires, incomplètes, figurent parmi les belles œuvres astronomiques du siècle; *P. A. Hansen* [1] (1795–1874), directeur de l'Observatoire de Gotha, qui calcula les tables de la Lune publiées à Londres en 1857, tables qui sont encore employées pour la préparation du Nautical Almanac, et qui établit les méthodes employées pour la détermination des perturbations lunaires et planétaires.

Parmi les astronomes vivants, nous pouvons citer : *G. W. Hill* qui figurait encore tout récemment dans le personnel de l'*American Ephemeris* et qui, en 1884, détermina les inégalités du mouvement de la lune dues à la non-sphéricité de la terre, recherche qui complétait la théorie de la lune de Delaunay [2]. Hill s'est également occupé du mouvement séculaire du périgée de la lune et du périgée des planètes sous certaines conditions, et a écrit sur la théorie analytique du mouvement de Jupiter et de Saturne, en vue de la préparation de tables donnant leurs positions à un instant quelconque donné. *Simon Newcomb*, directeur de l'*American Ephemeris*, reprit les observations faites depuis les premières années à Greenwich, appliqua les résultats à la théorie de la Lune et revisa les tables d'Hansen. *G. H. Darwin* de Cambridge, a étudié l'effet des marées sur les sphéroïdes visqueux, l'effet du frottement des marées sur les orbites planétaires, la mécanique des essaims météoriques, etc.. *H. Poincaré* de Paris, qui a discuté le difficile problème des trois corps et la forme prise par une masse fluide sous l'influence de sa propre attraction. Le traité sur la théorie de la lune de *E. W. Brown*, Cambridge, 1896, et un rapport (inséré dans le *Report of the British Association*, Londres, 1899, vol. LXIX, pp. 111-159) par *E. T. Whittaker* sur la solution du problème des trois corps, contiennent des exposés importants sur les progrès récents des théories lunaires et planétaires.

Dans la dernière moitié du siècle, les résultats de l'analyse spectrale ont été appliqués à la détermination de la constitution des corps célestes et de leurs mouvements dans la direction du rayon les joignant à la Terre. L'histoire des débuts de l'analyse spectrale

(1) Pour une exposition de ses nombreux mémoires voir les *Transactions of the Royal Society of London*, pour 1876-77.

(2) Pour le développement récent de la Théorie lunaire, voir les *Transactions of the British Association*, vol. LXV, Londres, 1895, p. 614.

sera toujours associée aux noms de *G. R. Kirchoff* (1824-1887) de Berlin, de *A. J. Angström* (1814-1874) d'Upsal, et de *sir George G. Stokes* de Cambridge. mais elle appartient à l'optique plutôt qu'à l'astronomie. Pour montrer combien était inattendue cette application à l'astronomie, rappelons ce fait que A. Comte, discutant en 1842 l'étude de la nature, regrettait le temps que quelques astronomes perdaient à observer les étoiles fixes, puisque, disait-il, on ne pouvait rien apprendre par elles ; et réellement, aurait-on pu croire, il y a un siècle, qu'il serait possible d'étudier la constitution chimique de ces corps ?

Durant ces dernières années, l'art de la photographie a permis d'étendre encore plus loin le champ des observations astronomiques.

Physique mathématique. — Notre exposition de l'histoire des mathématiques et des autres sciences dans ce siècle, ne serait certainement pas complète, si nous ne faisions allusion aux applications des mathématiques aux nombreux problèmes concernant la chaleur, l'élasticité, la lumière, l'électricité, et tant d'autres sujets se rattachant à la physique. L'histoire de la physique mathématique est d'ailleurs si vaste que nous ne pourrions prétendre l'exposer, lors même qu'elle serait de nature à figurer dans une histoire des mathématiques. Quoi qu'il en soit, nous la considérons comme dépassant les limites que nous nous sommes tracées dans ce chapitre. C'est à regret cependant que nous abandonnons ce sujet parce que l'Ecole de Cambridge a largement contribué à son développement ; à l'appui de ce que nous avançons, et pour ne donner seulement que deux ou trois exemples, citons les noms de sir George G. Stokes, professeur depuis 1848, Lord Kelvin (sir William Thomson), J. Clerk Maxwell, 1831-1879, professeur de 1871 à 1879, Lord Rayleigh, professeur de 1879 à 1884, et J.-J. Thomson, professeur depuis 1884. Il est toutefois intéressant de noter que le progrès de nos connaissances en physique est en grande partie dû à l'application des mathématiques et qu'il devient de plus en plus difficile à l'expérimentateur de laisser une trace dans l'histoire de la science, s'il n'est en même temps mathématicien.

* Comme nous l'avons dit à propos de la Mécanique Analytique,

nous bornons nos additions aux Mathématiques pures, de crainte de défigurer l'ouvrage de M. Rouse-Ball.

Nous ne saurions nous empêcher de dire ici, cependant, que des hommes comme Cauchy, comme Fourier, ont joué un rôle aussi considérable dans la Physique mathématique que dans l'Analyse pure : nous l'avons vu précédemment.

Et de même, les Mathématiques pures ont joué un rôle important dans les travaux des grands physiciens modernes qu'ont été Green, Stockes, Kirchhoff, Helmholtz, Riemann, Beltrami, Poincaré, Christoffel, Hugoniot, Bjœrknes, Dini, Betti, Carl et Frantz Neumann, F. Klein, Boussinesq, Gibbs, Duhem, Brillouin, Lord Kelvin. *

ÉTUDE
SUR LE DÉVELOPPEMENT
DES
MÉTHODES GÉOMÉTRIQUES

Lue le 24 septembre 1904, au Congrès des Sciences et des Arts à Saint-Louis

PAR

Gaston DARBOUX

I

([1]) Pour bien se rendre compte des progrès que la Géométrie a faits au cours du siècle qui vient de finir, il importe de jeter un coup d'œil rapide sur l'état des Sciences mathématiques au commencement du XIX[e] siècle. On sait que, dans la dernière période de sa vie, Lagrange, fatigué des recherches d'Analyse et de Mécanique, qui lui assurent pourtant une gloire immortelle, avait négligé les Mathématiques pour la Chimie qui, d'après lui, devenait facile comme l'Algèbre, pour la Physique, pour les spéculations philosophiques. Cet état d'esprit de Lagrange, nous le retrouvons presque toujours à certains moments de la vie des plus grands savants. Les idées nouvelles qui leur sont apparues dans la période féconde de la jeunesse et qu'ils ont introduites dans le domaine commun leur ont donné tout ce qu'ils pouvaient en attendre; ils ont rempli leur tâche et éprouvent le besoin de tourner vers des sujets tout nouveaux l'activité de leur esprit. Ce besoin, il faut le reconnaître, devait se manifester avec une force toute particulière à l'époque de Lagrange. A ce moment, en effet, le programme des recherches ouvertes aux géomètres par la découverte du Calcul in-

([1]) Bien que M. de Montessus ait déjà fait quelques emprunts à cette étude, nous croyons devoir la reproduire intégralement, à cause de la grande lumière qu'elle projette sur le développement de la géométrie depuis un siècle.
NOTE DE L'EDITEUR.

finitésimal paraissait bien près d'être épuisé. Des équations différentielles plus ou moins compliquées à intégrer, quelques chapitres à ajouter au Calcul intégral, et il semblait qu'on allait toucher aux bornes mêmes de la Science. Laplace achevait l'explication du système du monde et jetait les bases de la Physique moléculaire. Des voies nouvelles s'ouvraient pour les sciences expérimentales et préparaient l'étonnant développement qu'elles ont reçu au cours du siècle qui vient de finir. Ampère, Poisson, Fourier et Cauchy lui-même, le créateur de la théorie des imaginaires, se préoccupaient avant tout d'étudier l'application des méthodes analytiques à la Mécanique, à la Physique moléculaire et semblaient croire qu'en dehors de ce nouveau domaine, qu'ils avaient hâte de parcourir, les cadres de la Théorie et de la Science étaient définitivement fixés.

La Géométrie moderne, c'est un titre que nous devons revendiquer pour elle, est venue, dès la fin du XVIIIe siècle, contribuer dans une large mesure au renouvellement de la Science mathématique tout entière, en offrant aux recherches une voie nouvelle et féconde, et surtout en nous montrant, par des succès éclatants, que les méthodes générales ne sont pas toutes dans la Science et que, même dans le sujet le plus simple, il y a beaucoup à faire pour un esprit ingénieux et inventif. Les belles démonstrations géométriques de Huyghens, de Newton et de Clairaut étaient oubliées ou négligées. Les idées géniales introduites par Desargues et Pascal étaient restées sans développement et paraissaient être tombées sur un sol stérile. Carnot, par l'*Essai sur les transversales* et la *Géométrie de position*, Monge surtout, par la création de la Géométrie descriptive et par ses belles théories sur la génération des surfaces, sont venus renouer une chaîne qui paraissait brisée. Grâce à eux, les conceptions des inventeurs de la Géométrie analytique, Descartes et Fermat, ont repris auprès du Calcul infinitésimal de Leibniz et de Newton la place qu'on leur avait laissé perdre et qu'elles n'auraient jamais dû cesser d'occuper. Avec sa Géométrie, disait Lagrange en parlant de Monge, ce diable d'homme se rendra immortel. Et, en effet, non seulement la Géométrie descriptive a permis de coordonner et de perfectionner les procédés employés dans tous les arts, « où la précision de la forme est une condition de succès et d'excellence pour le travail et ses pro-

duits » ; mais elle est apparue comme la traduction graphique d'une Géométrie générale et purement rationnelle, dont de nombreuses et importantes recherches ont démontré l'heureuse fécondité. A côté de la *Géométrie descriptive* nous ne devons pas d'ailleurs oublier de placer cet autre chef-d'œuvre qui a nom l'*Application de l'analyse à la Géométrie;* nous ne devons pas oublier non plus que c'est à Monge que sont dues la notion des lignes de courbure et l'élégante intégration de l'équation différentielle de ces lignes pour le cas de l'ellipsoïde, que Lagrange, dit-on, lui enviait. Il faut insister sur ce caractère de l'ensemble de l'Œuvre de Monge. Le rénovateur de la Géométrie moderne nous a montré, dès le début, ses successeurs l'ont peut-être oublié, que l'alliance de la Géométrie et de l'Analyse est utile et féconde, que cette alliance est peut-être une condition de succès pour l'une et pour l'autre.

II

A l'école de Monge se formèrent de nombreux géomètres : Hachette, Brianchon, Chappuis, Binet, Lancret, Dupin, Malus, Gaultier de Tours, Poncelet, Chasles, etc. Parmi eux, Poncelet se place au premier rang. Négligeant tout ce qui, dans les travaux de Monge, se rattache à l'Analyse de Descartes ou concerne la Géométrie infinitésimale, il s'attacha exclusivement à développer les germes contenus dans les recherches purement géométriques de son illustre devancier. Fait prisonnier par les Russes en 1813 au passage du Dnieper et interné à Saratoff, Poncelet employa les loisirs que lui laissait sa captivité à la démonstration des principes qu'il a développés dans le *Traité des propriétés projectives des figures*, paru en 1822, et dans les grands Mémoires sur les polaires réciproques et sur les moyennes harmoniques, qui remontent à peu près à la même époque. C'est donc à Saratoff qu'est née, on peut le dire, la Géométrie moderne. Renouant la chaîne interrompue depuis Pascal et Desargues, Poncelet introduisit à la fois l'homologie et les polaires réciproques, mettant ainsi en évidence, dès le début, les idées fécondes sur lesquelles la Science a évolué pendant 50 ans.

Présentées en opposition avec la Géométrie analytique, les méthodes de Poncelet ne furent pas favorablement accueillies par les

analystes français. Mais telles étaient leur importance et leur nouveauté qu'elles ne tardèrent pas à susciter, de divers côtés, les recherches les plus approfondies. Poncelet avait été seul à découvrir les principes ; plusieurs géomètres, au contraire, apparurent presque en même temps pour les étudier sur toutes leurs faces et pour en déduire les résultats essentiels qui y étaient implicitement contenus.

A cette époque, Gergonne dirigeait avec éclat un Recueil périodique qui a aujourd'hui pour l'histoire de la Géométrie un prix inestimable. Les *Annales de Mathématiques*, publiées à Nîmes de 1810 à 1831, ont été pendant plus de quinze ans le seul journal du monde entier exclusivement consacré aux recherches de mathématiques. Gergonne, qui nous a laissé à bien des égards un excellent modèle du directeur de journaux scientifiques, avait les défauts de ses qualités ; il collaborait, souvent contre leur gré, avec les auteurs des Mémoires qui lui étaient envoyés, remaniait leur rédaction et leur faisait dire quelquefois plus ou moins qu'ils n'auraient voulu. Quoi qu'il en soit, il fut vivement frappé de l'originalité et de la portée des découvertes de Poncelet. On connaissait déjà en Géométrie quelques méthodes simples de transformation des figures ; on avait même employé l'homologie dans le plan, mais sans l'étendre à l'espace, comme le fit Poncelet, ni surtout sans en connaître la puissance et la fécondité. D'ailleurs toutes ces transformations étaient *ponctuelles*, c'est-à-dire qu'elles faisaient correspondre un point à un point. En introduisant les polaires réciproques, Poncelet faisait au plus haut degré œuvre d'inventeur ; car il donnait le premier exemple d'une transformation dans laquelle à un point corrrespondait autre chose qu'un point. Toute méthode de transformation permet de multiplier le nombre de théorèmes, mais celle des polaires réciproques avait l'avantage de faire correspondre à une proposition une autre proposition d'aspect tout différent. Il y avait là un fait essentiellement nouveau. Pour le mettre en évidence, Gergonne inventa le système, qui depuis a eu tant de succès, des Mémoires écrits sur doubles colonnes, avec les propositions corrélatives en regard ; et il eut l'idée de substituer aux démonstrations de Poncelet, qui exigeaient l'intermédiaire d'une courbe ou d'une surface du second ordre, le fameux *principe de dualité*, dont la signification, un peu vague

d'abord, fut suffisamment éclaircie par les discussions qui s'établirent à ce sujet entre Gergonne, Poncelet et Plücker.

Bobillier, Chasles, Steiner, Lamé, Sturm et bien d'autres que j'oublie étaient, en même temps que Plücker et Poncelet, les collaborateurs assidus des *Annales de Mathématiques*. Gergonne, devenu recteur de l'Académie de Montpellier, dut interrompre, en 1831, la publication de son journal. Mais le succès qu'il avait obtenu, le goût des recherches qu'il avait contribué à développer avaient commencé à porter leur fruit. Quételet venait de créer en Belgique la *Correspondance mathématique et physique*. Crelle, dès 1826, faisait paraître à Berlin les premières feuilles de son célèbre journal, où il publiait les Mémoires d'Abel, de Jacobi, de Steiner. Un grand nombre d'Ouvrages séparés allaient aussi paraître, où les principes de la Géométrie moderne devaient être magistralement exposés et développés.

C'est d'abord en 1827 le *Calcul barycentrique* de Möbius, œuvre vraiment originale, remarquable par la profondeur des conceptions, la netteté et la rigueur de l'exposition; puis en 1828 les *Analytisch-geometrische Entwickelungen* de Plücker dont la seconde partie parut en 1831 et qui furent bientôt suivis du *System der analytischen Geometrie* du même auteur, publié à Berlin en 1835. En 1832, Steiner faisait paraître à Berlin son grand ouvrage : *Systematische Entwickelung der Abhängigkeit der geometrischen Gestalten von einander*, et, l'année suivante, les *Geometrische Constructionen ausgeführt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises*, où se trouvait confirmée par les exemples les plus élégants une proposition de Poncelet relative à l'emploi d'un seul cercle pour les constructions géométriques. Enfin, en 1830, Chasles envoyait à l'Académie de Bruxelles, qui, heureusement inspirée, avait mis au concours une étude des principes de la Géométrie moderne, son célèbre *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en Géométrie*, suivi du *Mémoire sur deux principes généraux de la Science : la dualité et l'homographie*, qui fut publié seulement en 1837.

Le temps nous manquerait pour apprécier dignement ces beaux Ouvrages et pour faire ici la part de chacun d'eux. A quoi d'ailleurs pourrait nous conduire une telle étude, sinon à une vérification nouvelle des lois générales du développement de la Science. Quand

les temps sont mûrs, quand les principes fondamentaux ont été reconnus et énoncés, rien n'arrête la marche des idées ; les mêmes découvertes, ou des découvertes à peu près équivalentes, se produisent à peu près au même instant, et dans les lieux les plus divers. Sans entreprendre une discussion de ce genre qui pourrait d'ailleurs paraître inutile ou devenir irritante, il importe cependant que nous fassions ressortir une différence fondamentale entre les tendances des grands géomètres qui, vers 1830, vinrent donner à la Géométrie un essor inconnu jusque-là.

III

Les uns, comme Chasles et Steiner, qui consacrèrent leur vie entière aux recherches de pure Géométrie, opposèrent ce qu'ils appelaient la *synthèse* à l'*analyse* et, adoptant dans l'ensemble sinon dans le détail les tendances de Poncelet, ils se proposèrent de constituer une doctrine indépendante, rivale de l'analyse de Descartes.

Poncelet n'avait pu se contenter des ressources insuffisantes fournies par la méthode des projections ; pour atteindre les imaginaires, il avait dû imaginer ce fameux *principe de continuité* qui a donné naissance à de si longues discussions entre lui et Cauchy. Convenablement énoncé, ce principe est excellent et peut rendre de grands services. Poncelet lui faisait du tort en se refusant à le présenter comme une simple conséquence de l'Analyse ; et Cauchy, d'autre part, ne voulait pas reconnaître que ses propres objections, applicables sans doute à certaines figures transcendantes, demeuraient sans force dans les applications faites par l'auteur du *Traité des propriétés projectives*. Quelque opinion que l'on se fasse au sujet d'une telle discussion, elle montra du moins de la manière la plus claire que le système géométrique de Poncelet reposait sur une base analytique et nous savons du reste, par la publication malencontreuse des cahiers de Saratoff, que c'est à l'aide de l'analyse de Descartes qu'ont été établis les principes qui servent de base au *Traité des propriétés projectives*.

Moins ancien que Poncelet, qui d'ailleurs abandonna la Géométrie pour la Mécanique où ses travaux ont eu une influence prépondérante, Chasles, pour qui fut créée en 1847 une chaire de

Géométrie supérieure à la Faculté des Sciences de Paris, s'efforça de constituer une doctrine géométrique entièrement indépendante et autonome. Il l'a exposée dans deux ouvrages de haute importance, le Traité de *Géométrie supérieure*, qui date de 1852, et le *Traité des sections coniques*, malheureusement inachevé et dont la première partie seule a paru en 1865.

Dans la préface du premier de ces ouvrages, il indique très nettement les trois points fondamentaux qui permettent à la nouvelle doctrine de participer aux avantages de l'analyse et lui paraissent marquer un progrès dans la culture de la science. Ce sont :

1° L'introduction du principe des signes, qui simplifie à la fois les énoncés et les démonstrations, et donne à l'analyse des transversales de Carnot toute la portée dont elle est susceptible;

2° L'introduction des imaginaires, qui supplée au principe de continuité et fournit des démonstrations aussi générales que celles de la géométrie analytique ;

3° La démonstration simultanée des propositions qui sont corrélatives, c'est-à-dire qui se correspondent en vertu du principe de dualité.

Chasles étudie bien dans son Ouvrage l'homographie et la corrélation ; mais il écarte systématiquement dans son exposition l'emploi des transformations des figures, lesquelles, pense-t-il, ne peuvent suppléer à des démonstrations directes parce qu'elles masquent l'origine et la véritable nature des propriétés obtenues par leur moyen. Il y a du vrai dans ce jugement, mais la marche même de la science nous permet de le trouver trop sévère. S'il arrive souvent que, employées sans discernement, les transformations multiplient inutilement le nombre des théorèmes, il ne faut pas méconnaître qu'elles nous aident souvent aussi à mieux connaître la nature des propositions mêmes auxquelles elles ont été appliquées. N'est-ce pas l'emploi de la projection de Poncelet qui a conduit à la distinction si féconde entre les propriétés projectives et les propriétés métriques, qui nous a fait aussi connaître la haute importance de ce rapport anharmonique, dont la propriété essentielle se trouve déjà dans Pappus, et dont le rôle fondamental n'a commencé à apparaître après quinze siècles que dans les recherches de la géométrie moderne ?

L'introduction du principe des signes n'était pas aussi nouvelle

que le croyait Chasles au moment où il écrivait son *Traité de Géométrie supérieure*. Déjà Möbius, dans son *Calcul Barycentrique*, avait donné suite à un *desideratum* de Carnot, et employé les signes de la manière la plus large et la plus précise, en définissant pour la première fois le signe d'un segment et même celui d'une aire. Il a réussi plus tard à étendre l'usage des signes à des longueurs qui ne sont pas portées sur la même droite et à des angles qui ne sont pas formés autour d'un même point. D'ailleurs Grassmann, dont l'esprit a tant d'analogie avec celui de Möbius, avait dû nécessairement employer le principe des signes dans les définitions qui servent de base à sa méthode si originale d'étude des propriétés de l'étendue.

Le second caractère que Chasles assigne à son système de géométrie, c'est l'emploi des imaginaires. Ici sa méthode était réellement nouvelle et il a su l'illustrer par des exemples de haut intérêt. On admirera toujours les belles théories qu'il nous a laissées sur les surfaces homofocales du second degré, où toutes les propriétés connues et d'autres nouvelles, aussi variées qu'élégantes, dérivent de ce principe général qu'elles sont inscrites dans une même développable circonscrite au cercle de l'infini. Mais Chasles n'a introduit les imaginaires que par leurs fonctions symétriques et n'aurait pu, par conséquent, définir le rapport anharmonique de quatre éléments lorsque ceux-ci cessent d'être réels en tout ou en partie. Si Chasles avait pu établir la notion du rapport anharmonique d'éléments imaginaires, une formule qu'il donne dans la *Géométrie supérieure* (p. 118 de la nouvelle édition) lui aurait immédiatement fourni cette belle définition de l'angle comme logarithme d'un rapport anharmonique qui a permis à Laguerre, notre confrère regretté, de résoudre d'une manière complète le problème, si longtemps cherché, de la transformation des relations qui contiennent à la fois des angles et des segments dans l'homographie et la corrélation.

Comme Chasles, Steiner, le grand et le profond géomètre, a suivi la voie de la géométrie pure ; mais il a négligé de nous donner un exposé complet des méthodes sur lesquelles il s'appuyait. On peut toutefois les caractériser en disant qu'elles reposent sur l'introduction de ces formes géométriques élémentaires, que Désargues avait déjà considérées, sur le développement qu'il a su

donner à la théorie des polaires de Bobillier, et enfin sur la construction des courbes et des surfaces de degrés supérieurs, à l'aide de faisceaux ou de réseaux de courbes ou de surfaces d'ordres moindres. A défaut des recherches récentes, l'Analyse suffirait à montrer que le champ ainsi embrassé a l'étendue même de celui dans lequel nous introduit sans effort l'analyse de Descartes.

IV

Pendant que Chasles, Steiner, et plus tard, comme nous le verrons, v. Staudt, s'attachaient à constituer une doctrine rivale de l'Analyse et dressaient en quelque sorte autel contre autel, Gergonne, Bobillier, Sturm, Plücker surtout, perfectionnaient la géométrie de Descartes et constituaient un système analytique en quelque sorte adéquat aux découvertes des géomètres. C'est à Bobillier et à Plücker que nous devons la méthode dite *des notations abrégées*. Bobillier lui a consacré quelques pages vraiment neuves dans les derniers volumes des *Annales* de Gergonne. Plücker a commencé à la développer dans son premier Ouvrage, bientôt suivi d'une série de travaux où sont établies d'une manière pleinement consciente les bases de la géométrie analytique moderne. C'est à lui que nous devons les coordonnées tangentielles, les coordonnées trilinéaires, employées avec des équations homogènes, et enfin l'emploi des formes canoniques dont la validité se reconnaît par la méthode, si trompeuse quelquefois mais si féconde, dite de l'*énumération des constantes*. Toutes ces heureuses acquisitions allaient infuser un sang nouveau à l'analyse de Descartes et la mettre en mesure de donner leur pleine signification aux conceptions dont la géométrie dite *synthétique* n'avait pu se rendre complètement maîtresse. Plücker, auquel il est sans doute équitable d'adjoindre Bobillier, enlevé par une mort prématurée, doit être regardé comme le véritable initiateur de ces méthodes de l'Analyse moderne où l'emploi des coordonnées homogènes permet de traiter simultanément, et sans que le lecteur s'en aperçoive [pour ainsi dire, en même temps qu'une figure, toutes celles qui s'en déduisent par l'homographie et la corrélation.

V

A partir de ce moment s'ouvre une période brillante pour les recherches géométriques de toute nature. Les analystes interprètent tous leurs résultats et se préoccupent de les traduire par des constructions. Les géomètres s'attachent à découvrir dans chaque question quelque principe général, le plus souvent indémontrable sans le secours de l'analyse, pour en faire découler sans effort une foule de conséquences particulières, solidement reliées les unes aux autres et au principe d'où elles dérivent. Otto Hesse, brillant disciple de Jacobi, développe d'une manière admirable cette méthode des homogènes à laquelle Plücker peut-être n'avait pas su donner toute sa valeur. Boole découvre dans les polaires de Bobillier la première notion du covariant ; la théorie des formes se crée par les travaux de Cayley, de Sylvester, d'Hermite, de Brioschi. Plus tard, Aronhold, Clebsch et Gordan et d'autres géomètres encore vivants lui fournissent ses notations définitives, établissent le théorème fondamental relatif à la limitation du nombre des formes covariantes et achèvent ainsi de lui donner toute son ampleur.

La théorie des surfaces du second ordre, édifiée principalement par l'école de Monge, s'enrichit d'une foule de propriétés élégantes, établies principalement par O. Hesse, qui doit trouver plus tard en Paul Serret un digne émule et un continuateur.

Les propriétés des polaires des courbes algébriques sont développées par Plücker et surtout par Steiner. L'étude déjà ancienne des courbes du troisième ordre est rajeunie et enrichie d'une foule d'éléments nouveaux. Steiner, le premier, étudie par la Géométrie pure les tangentes doubles des courbes du quatrième ordre, et Hesse, après lui, applique les méthodes de l'algèbre à cette belle question, ainsi qu'à celle des points d'inflexion du troisième ordre.

La notion de *classe* introduite par Gergonne, l'étude d'un paradoxe en partie élucidé par Poncelet et relatif aux degrés respectifs de deux courbes polaires réciproques l'une de l'autre, donnent naissance aux recherches de Plücker relatives aux singularités dites *ordinaires* des courbes planes algébriques. Les célèbres formules auxquelles Plücker est ainsi conduit sont plus tard étendues par Cayley et par d'autres géomètres aux courbes algébriques, par

Cayley encore et par Salmon aux surfaces algébriques. Les singularités d'ordre supérieur sont à leur tour abordées par les géomètres ; contrairement à une opinion alors très répandue, Halphen démontre que chacune de ces singularités ne peut être considérée comme équivalente à un certain groupe de singularités ordinaires et ses recherches closent pour un temps cette difficile et importante question.

L'Analyse et la Géométrie, Steiner, Cayley, Salmon Cremona se rencontrent dans l'étude des surfaces du troisième ordre ; et, conformément aux prévisions de Steiner, cette théorie devient aussi simple et aussi facile que celle des surfaces du second ordre.

Les surfaces réglées algébriques, si importantes pour les applications, sont étudiées par Chasles, par Cayley dont on retrouve l'influence et la trace dans toutes les recherches mathématiques, par Cremona, Salmon, La Gournerie ; elles le seront plus tard par Plücker dans un travail sur lequel nous aurons à revenir.

L'étude de la surface générale du quatrième ordre paraît être trop difficile encore ; mais celle des surfaces particulières de cet ordre avec points multiples ou lignes multiples est commencée, avec Plücker pour la surface des ondes, avec Steiner, Kummer, Cayley, Moutard, Laguerre, Cremona et bien d'autres chercheurs. Quant à la théorie des courbes gauches algébriques, enrichie dans ses parties élémentaires, elle reçoit enfin, par les travaux d'Halphen et de Nœther qu'il nous est impossible de séparer ici, les plus notables accroissements. Une théorie nouvelle de grand avenir naît avec les travaux de Chasles, de Clebsch et de Cremona ; elle concerne l'étude de toutes les courbes algébriques qui peuvent être tracées sur une surface déterminée.

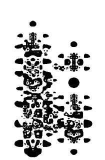
L'homographie et la corrélation, ces deux méthodes de transformation qui ont été l'origine lointaine de toutes les recherches précédentes, en reçoivent à leur tour un accroissement inattendu : elles ne sont pas les seules qui fassent correspondre un seul élément à un seul élément, comme aurait pu le montrer une transformation particulière brièvement signalée par Poncelet dans le *Traité des propriétés projectives*. Plücker définit la *transformation par rayons vecteurs réciproques* ou *inversion* dont Sir W. Thomson et Liouville ne tardent pas à montrer toute l'importance, tant pour la Physique mathématique que pour la Géométrie. Un

Plücker, Magnus, croit avoir trouvé
ale qui fasse correspondre un point
de Cremona nous apprennent que
est que le premier terme d'une série
lles que le grand géomètre italien
éthodiquement, au moins pour les
. Les transformations de Cremona
nd intérêt, bien que des recherches
u'elles se ramènent toujours à une
de la transformation de Magnus.

VI

enons d'énumérer, d'autres sur les-
loin, trouvent leur origine et, en
teur dans les conceptions de la Géo-
ent est venu d'indiquer rapidement
ogrès pour les études de Géométrie.
ptiques de Legendre, trop négligée
st développée et agrandie par Abel
omètres, bientôt suivis de Riemann
des fonctions abéliennes que, plus
ivre avec ses seules ressources, vient
ourbes et des surfaces une contribu-
era de grandir.
l'analyse des fonctions elliptiques à
théorèmes de Poncelet sur les poly-
inaugurant ainsi un chapitre qui
de résultats élégants ; il avait obtenu
tachant à la Géométrie, l'intégration

remier, montra dans une longue série
de la notion de *genre* d'une courbe,
éveloppant une foule de résultats et
nploi des intégrales abéliennes pa-
ttacher à leur véritable point de dé-
xion des courbes du troisième ordre,
courbes du quatrième ordre *et, en*



général, la théorie de l'osculation sur laquelle s'étaient si souvent exercés les anciens et les modernes, furent rattachées au beau problème de la division des fonctions elliptiques et des fonctions abéliennes.

Dans un de ses Mémoires, Clebsch avait étudié les courbes *rationnelles* ou de genre zéro ; cela le conduisit, vers la fin de sa vie trop courte, à envisager ce qu'on peut appeler aussi les surfaces *rationnelles*, celles qui peuvent être simplement représentées par un plan. Il y avait là un vaste champ de recherches, ouvert déjà pour les cas élémentaires par Chasles, et dans lequel Clebsch fut suivi par Cremona et beaucoup d'autres savants. C'est à cette occasion que Cremona, généralisant ses recherches de Géométrie plane, fit connaître non plus la totalité des transformations birationnelles de l'espace, mais quelques-unes des plus intéressantes parmi ces transformations. L'extension de la notion de genre aux surfaces algébriques est déjà commencée ; déjà aussi des travaux de haute valeur ont montré que la théorie des intégrales simples ou multiples de différentielles algébriques trouvera, dans l'étude des surfaces comme dans celle des courbes, un champ étendu d'applications importantes ; mais ce n'est pas au rapporteur de la Géométrie qu'il convient d'insister sur ce sujet.

VII

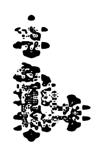
Pendant que se constituaient ainsi les méthodes mixtes dont nous venons d'indiquer les principales applications, les géomètres purs ne restaient pas inactifs. Poinsot, le créateur de la théorie des couples, développait, par une méthode purement géométrique, « celle, disait-il, où l'on ne perd de vue, à aucun moment, l'objet de la recherche », la théorie de la rotation d'un corps solide que les recherches de d'Alembert, d'Euler et de Lagrange semblaient avoir épuisée ; Chasles apportait une contribution précieuse à la Cinématique par ses beaux théorèmes sur le déplacement d'un corps solide, qui ont été étendus depuis par d'autres méthodes élégantes au cas où le mouvement a des degrés divers de liberté. Il faisait connaître ces belles propositions sur l'attraction en général, qui figurent sans désavantage à côté de celles de Green et de Gauss. Chasles et Steiner se rencontraient dans l'étude de l'attraction des

[redacted] une fois de plus que la Géométrie a [redacted] tions les plus hautes du calcul in-

[redacted] s'occuper en même temps des par- [redacted] rie. Ses recherches sur les contacts [redacted] les problèmes isopérimétriques, sur [redacted] centre de gravité de courbure exci- [redacted] leur simplicité et leur profondeur. [redacted] cipe de correspondance entre deux [redacted] naissance à tant d'applications; [redacted] place pour étudier le principe dans [redacted] énéraliser. Il en fut de même en ce [redacted] rie des *caractéristiques* et les nom- [redacted] quières, de Chasles, de Cremona, [redacted] urnir les bases d'une branche nou- [redacted] *rie énumérative*. Pendant plusieurs [redacted] Chasles fut admis sans aucune objec- [redacted] crurent l'avoir établi d'une manière [redacted] t alors Zeuthen, il est bien difficile [redacted] monstrations de ce genre, il ne sub- [redacted] nt faible que leur auteur n'a point [redacted] après des essais infructueux, venait [redacted] es ces recherches en indiquant nette- [redacted] admettre le postulat de Chasles et [redacted].

VIII

[redacted] vaux qui ont remis en honneur la [redacted] t assuré, au cours du siècle dernier, [redacted] recherche mathématique. De nom- [redacted] nt pris part à ce grand mouvement [redacted] connaître qu'il eut comme chefs et [redacted] et Steiner. Tel était l'éclat jeté par [redacted] s qu'elles ont rejeté dans l'ombre, au [redacted] ntanée, les publications d'autres [redacted] réoccupés peut-être de trouver des [redacted] à faire aimer la Géométrie, que de



constituer cette science elle-même sur une base absolument solide. Leurs travaux ont reçu peut-être une récompense plus tardive, mais leur influence croît chaque jour; elle s'accroîtra sans doute encore. Les passer sous silence serait sans doute négliger un des principaux facteurs qui joueront leur rôle dans les recherches futures. C'est surtout à v. Staudt que nous faisons allusion en ce moment. Ses travaux géométriques ont été exposés dans deux Ouvrages de grand intérêt : la *Geometrie der Lage*, parue en 1847, et les *Beiträge zur Geometrie der Lage*, publiées en 1856, c'est-à-dire quatre ans après la Géométrie supérieure.

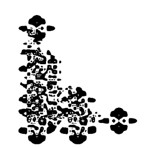
Chasles, nous l'avons vu, s'était préoccupé de constituer un corps de doctrine indépendant de l'analyse de Descartes et il n'y avait pas complètement réussi. Nous avons indiqué déjà un des reproches que l'on peut adresser à ce système : les éléments imaginaires n'y sont définis que par leurs fonctions symétriques, ce qui les exclut nécessairement d'une foule de recherches. D'autre part, l'emploi constant du rapport anharmonique, des transversales et de l'involution, qui exige des transformations analytiques fréquentes, donne à la *Géométrie supérieure* un caractère presque exclusivement métrique qui l'éloigne notablement des méthodes de Poncelet. Revenant à ces méthodes, v. Staudt s'attacha à constituer une géométrie affranchie de toute relation métrique et reposant exclusivement sur les rapports de situation. C'est dans cet esprit qu'a été conçu son premier Ouvrage, la *Géométrie der Lage* de 1847. L'auteur y prend pour point de départ les propriétés harmoniques du quadrilatère complet et celles des triangles homologiques, démontrées uniquement par des considérations de géométrie à trois dimensions, analogues à celles dont a fait un si fréquent usage l'École de Monge.

Dans cette première partie de son œuvre, v. Staudt a négligé entièrement les éléments imaginaires. C'est seulement dans les *Beitrage*, son second Ouvrage, qu'il est parvenu, par une extension très originale de la méthode de Chasles, à définir géométriquement un élément imaginaire isolé et à le distinguer de son conjugué. Cette extension, bien que rigoureuse, est pénible et très abstraite. On peut la définir en substance comme il suit : deux points imaginaires conjugués peuvent toujours être considérés comme les points doubles d'une involution sur une droite réelle; et de même

[illegible] conjuguée par le changement de
[illegible] les deux points imaginaires en
[illegible] des deux sens différents que l'on
[illegible] à quelque chose d'un peu artifi-
[illegible] rie élevée sur de telles bases est
[illegible] des méthodes purement projec-
[illegible] méthode de calcul des rapports
[illegible] inaires les plus généraux. Comme
[illegible] jective emploie la notion de l'or-
[illegible] on ne saurait donc s'*étonner que*
[illegible] hode de calcul ; mais il faut admi-
[illegible] er pour y parvenir. *Malgré* les
[illegible] qui ont essayé d'en simplifier
[illegible] cette partie de la géométrie de
[illegible] trie d'ailleurs si intéressante du
[illegible] puisse prévaloir contre les mé-
[illegible] uis aujourd'hui la faveur *presque*
[illegible] s géomètres connaissent et pra-
[illegible] oindre action. Malgré ces *craintes*
[illegible] nne, il nous paraît que, sous la
[illegible] nnée par v. Staudt, la *géométrie*
[illegible] agne nécessaire de la géométrie
[illegible] renouveler cette géométrie dans
[illegible] plications. C'est ce qui a déjà été
[illegible] notamment en Italie où le grand
[illegible] dédaigné d'écrire, pour les écoles,
[illegible] rie projective.

IX

[illegible], nous avons essayé de suivre et
[illegible] conséquences les plus lointaines
[illegible] oncelet. En créant les coordonnées
[illegible] homogènes, Plücker avait paru
[illegible] ournir à l'analyse la méthode des
[illegible] réciproques. Il lui restait, vers la
[illegible] premières recherches pour leur
[illegible] élargir dans des proportions inat-
[illegible] trie.



Précédée par des recherches innombrables sur les systèmes de lignes droites, dues à Poinsot, Möbius, Chasles, Dupin, Malus, Hamilton, Kummer, Transon, surtout à Cayley qui a introduit le premier la notion des coordonnées de la droite, recherches qui ont leur origine, soit dans la statique et la cinématique, soit dans l'optique géométrique, la géométrie de la ligne droite de Plücker sera toujours regardée comme la partie de son œuvre où l'on rencontre les idées les plus neuves et les plus intéressantes. Que Plücker ait constitué le premier une étude méthodique de la ligne droite, cela est déjà important, mais cela n'est rien à côté de ce qu'il a découvert. On dit quelquefois que le principe de dualité met en évidence ce fait que le plan, aussi bien que le point, peut être considéré comme un élément de l'espace. Cela est vrai ; mais, en ajoutant la ligne droite comme élément possible de l'espace au plan et au point, Plücker a été conduit à reconnaître que n'importe quelle courbe, n'importe quelle surface peuvent aussi être considérées comme éléments de l'espace, et ainsi est née une Géométrie nouvelle qui a déjà inspiré un grand nombre de travaux, qui en suscitera plus encore à l'avenir. Une belle découverte dont nous parlerons plus loin a déjà rattaché la géométrie des sphères à celle des lignes droites et permis d'introduire la notion des coordonnées d'une sphère. La théorie des systèmes de cercles est déjà commencée ; elle se développera sans doute quand on voudra étudier la représentation, que nous devons à Laguerre, d'un point imaginaire dans l'espace par un cercle orienté.

Mais avant d'exposer le développement de ces idées nouvelles qui ont vivifié les méthodes infinitésimales de Monge, il faut que nous revenions en arrière pour reprendre l'histoire des branches de la Géométrie que nous avons négligées jusqu'à présent.

X

Parmi les travaux de l'École de Monge, nous nous sommes bornés jusqu'ici à considérer ceux qui se rattachent à la Géométrie *finie* ; mais quelques-uns des disciples de Monge s'attachèrent surtout à développer les notions nouvelles de géométrie infinitésimale apportées par leur maître sur les courbes à double courbure, sur les lignes de courbure, sur la génération des surfaces, notions

[illegible] partie dans l'*Application de l'analyse* [illegible] us devons citer Lancret, auteur de [illegible] auches et surtout Charles Dupin, [illegible] utes les voies ouvertes par Monge. [illegible] à Dupin deux ouvrages que Monge [illegible] les *Développements de Géométrie* [illegible] *plications de Géométrie et de Mé-* [illegible] C'est là qu'on trouve cette notion [illegible] veler, après Euler et Meunier, toute [illegible] lle des tangentes conjuguées, des [illegible] pris une place si importante dans les [illegible] urions oublier la détermination de [illegible] s de courbure sont des cercles, ni [illegible] èmes triples de surfaces orthogo- [illegible] mps que la découverte du système [illegible] ond degré, le célèbre théorème au- [illegible] ra attaché.

[illegible] x et de la renaissance des méthodes [illegible] s infiniment petits reprenait dans [illegible] ue Lagrange avait voulu lui arracher [illegible] e, les méthodes géométriques ainsi [illegible] lus vive impulsion à la suite de la [illegible] au premier abord tout au moins, [illegible] ure analyse ; nous voulons parler [illegible] *Disquisitiones generales circa su-* [illegible] en 1827 à la Société de Gœttingue [illegible] n peut le dire, une date décisive [illegible] infinitésimale.

[illegible] éthode infinitésimale prit en France [illegible] enet, Bertrand, Molins, J.-A. Serret, [illegible] nnet, Paul Serret développèrent la [illegible] Liouville, Chasles, Minding se joi- [illegible] l'étude méthodique du Mémoire de [illegible] acobi de l'équation différentielle des [illegible] oïde suscita un grand nombre de [illegible] es problèmes étudiés dans l'*Appli-* [illegible] urent largement développés. La dé- [illegible] es ayant leurs lignes de courbure

planes ou sphériques vint compléter, de la manière la plus heureuse, quelques-uns des résultats partiels déjà obtenus par Monge.

A ce moment, un géomètre des plus pénétrants, suivant le jugement de Jacobi, Gabriel Lamé, qui, comme Charles Sturm, avait commencé par la Géométrie pure et avait déjà apporté à cette science les contributions les plus intéressantes par un petit Ouvrage publié en 1817 et par des Mémoires insérés dans les *Annales* de Gergonne, utilisait les résultats obtenus par Dupin et Binet sur le système des surfaces homofocales du second degré et, s'élevant à la notion des coordonnées curvilignes de l'espace, il devenait le créateur de toute une théorie nouvelle destinée à recevoir dans la Physique mathématique les applications les plus variées.

XI

Ici encore, dans cette branche infinitésimale de la Géométrie, on retrouve les deux tendances que nous avons signalées à propos de la Géométrie des quantités finies. Les uns, au nombre desquels il faut placer J. Bertrand et O. Bonnet, veulent constituer une méthode autonome qui repose directement sur l'emploi des infiniment petits. Le grand *Traité de Calcul différentiel*, de Bertrand, contient plusieurs Chapitres sur la théorie des courbes et des surfaces qui sont, en quelque sorte, l'illustration de cette conception. Les autres suivent les voies analytiques usuelles en s'attachant seulement à bien reconnaître et à mettre en évidence les éléments qui doivent figurer au premier plan. Ainsi fait Lamé en introduisant sa théorie des *paramètres différentiels*. Ainsi fait Beltrami en étendant avec beaucoup d'ingéniosité l'emploi de ces invariants différentiels au cas de deux variables indépendantes, c'est-à-dire à l'étude des surfaces.

Il semble qu'aujourd'hui on se rallie à une méthode mixte dont l'origine se trouve dans les travaux de Ribaucour, sous le nom de *périmorphie*. On conserve les axes rectangulaires de la Géométrie analytique, mais en les rendant mobiles et en les rattachant de la manière qui paraît la plus commode au système que l'on veut étudier. Ainsi disparaissent la plupart des objections que l'on a adressées à la méthode des coordonnées. On réunit les avantages de ce que l'on appelle quelquefois la Géométrie *intrinsèque* à ceux

qui résultent de l'emploi de l'analyse régulière. Cette analyse d'ailleurs n'est nullement abandonnée ; les complications de calcul qu'elle entraîne presque toujours, dans ses applications à l'étude des surfaces et des coordonnées rectilignes, disparaissent le plus souvent si l'on emploie les notions sur les invariants et les covariants des formes quadratiques de différentielles que nous devons aux recherches de Lipschitz et de Christoffel, inspirées par les études de Riemann sur la Géométrie non euclidienne.

XII

Les résultats de tant de travaux ne se sont pas fait attendre. La notion de la courbure géodésique que Gauss possédait déjà, mais sans l'avoir publiée, a été donnée par Bonnet et Liouville, la théorie des surfaces dont les rayons de courbure sont fonctions l'un de l'autre, inaugurée en Allemagne par deux propositions qui figureraient sans désavantage dans le Mémoire de Gauss, a été enrichie par Ribaucour, Halphen, S. Lie et par d'autres, d'une foule de propositions. Parmi ces propositions, les unes concernent ces surfaces envisagées d'une manière générale ; d'autres s'appliquent aux cas particuliers où la relation entre les rayons de courbure prend une forme particulièrement simple : aux surfaces minima, par exemple, et aussi aux surfaces à courbure constante, positive ou négative.

Les surfaces minima ont été l'objet de travaux qui font de leur étude le chapitre le plus attrayant de la Géométrie infinitésimale. L'intégration de leur équation aux dérivées partielles constitue une des plus belles découvertes de Monge ; mais, par suite de l'imperfection de la théorie des imaginaires, le grand géomètre n'avait pu tirer de ses formules aucun mode de génération de ces surfaces, ni même aucune surface particulière. Nous ne reviendrons pas ici sur l'historique détaillé que nous avons présenté dans nos *Leçons sur la théorie des surfaces ;* mais il convient de rappeler les recherches fondamentales de Bonnet qui nous ont donné, en particulier, la notion des *surfaces associées à une surface donnée,* les formules de Weierstrass qui établissent un lien étroit entre les surfaces minima et les fonctions d'une variable complexe, les recherches de Lie par lesquelles il a été établi que les formules mêmes de Monge peuvent

aujourd'hui servir de base à une étude fructueuse des surfaces minima. En cherchant à déterminer les surfaces minima de classes ou de degrés les plus petits, on a été conduit à la notion des surfaces minima doubles qui relève de l'*Analysis situs.*

Trois problèmes d'inégale importance ont été étudiés dans cette théorie.

Le premier, relatif à la détermination des surfaces minima inscrites suivant un contour donné à une développable également donnée, a été résolu par des formules célèbres qui ont conduit à un grand nombre de propositions. Par exemple, toute droite tracée sur une telle surface est un axe de symétrie.

Le second, posé par S. Lie, concerne la détermination de toutes les surfaces minima algébriques inscrites dans une développable algébrique, sans que la courbe de contact soit donnée. Il a été aussi entièrement élucidé.

Le troisième et le plus difficile est celui que les physiciens résolvent par l'expérience, en plongeant un contour fermé dans une solution de glycérine. Il concerne la détermination de la surface minima passant par un contour donné.

La solution de ce problème dépasse évidemment les ressources de la Géométrie. Grâce aux ressources de l'Analyse la plus haute, il a pu être résolu pour des contours particuliers dans le Mémoire célèbre de Riemann et dans les recherches profondes qui ont suivi ou accompagné ce Mémoire. Pour le contour le plus général, son étude a été brillamment commencée, elle sera continuée par nos successeurs.

Après les surfaces minima, les surfaces à courbure constante devaient attirer l'attention des géomètres. Une remarque ingénieuse de Bonnet rattache les unes aux autres les surfaces dont l'une ou l'autre des deux courbures, courbure moyenne ou courbure totale, est constante. Bour avait annoncé que l'équation aux dérivées partielles des surfaces à courbure constante pouvait être complètement intégrée. Ce résultat n'a pu être retrouvé ; il paraît même plus que douteux si l'on se reporte à une recherche où S. Lie a essayé en vain d'appliquer une méthode générale d'intégration des équations aux dérivées partielles à l'équation particulière des surfaces à courbure constante. Mais, s'il est impossible de déterminer en termes finis toutes ces surfaces, on a pu du moins en obtenir quelques-unes, ca-

ractérisées par des propriétés spéciales, telles que celle d'avoir leurs lignes de courbure planes ou sphériques ; et l'on a montré, en employant une méthode qui réussit dans beaucoup d'autres problèmes, que l'on peut faire dériver de toute surface à courbure constante une infinité d'autres surfaces de même nature, par des opérations nettement définies qui n'exigent que des quadratures.

La théorie de la déformation des surfaces dans le sens de Gauss a été aussi beaucoup enrichie. On doit à Minding et à Bour l'étude détaillée de cette déformation spéciale des surfaces réglées qui laisse rectilignes les génératrices. Si l'on n'a pu, comme nous venons de le dire, déterminer les surfaces applicables sur la sphère, on s'est attaqué avec plus de succès à d'autres surfaces du second degré et, en particulier, au paraboloïde de révolution. L'étude systématique de la déformation des surfaces générales du second degré est déjà entamée ; elle est de celles qui donneront prochainement les résultats les plus importants.

La théorie de la déformation infiniment petite constitue aujourd'hui un des chapitres les plus achevés de la Géométrie. Elle est la première application un peu étendue d'une méthode générale qui paraît avoir beaucoup d'avenir.

Étant donné un système d'équations différentielles ou aux dérivées partielles, propre à déterminer un certain nombre d'inconnues, il convient de lui associer un système d'équations que nous avons appelé *système auxiliaire* et qui détermine les systèmes de solutions infiniment voisins d'un système donné quelconque de solutions. Le système auxiliaire étant nécessairement linéaire, son emploi dans toutes les recherches fournit de précieuses lumières sur les propriétés du système proposé et sur la possibilité d'en obtenir l'intégration.

La théorie des lignes de courbure et des lignes asymptotiques a été notablement étendue. Non seulement on a pu déterminer ces deux séries de lignes pour des surfaces particulières telles que les surfaces tétraédrales de Lamé ; mais aussi, en développant les résultats de Moutard relatifs à une classe particulière d'équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre, on a pu généraliser tout ce qui avait été obtenu pour les surfaces à lignes de courbures planes ou sphériques, en déterminant complètement toutes les classes de surfaces pour lesquelles on peut résoudre le problème

de la *représentation sphérique*. On a résolu de même le problème corrélatif relatif aux lignes asymptotiques en faisant connaître toutes les surfaces dont on peut déterminer en termes finis la déformation infiniment petite. Il y a là un vaste champ de recherches dont l'exploration est à peine commencée.

L'étude infinitésimale des congruences rectilignes, déjà commencée depuis longtemps par Dupin, Bertrand, Hamilton, Kummer, est venue se mêler à toutes ces recherches. Ribaucour, qui y a pris une part prépondérante, a étudié des classes particulières de congruences rectilignes et, en particulier, les congruences dites *isotropes*, qui interviennent de la manière la plus heureuse dans l'étude des surfaces minima.

Les systèmes triples orthogonaux dont Lamé avait fait usage en Physique mathématique sont devenus l'objet de recherches systématiques. Cayley le premier a formé l'équation aux dérivées partielles du troisième ordre dont on avait fait dépendre la solution générale de ce problème. Le système des surfaces homofocales du second degré a été généralisé et a donné naissance à cette théorie des *cyclides* générales dans laquelle on peut employer à la fois les ressources de la Géométrie métrique, de la Géométrie projective et de la Géométrie infinitésimale. On a fait connaître beaucoup d'autres systèmes orthogonaux. Parmi eux il convient de signaler les systèmes *cycliques* de Ribaucour, pour lesquels une des trois familles admet des cercles pour trajectoires orthogonales, et les systèmes plus généraux pour lesquels ces trajectoires orthogonales sont simplement des courbes planes. L'emploi systématique des imaginaires, qu'il faut bien se garder d'exclure de la Géométrie, a permis de rattacher toutes ces déterminations à l'étude de la déformation finie d'une surface particulière.

Parmi les méthodes qui ont permis d'établir tous ces résultats, il convient de noter l'emploi systématique des équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre et des systèmes formés de telles équations. Les recherches les plus récentes montrent que cet emploi est appelé à renouveler la plupart des théories.

La Géométrie infinitésimale ne pouvait négliger l'étude des deux problèmes fondamentaux que lui posait le calcul des variations.

Le problème du plus court chemin sur une surface a été l'objet des magistrales études de Jacobi et d'Ossian Bonnet. On a pour-

suivi l'étude des lignes géodésiques, on a appris à les déterminer pour de nouvelles surfaces. La théorie des ensembles est venue permettre de suivre ces lignes dans leur cours sur une surface donnée. La solution d'un problème relatif à la représentation de deux surfaces l'une sur l'autre a beaucoup accru l'intérêt des découvertes de Jacobi et de Liouville relatives à une classe particulière de surfaces dont on sait déterminer les lignes géodésiques. Les résultats qui concernent ce cas particulier ont conduit à l'examen d'une question nouvelle : rechercher tous les problèmes de calcul des variations dont la solution est fournie par les courbes satisfaisant à une équation différentielle donnée.

Enfin, les méthodes de Jacobi ont été étendues à l'espace à trois dimensions et appliquées à la solution d'une question qui présentait les plus grandes difficultés : l'étude des propriétés de minimum appartenant à la surface minima passant par un contour donné.

XIII

Parmi les inventeurs qui ont contribué au développement de la Géométrie infinitésimale, Sophus Lie se distingue par plusieurs découvertes capitales qui le placent au premier rang. Il n'était pas de ceux qui laissent paraître dès l'enfance les aptitudes les plus caractérisées et, au moment de quitter l'Université de Christiania en 1865, il hésitait encore entre la Philologie et les Mathématiques. Ce sont les travaux de Plücker qui lui donnèrent pour la première fois pleine conscience de sa véritable vocation. Il publia en 1869 un premier travail sur l'interprétation des imaginaires en Géométrie et, dès 1870, il était en possession des idées directrices de toute sa carrière.

J'ai eu à cette époque le plaisir de le voir souvent, de l'entretenir à Paris, où il était venu avec son ami F. Klein. Un cours de M. Sylow suivi par Lie lui avait révélé toute l'importance de la théorie des substitutions ; les deux amis étudiaient cette théorie dans le grand Traité de C. Jordan ; ils avaient pleine conscience du rôle important qu'elle était appelée à jouer dans tant de branches des Sciences mathématiques où elle n'avait pas encore été appliquée. Ils ont eu l'un et l'autre la bonne fortune de contri-

buer par leurs travaux à imprimer aux études mathématiques la direction qui leur avait paru la meilleure.

Dès 1870, Sophus Lie présentait à l'Académie des Sciences de Paris une découverte extrêmement intéressante. Rien ne ressemble moins à une sphère qu'une ligne droite, et cependant Lie avait imaginé une transformation singulière qui faisait correspondre une sphère à une droite et permettait, par suite, de rattacher toute proposition relative à des droites à une proposition relative à des sphères et *vice versa*. Dans cette méthode si curieuse de transformation, chaque propriété relative aux lignes de courbure d'une surface fournit une proposition relative aux lignes asymptotiques de la surface transformée. Le nom de Lie demeurera attaché à ces relations si cachées qui rattachent l'une à l'autre la ligne droite et la sphère, ces deux éléments essentiels et fondamentaux de la recherche géométrique. Il les a développées dans un Mémoire rempli d'idées neuves qui a paru en 1872.

Les travaux qui suivirent ce brillant début de Lie confirmèrent pleinement les espérances qu'il avait fait naître. La conception de Plücker relative à la génération de l'espace par des lignes droites, par des courbes ou des surfaces arbitrairement choisies, ouvre à la théorie des formes algébriques un champ qui n'a pas encore été exploré, que Clebsch a commencé à peine à reconnaître et à délimiter. Mais, du côté de la Géométrie infinitésimale, cette conception a été mise en pleine valeur par Sophus Lie. Le grand géomètre norvégien a su d'abord y trouver la notion des congruences et des complexes de courbes, et ensuite celle des *transformations de contact* dont il avait trouvé, pour le cas du plan, le premier germe dans Plücker. L'étude de ces transformations l'a conduit à perfectionner, en même temps que M. Mayer, les méthodes d'intégration que Jacobi avait instituées pour les équations aux dérivées partielles du premier ordre ; mais surtout elle jette la lumière la plus éclatante sur les parties les plus difficiles et les plus obscures des théories relatives aux équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur. Elle a permis à Lie, en particulier, d'indiquer tous les cas dans lesquels la méthode des caractéristiques de Monge est pleinement applicable aux équations du second ordre à deux variables indépendantes.

En continuant l'étude de ces transformations spéciales, Lie fut

[redacted]sivement sa magistrale théorie des
[redacted]ations et à mettre en évidence le rôle
[redacted]groupe joue en Géométrie. Parmi les
[redacted]herches, il convient de signaler les
[redacted] dont l'idée lui appartient exclusi-

[redacted]iés sous sa direction par d'habiles et
[redacted]nnent l'essentiel de ses travaux et
[redacted]e l'intégration, à celle des *unités*
[redacted]n euclidienne.

XIV

[redacted]oie indirecte à cette Géométrie non
[redacted] dans les recherches des géomètres
[redacted]our. Si j'étais seul à vous entretenir
[redacted]sir à vous rappeler tout ce qui a été
[redacted]de, ou du moins depuis Legendre,
[redacted] successivement par les plus grands
[redacted] la question s'est progressivement
[redacted]*stulatum* relatif aux parallèles que
[redacted]nsemble des axiomes géométriques [redacted]

[redacted]i ont résisté au travail de tant de
[redacted]neur de provoquer, avant de finir,
[redacted]mirablement enchaînés qui contri-
[redacted] efficace, au progrès des Mathéma-
[redacted]ourniront aux philosophes les points
[redacted] plus solides pour l'étude de l'ori-
[redacted]nos connaissances. Je suis assuré
[redacted]ollaborateur n'oubliera pas, *parmi*
[redacted], celui-ci, qui est le plus important
[redacted] avec tant de succès ; et je lui laisse
[redacted]ute l'ampleur qu'il mérite assuré- [redacted]

[redacted]ents de la Géométrie. Ils ont reçu
[redacted]ts qu'il convient de ne pas oublier.
[redacted]enrichie des belles découvertes de



Poinsot sur les polyèdres étoilés et de celles de Möbius sur les polyèdres à une seule face. Les méthodes de transformation ont élargi l'exposition. On peut dire aujourd'hui que le premier Livre contient la théorie de la translation et de la symétrie, que le deuxième équivaut à la théorie de la rotation et du déplacement, que le troisième repose sur l'homothétie et l'inversion.

Mais il faut bien reconnaître que c'est grâce à l'Analyse que les *Éléments* se sont enrichis de leurs plus belles propositions. C'est à l'Analyse la plus haute que nous devons l'inscription des polygones réguliers de 17 côtés et des polygones analogues. C'est à elle que nous devons les démonstrations si longtemps cherchées de l'impossibilité de la quadrature du cercle, de l'impossibilité de certaines constructions géométriques à l'aide de la règle et du compas. C'est à elle enfin que nous devons les premières démonstrations rigoureuses des propriétés de maximum et de minimum de la sphère. Il appartiendra à la Géométrie d'intervenir sur ce terrain où l'Analyse l'a précédée.

Que seront les éléments de la Géométrie au cours du siècle qui vient de commencer? Y aura-t-il un seul Livre élémentaire de Géométrie? C'est peut-être l'Amérique, avec ses écoles affranchies de tout programme et de toute tradition, qui nous donnera les meilleures solutions de cette importante et difficile question. On a quelquefois appelé v. Staudt, l'*Euclide du* XIXe *siècle ;* je préférerais l'appeler l'*Euclide de la Géométrie projective ;* mais cette Géométrie, quelque intéressante qu'elle puisse être, est-elle appelée à fournir la base unique des futurs éléments?

XV

Le moment est venu de clore ce trop long exposé et cependant il y a une foule de recherches intéressantes que j'ai été pour ainsi dire contraint de négliger. J'aurais aimé à vous entretenir de ces Géométries à un nombre quelconque de dimensions dont la notion remonte aux premiers temps de l'Algèbre, mais dont l'étude systématique n'a été commencée que depuis 60 ans par Cayley et par Cauchy. Ce genre de recherches a trouvé faveur dans votre pays, et je n'ai pas besoin de rappeler que notre illustre président, après s'être montré le digne continuateur de Laplace et de Le Verrier,

dans un espace qu'il considère avec nous comme étant doué de 3 dimensions, n'a pas dédaigné de publier, dans l'*American Journal,* des considérations d'un vif intérêt sur les géométries à *n* dimensions. Une seule objection pouvait être faite aux études de ce genre et avait déjà été formulée par Poisson : l'absence de toute base réelle, de tout *substratum* permettant de présenter, sous des aspects visibles et en quelque sorte palpables, les résultats obtenus. L'extension des méthodes de la Géométrie descriptive, et surtout l'emploi des conceptions de Plücker sur la génération de l'espace, contribueront à enlever à cette objection beaucoup de sa valeur.

J'aurais voulu vous parler aussi de la méthode des équipollences, dont nous trouvons le germe dans les œuvres posthumes de Gauss, des quaternions d'Hamilton, des méthodes de Grassmann et en général des systèmes d'unités complexes, de l'*Analysis situs,* si intimement reliée à la théorie des fonctions, de la Géométrie dite *cinématique,* de la théorie des abaques, de la Géométrographie, des applications de la Géométrie à la Philosophie naturelle ou aux Arts. Mais je craindrais, si je m'étendais outre mesure, que quelque analyste, comme il y en a eu autrefois, n'accusât la Géométrie de vouloir tout accaparer.

Mon admiration pour l'Analyse, devenue si féconde et si puissante à notre époque, ne me permettrait pas de concevoir une telle pensée. Mais, si quelque reproche de ce genre pouvait être aujourd'hui formulé, ce n'est pas à la Géométrie, c'est à l'Analyse qu'il conviendrait, je crois, de l'adresser. Le cercle dans lequel paraissaient renfermées les études mathématiques au commencement du XIXe siècle a été brisé de tous côtés. Les problèmes anciens se présentent à nous sous une forme renouvelée, des problèmes nouveaux se posent, dont l'étude occupe des légions de travailleurs. Le nombre de ceux qui cultivent la Géométrie pure est devenu prodigieusement restreint. Il y a là un danger contre lequel il importe de se prémunir. N'oublions pas que, si l'Analyse a acquis des moyens d'investigation qui lui faisaient défaut autrefois, elle les doit en grande partie aux conceptions introduites par les Géomètres. Il ne faut pas que la Géométrie demeure en quelque sorte ensevelie dans son triomphe. C'est à son école que nous avons appris, que nos successeurs auront à apprendre, à ne jamais se fier aveuglément aux méthodes trop générales, à envisager

les questions en elles-mêmes et à trouver, dans les conditions particulières à chaque problème, soit un chemin direct vers une solution facile, soit le moyen d'appliquer d'une manière appropriée les procédés généraux que toute science doit rassembler. Ainsi que le dit Chasles au commencement de l'*Aperçu historique* : « Les doctrines de la pure Géométrie offrent souvent, et dans une foule de questions, cette voie simple et naturelle qui, pénétrant jusqu'à l'origine des vérités, met à nu la chaîne mystérieuse qui les unit entre elles et les fait connaître individuellement de la manière la plus lumineuse et la plus complète. »

Cultivons donc la Géométrie, qui a ses avantages propres, sans vouloir, sur tous les points, l'égaler à sa rivale. Au reste, si nous étions tentés de la négliger, elle ne tarderait pas à trouver dans les applications des Mathématiques, comme elle l'a déjà fait une première fois, les moyens de renaître et de se développer de nouveau. Elle est comme le Géant Antée qui reprenait ses forces en touchant la terre.

ERRATA

Pages	11	*ligne*	30	*au lieu de*	on a pu	*lire*	a-t-on pu
»	13	»	29	»	proportion	»	proposition
»	14	»	6	»	*par*	»	*per*
»	14	»	11	»	elle	»	elles
»	19	»	21	»	d'août »,	»	d'août,
»	19	»	32	»	Novembre	»	novembre
»	27	»	13	»	Clairant	»	Clairaut
»	30	»	10	»	quantités	»	fonctions
»	32	»	38	»	on peut considérer comme		on considère aujourd'hui comme
»	35	»	37	»	après et	»	après qu'elle eût été posée et
»	40	»	35	»	Mouton	»	Newton
»	43	»	16	»	Que	»	que
»	43	»	27	»	avait	»	fût
»	43	»	28	»	1604	»	1704
»	52	»	24	»	actionnée	»	sollicitée
»	64	»	13	»	$(dx - dt)$	»	$(dx + dt)$
»	64	»	15	»	$(dx + dt)$	»	$(dx - dt)$
»	65	»	3	»	$\varphi(x - t)$	»	$\varphi(+ t)$
»	65	»	5	»	$u=\varphi(x+t)+\psi(x-t)$	»	$u=\varphi(x+t)+\varphi(x-t)$
»	65	»	11	»	arbitraires :	»	arbitraires.
»	66	»	25	»	en mouvements de translation et en mouvements de rotation		en un mouvement de translation et en un mouvement de rotation
»	71	»	4	*ajoutez*	le théorème général a été donné avant Taylor par Desargues		
»	71	»	26	*au lieu de*	que OP soit	*lire*	l'inverse de OP soit
»	80	»	9	»	Newtonienne	»	newtonienne
»	85	»	5	»	Vandermon de	»	Vandermonde
»	85	»	20	»	lui-même	»	lui-même
»	86	»	31	»	$\frac{1}{p}\frac{dp}{dx}=X-\frac{du}{dt}-u\frac{du}{dx}-v\frac{du}{dy}-w\frac{du}{dz}$		$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}=X-\frac{\partial u}{\partial t}-u\frac{\partial u}{\partial x}-v\frac{\partial u}{\partial y}-w\frac{\partial u}{\partial z}$
»	87	»	24	»	*Lettres...sur quelques sujets de physique*	»	*Lettres à une princesse d'Allemagne sur...*
»	89	»	21	»	cette	»	(cette
»	97	»	32	»	l'étude des formes algébriques		l'algèbre

Pages	99	*ligne*	32	*au lieu de*	naquit en	*lire*	naquit à
»	100	»	32	»	$\frac{r}{r'}$	»	$\frac{r'}{r}$
»	101	»	24	»	mouvements moyens	»	moyens mouvements
»	103	»	9	»	R. Wolf	»	C. Wolf
»	103	»	12	»	*Origine du monde*	»	*sur l'origine du monde*
»	103	»	18, 23	»	agrégations	»	désagrégations
»	109	»	9	»	les attractions	»	l'attraction
»	113	»	30	»	résolvants	»	résolvantes
»	117	»	34	»	*rouleront sur*	»	*envelopperont*
»	120	»	11	*ajoutez*	* son mémoire sur l'application de l'hydrodynamique à la circulation du sang est des plus remarquables *		
»	121	»	35	*au lieu de*	sur les racines	*lire*	sur la séparation des racines
»	125	»	3, 4	»	un véritable idiotisme	»	une véritable idiotie
»	126	»	1	»	Huygens	»	Huyghens
»	127	»	8	»	directions	»	composantes
»	131	»	18	»	continus	»	infinis
»	131	»	37	»	Trinite	»	Trinity
»	134	»	35	*ajoutez*	traduites en français par M. Laugel		
»	135	»	13	*au lieu de*	Painlevé	*lire*	Humbert
»	135	»	13	*ajoutez*	*l'Etude sur le développement des méthodes géométriques de M. G. Darboux*		
»	142	»	34	*au lieu de*	dans	*lire*	entre
»	143	»	25	*ajoutez*	on lui doit enfin une belle et rigoureuse démonstration du critérium de la stabilité de l'équilibre d'un système matériel		
»	149	»	6	*au lieu de*	Glaischer	*lire*	Glaisher
»	150	»	7	»	Holmoe	»	Holmoë
»	151	»	20	»	La nouvelle fonction fût désignée plus tard	»	Gudermann désigna plus tard la nouvelle fonction
»	152	»	19, 20	»	le même intégrant, mais différentes limites	»	le même élément différentiel, mais des limites différentes
»	153	»	8	»	travaux de Neumann	»	travaux de Clebsch, de Neumann
»	153	»	10	»	Picard, Poincaré	»	Picard, Appell, Poincaré
»	155	»	19	»	n^2 coefficients différentiels partiels	»	n^2 dérivées partielles
»	156	»	20	»	fonctions de	»	fonctions à
»	158	»	24	»	différentielle importante	»	différentielle linéaire du second ordre importante
»	159	»	9	»	ξ	»	ζ
»	159	»	12	»	à deux périodes d'une seule variable	»	d'une seule variable à deux périodes
»	159	»	17	»	en mécanique rationnelle aussi	»	et mécanique rationnelle et céleste aussi

Pages	160	*ligne*	1	*au lieu de*	variable	*lire*	variables
»	160	»	10	»	point singulier	»	points singuliers
»	160	»	24,25	»	propriétés...étendues	»	propriété ... étendue
»	160	»	30	»	rendre	»	prendre
»	162	»	6	»	G. Painlevé	»	P. Painlevé
»	162	»	13	»	P. F. Appell, C. F. Picard	»	MM. Appell, Picard
»	162	»	20, 21	»	*Des fonctions algébriques par* P. E. et F. Goursat	»	*Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales* par P. Appell et E. Goursat
»	163	»	4	»	toutes les	»	nombreuses
»	165	»	4,5	»	fonctions symétriques des coefficients	»	fonctions symétriques des racines
»	165	»	30	»	initiales et finales	»	initiale et finale
»	165	»	33	»	qui	»	que
»	166	»	35	»	$\frac{A_m}{(3 - a)^m}$	»	$\frac{A_m}{(z - a)^m}$
»	167	»	4,5	»	M. Borel les franchit	»	MM. Borel et Painlevé les franchissent
»	167	»	12	»	située	»	situées
»	167	»	35	»	(I)	»	*à supprimer*
»	167	»	36	»	relation équivalente	»	relation finie équivalente
»	168	»	8	»	Bendixon et Horn	»	Bendixon, Dulac et Horn
»	168	»	12	»	Stocklhom	»	Stockholm
»	168	»	14	»	reconnaître les singularités	»	reconnaître sur l'équation elle-même et sans en faire l'intégration explicite les singularités

» 168 *les lignes 20 à 32 sont à supprimer et à transposer comme il suit :* comme l'ont montré MM. Fuchs et Thomé.

Il n'en va pas de même pour les équations non linéaires. Toutefois, en ce qui concerne les équations du premier ordre, il résulte des travaux de MM. Fuchs, Poincaré et surtout Painlevé, que leurs intégrales ne peuvent admettre comme points singuliers non algébriques qu'un nombre fini de points, qui se déterminent algébriquement sur les équations elles-mêmes; elles peuvent admettre au contraire des points critiques algébriques dépendant de la constante d'intégration et appelés points critiques mobiles. Si l'on passe au second ordre, les intégrales peuvent admettre des singularités essentielles mobiles. C'est là une distinction capitale, distinction signalée d'abord par M. Picard et mise en pleine lumière par M. Painlevé. M. Painlevé s'est alors proposé de rechercher toutes les équations du second ordre présentant le caractère des équations du premier ordre de n'avoir pas de singularités essentielles mobiles; la détermination des équations du second ordre à points critiques fixes l'a conduit à la découverte de transcendantes uniformes nouvelles, les premières auxquelles on ait été conduit par des équations différentielles non explicitement intégrées. Le

même géomètre a amorcé la même étude pour les équations du troisième ordre.

Pages	169	*ligne*	20		dans la science		*à supprimer*
»	169	»	23	*au lieu de*	relation donnée	*lire*	relation différentielle donnée
»	169	»	25	»	relation	»	relation finie
»	170	»	8	»	von Weber, Riquier	»	von Weber, Bourlet, Riquier
»	170	»	12	»	intéressant	»	concernant
»	170	»	32	»	Coulomb	»	Coulon
»	175	»	5	»	Tchebuhef	»	Tchebychef
»	176	»	1	»	les complexes	»	les nombres complexes
»	177	»	9	»	groupe de permutation	»	système de permutations
»	177	»	27	»	substitution ou de transformation	»	substitutions ou de transformations
»	177	»	32, 33	»	étudie des groupes au moyen des invariants	»	recherche des *invariants* associés à des *groupes*
»	177	»	34	»	de même que	»	quelconques,
»	177	»	35	»	substitutions orthogonales	»	substitutions linéaires orthogonales
»	178	»	3	»	eux	*ajoutez*	, et donné le moyen d'en déduire analytiquement tous les autres.
»	178	»	7	»	l'intégration	*lire*	réduction à des formes intégrales
»	178	»	12	»	d'un groupe particulier	»	de groupes particuliers
»	178	»	15	»	théorie	»	doctrine
»	179	»	8	»	premier	»	*à supprimer*
»	180	»	14	»	valeur	*ajoutez*	ses recherches sur l'*Analysis situs* ont été le point de départ d'importants travaux récents, surtout de M. Poincaré
»	180	»	35	»	asbolu	*lire*	Absolu
»	182	»	8, 9	»	assemblages de lignes... assemblages...	»	systèmes de droites... systèmes...
»	182	»	32	»	autres	»	*à supprimer*
»	183	»	23	»	de formes adjointes	»	d'invariants associés à un groupe fini donné
»	184	»	7	»	G. Painlevé	»	P. Painlevé
»	185	»	2	»	M. Lévy	»	M. M. Lévy
»	185	»	3	»	Albert	»	Charles
»	185	»	6	»	aux points	»	aux environs des points

Pages	185	*ligne*	26, 27	*au lieu de*	noble famille	*lire*	famille noble...
»	186	»	11	»	reprises	»	reprise
»	188	»	9	»	autour du	»	sur le
»	189	»	3	»	étude	»	l'étude
»	189	»	28	»	analogies,	»	analogues
»	190	»	35	»	suffit	»	suffit le plus souvent
»	192	»	37	»	concerne	»	concernent
»	210	»	26	»	en nombre infini, aussi	»	également en nombre infini
»	224	»	17	*ajoutez*	dans celui de Routh		



TABLE DES MATIÈRES

Les mathématiciens anglais du XVIIIe siècle.

CHAPITRE XVIII

Lagrange-Laplace et leurs contemporains de 1740 à 1836.
Développement de l'Analyse et de la mécanique.

Création de la géométrie moderne

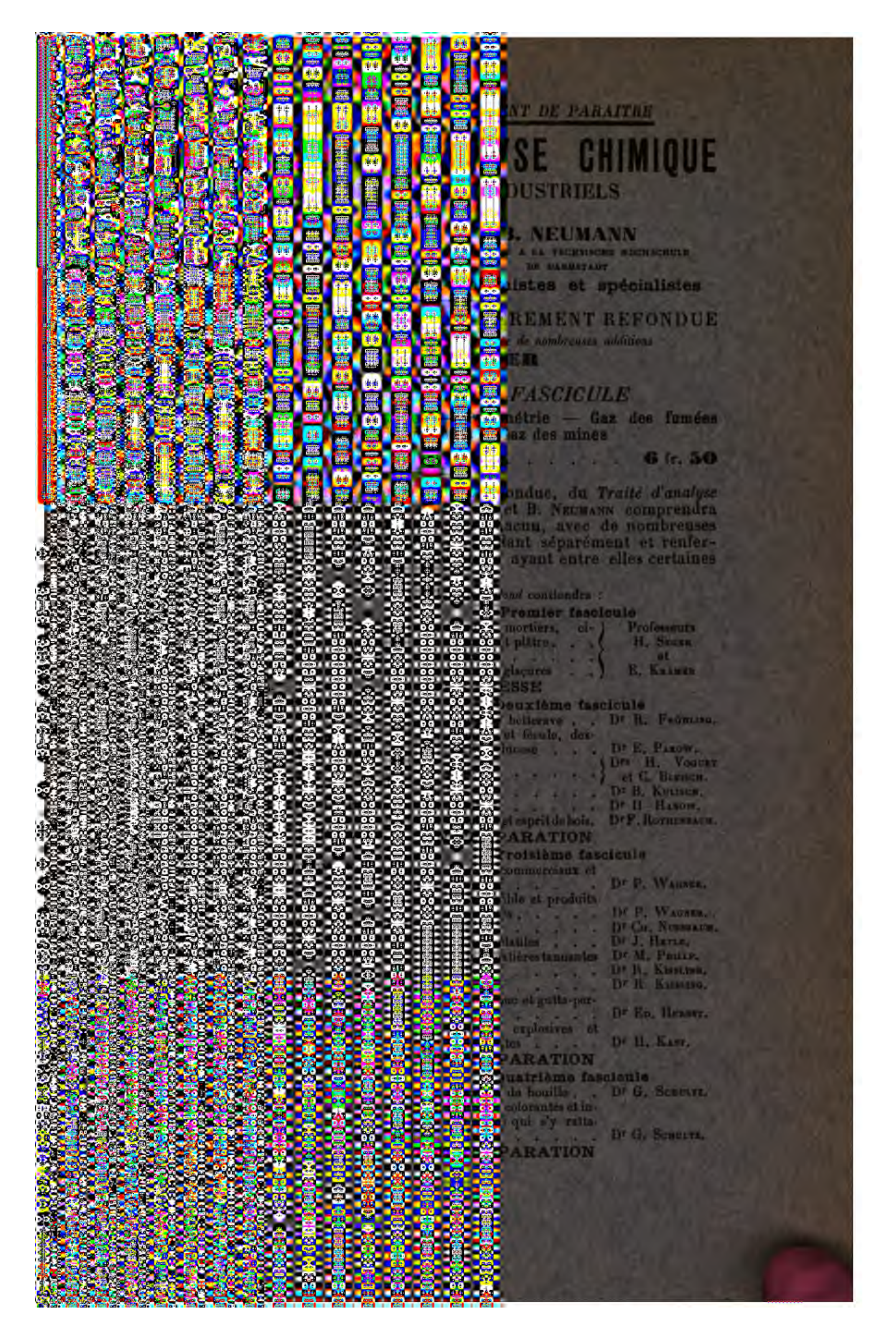
Développement de la physique mathématique 118

Introduction de l'Analyse en Angleterre

Les mathématiques au XIX[e] siècle 133

Pages

SAINT-AMAND, CHER. — IMPRIMERIE BUSSIÈRE.





…ax. — *Prodrome d'une théorie …que de l'électricité* . . . . . . 6 »
…aron. — *Recherches sur les spectres …* . . . . 6 »
…s. — *Leçons de Cinématique* . . . 15 »
…s. — *Théorie des mécanismes* . . . 8 »
…as. — *Théorie des nombres*, 2 vol. 40 »
…as. — *Recherches d'Héron d'Alexan… sur le système métrique égyptien* . 6 »
…ex. — *Thermodynamique* . . . . 9 »
— *La mécanique*, traduction Ber…d. . . . . 15 »
…ex. — *Mécanique et physique du …* . . . . 11 »
…m. — *Les déformations permanentes …erre et le déplacement du zéro des …momètres*, 600 pages . . . . . 10 »
— *Le four électrique*, fasc. I . . 3 »
Ball. — *Histoire des mathéma…s*, tome I, 1906 . . . . 12 »
…ex. — *Théorie électromagnétique de la lumière* . . . . 5 »
…sse (H.). — *La dynamique de …* . . . . 3 »
…s (V.). — *Description physique de … de Crète*, 2 volumes et atlas . . 20 »
…ore. — *Œuvres*, traduction D. St…aire, 18 volumes in-8 . . . . 120 »
…a. — *Guide du géologue et du pa…ontologiste dans le tertiaire parisien* . 2 50
…x. — *Les bambous* . . . . . . 6 »
… et Muller. — *Guide de l'ascli…* . . . . 5 »
…s. — *Géologie du nord de Mada…* . . . . 35 »
…s. — *Précis de géologie stratigra…que* . . . . 3 »
… — *Synopsis des hyménoptères d'Eu… et d'Algérie*, 10 volumes . . . 350 »
…nes. — *Synopsis methodica …* . . . . 60 »
…lin. — *Précis des caractères des …pes génériques des insectes (réimpr.)* . . . . 5 »
…s (A.-M). — *Portrait*, in-folio …vé par Leymarie (1844) . . . . . 3 »
…r (A.-L.). — *Portrait* in-folio li…graphié . . . . 3 »
… (U.). — *Traité des assurances … la vie avec développement sur le …ul des probabilités*, 1907 . . . . 7 50
… (Rod.). — *Expériences d'accous…* . . . . 10 »

…n Catalogue des publications de la

